

分步傅里叶法求解非线性薛定谔方程的改进及其数值计算

杨未强 侯 静 王彦斌 张 斌 宋 锐 刘泽金

(国防科学技术大学光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要 在分步傅里叶法求解非线性薛定谔方程的基础上,介绍了一种时间窗口和步长动态自适应调整的改进算法,该算法根据时域脉冲的扩散情况调整时间窗口,采用局部误差法控制计算步长,在保证精度的同时提高了计算效率。讨论了数值计算时如何正确选取正、逆傅里叶变换的形式,分析了如何由离散的计算结果近似连续的时域和频域波形。模拟了光子晶体光纤中超连续谱的产生,验证了算法的正确性。

关键词 傅里叶光学;分步傅里叶法;非线性薛定谔方程;超连续谱;数值计算

中图分类号 O47; TN252 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.s100510

Improvement and Numerical Calculation of Split-Step Fourier Method in Solving Nonlinear Schrödinger Equation

Yang Weiqiang Hou Jing Wang Yanbin Zhang Bin Song Rui Liu Zejin

(College of Optoelectric Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract A dynamic and adaptable method for choosing the time window and step size is given, based on the split-step Fourier method for solving the nonlinear Schrödinger equation. In this method, the time window is adjusted based on the diffusion of input pulse, and the step size is controlled by using a measure of the local error. This method has a high accuracy, which is most efficient for the improvement of calculation efficiency. How to choose positive and negative Fourier transformation forms during the calculation process is discussed, and how to get the approximate continuum waves in the time and frequency domain from the discrete results is analyzed. Supercontinuum generation in a high-nonlinearity photonic crystal fiber is investigated numerically, which validates the correctness of the calculation method.

Key words Fourier optics; split-step Fourier method; nonlinear Schrödinger equation; supercontinuum (SC); numerical calculation

OCIS codes 060.4370; 060.5295; 070.4340; 070.4790

1 引 言

非线性薛定谔方程(NLSE)是光通信领域中常用的传输方程,广泛应用于光纤通信中交叉相位调制^[1]、四波混频^[2]和光孤子传输^[3]等领域的研究。通过 NLSE 的求解还可以模拟分析超连续谱(SC)的产生^[4~6],用于优化超连续谱光源的设计。求解 NLSE 有多种解析和数值解法,解析法包括逆射法、微扰法和变分法等,数值法包括有限差分法、有限元

法和分步傅里叶法(SSFM)等。然而 NLSE 一般情况下没有解析解,对其求解多采用数值方法。数值求解中 SSFM 是一种较常用的方法^[7],因为计算机求解时采用了快速傅里叶变换,在相同精度下有较快的计算速度。

在分步傅里叶算法中,需要仔细考虑沿光纤长度的步长、时间窗口以及时间分辨率的选取。时间窗口应该宽到能够容纳脉冲的所有部分,同时为满

收稿日期: 2011-02-04; **收到修改稿日期**: 2011-03-15

作者简介: 杨未强(1983—),男,博士研究生,主要从事光纤激光器及超连续谱方面的研究。

E-mail: yangweiqiang_001@126.com

导师简介: 刘泽金(1963—),男,教授,博士生导师,主要从事高能激光技术方面的研究。E-mail: zejinliu@vip.sina.com

足在较宽的谱带内研究问题,必须减小采样时间间隔。步长的选取决定了计算的精度,不恰当的步长选择可能会引起伪边带抖动^[8]和伪四波混频^[9]等失真现象,较小的步长选取可以提高精度,但是降低了计算的效率。论文介绍了一种时间窗口和步长动态自适应的计算方法^[10,11],该方法减少了计算量,提高了计算效率。

用计算机语言实现 SSFM 时还应注意正、逆傅里叶变换形式的选取,正逆傅里叶变换选取的不同造成时域和频域镜像对称变换,对于非对称的时域和频域分布将导致错误的结果^[12]。另外,在数值模拟时还应考虑如何由离散傅里叶变换的计算结果得到近似的连续频谱和时间波形^[13]。

本文介绍了分步傅里叶变法的原理、改进方案、数值计算时正、逆傅里叶变换如何选取以及如何由离散结果近似连续波形等问题,最后用改进的 SSFM 模拟了飞秒脉冲抽运光子晶体光纤(PCF)中 SC 的产生。

2 广义非线性薛定谔方程

光纤中脉冲演化的广义非线性薛定谔方程可表示为^[14]

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2}(\alpha + i\alpha_1 \frac{\partial}{\partial T})A + \sum_{m=2}^M i^{m-1} \frac{\beta_m}{m!} \frac{\partial^m A}{\partial T^m} = i(\gamma + i\gamma_1 \frac{\partial}{\partial T}) \left[A(z, T) \int_0^\infty R(T') |A(z, T - T')|^2 dT' \right], \quad (1)$$

式中 A 为脉冲包络迹, $T = t - z/v_g = t - \beta_1 z$ 表示延时系中的时间, α 是介质损耗系数, $\beta_m = (d^m \beta / d\omega^m)_{\omega=\omega_0}$ 表示各阶色散, ω_0 为脉冲中心频率, $\gamma = n_2 \omega_0 / (cA_{\text{eff}})$ 为非线性系数, n_2 为非线性折射率系数, A_{eff} 为有效模场面积, c 为光速。

非线性响应函数 $R(t)$ 同时包括电子贡献和原子核贡献,假设电子贡献几乎是瞬时的, $R(t)$ 函数可以写为

$$R(t) = (1 - f_R)\delta(t) + f_R h_R(t), \quad (2)$$

式中 $f_R = 0.18$ 表示延迟拉曼响应对非线性极化的贡献, $h_R(t)$ 为拉曼响应函数,其有用形式为

$$h_R(t) = \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 \tau_2} \exp(-t/\tau_2) \sin(t/\tau_1), \quad (3)$$

式中 τ_1 和 τ_2 是两个可调节的参量,模拟计算中常取 $\tau_1 = 1.22 \text{ fs}$, $\tau_2 = 32 \text{ fs}$ 。为提高数值模拟的精度,可使用由实际光纤的拉曼增益谱得到的拉曼响应函数 $h_R(t)$ 的时变曲线。

3 分步傅里叶算法

为方便分步傅里叶算法求解广义非线性薛定谔方程,将(1)式改为

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})A, \quad (4)$$

式中 \hat{D} 是微分算符,表示线性介质的色散和吸收; \hat{N} 是非线性算符,代表非线性效。和(1)式相比,这两个算子可表示为

$$\hat{D} = -\frac{1}{2}(\alpha + i\alpha_1 \frac{\partial}{\partial T}) - \sum_{m=2}^M i^{m-1} \frac{\beta_m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial T^m}, \quad (5)$$

$$\hat{N} = \frac{i}{A} (\gamma + i\gamma_1 \frac{\partial}{\partial T}) \times \left[A(z, T) \int_0^\infty R(T') |A(z, T - T')|^2 dT' \right], \quad (6)$$

(6)式中的积分项是两个函数的卷积,数值计算时可通过傅里叶变换和逆变换求解,用 Ω 表示积分项,则有

$$\Omega = \int_0^\infty R(T') |A(z, T - T')|^2 dT' = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}[R(T)] \mathcal{F}[|A(z, T)|^2] \}, \quad (7)$$

式中 \mathcal{F} 和 \mathcal{F}^{-1} 分别表示傅里叶正、逆变换。用 Ω 取代(6)式中的积分项,则(6)式可化为

$$\hat{N} = i\gamma \left\{ \Omega + \frac{i}{\omega_0 A} \frac{\partial}{\partial T} [A(z, T)\Omega] \right\}. \quad (8)$$

一般来说,沿光纤的长度方向色散和非线性是同时作用的。分步傅里叶方法假定在传输过程中,当传输距离很小时二者是独立作用的,从而得到一个近似结果。也就是说从 z 到 $z + h$ 可以分为两步: 1) 认为 $\hat{D} = 0$, 非线性算子单独作用; 2) 认为 $\hat{N} = 0$, 色散算子单独作用。图 1 表达了这种方法,该过程的数学表达式表示为

$$A(z + h, T) \approx \exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N}) A(z, T). \quad (9)$$

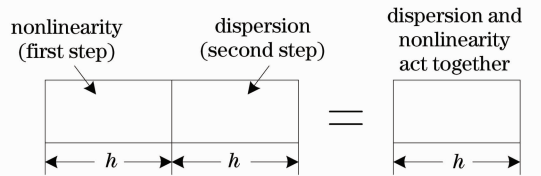


图 1 分步傅里叶方法示意图

Fig. 1 Schematic illustration of the split-step Fourier method

为改善分步傅里叶算法的精度,常采用对称分步傅里叶算法。如图 2 所示,该方法中非线性效应包含在小区间的中间而不是边界,从 z 到 $z + h$ 传输,光场仅在 $z + h/2$ 处乘以一个非线性项,以表示

整个区间 h 上的非线性效应,光场在前后的 $h/2$ 距离上传输只与色散有关。该过程用数学表达式表示为

$$A(z+h, T) \approx \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) \exp\left[\int_z^{z+h} N(z')dz'\right] \times \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) A(z, T). \quad (10)$$

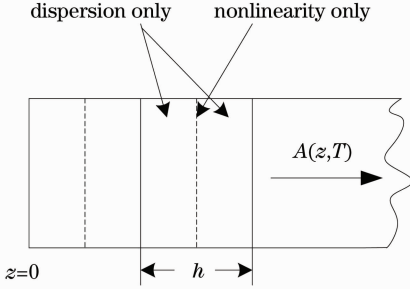


图 2 用于数值模拟的对称分步傅里叶方法示意图

Fig. 2 Schematic illustration of the symmetrized split-step Fourier method used for numerical simulations

4 动态自适应分步傅里叶变换

4.1 时间窗口自适应

在数值模拟中,时间窗口的选取必须满足其宽度可以容纳脉冲的所有部分,计算时一般先提前预判脉冲展宽的最大程度,设定一个固定的较宽的时间窗口。对于前期脉冲较窄后期脉冲较宽的传输情况,固定时间窗口的计算方法增加了计算量,降低仿真模型的计算效率。

时间窗口的调整是通过计算脉冲能量的扩散来确定的,如图 3 所示, T 为设定的时间窗口, T_{port} 为脉冲中间部分。传输过程中计算 T_{port} 部分区域内的脉冲能量,当该区域内的能量值与整个脉冲的能量值的比值超过阈值 g 时,自适应算法将时间窗口 T 与 T_{port} 都增加为原来的 2 倍,而采样时间间隔不变^[10]。比如:计算时可取 $T_{\text{port}} = 3T/4, g = 99.99$, 脉冲 A 的能量定义为

$$\|A\| = \left[\int |A(t)|^2 dt \right]^{1/2}, \quad (11)$$

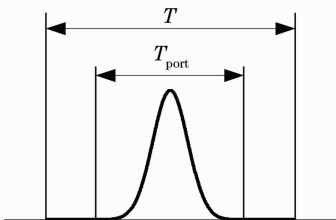


图 3 时间窗口 T 与 T_{port} 示意图

Fig. 3 Schematic illustration of time window T and T_{port}

数值计算时可以根据精度的要求调整 T_{port} 的比例以及阈值 g 的大小。

4.2 步长动态自适应

改进传统的分步傅里叶算法中固定步长的方案,采用一种可以根据系统精度要求自适应调整步长的算法^[11]。步长动态自适应的方法中,首先取步长为 $2h$,求出粗糙解 A_c ;然后取步长为 h ,求解两次得出精确解 A_f ;经步长 $2h$ 得到的解设为

$$A = \frac{4}{3}A_f - \frac{1}{3}A_c, \quad (12)$$

由粗糙解和精确解得到一个局部误差量

$$\delta = \frac{\|A_f - A_c\|}{\|A_f\|}, \quad (13)$$

设定误差参数 δ_g ,调整步长使局部误差保持在 $1/2\delta_g \sim \delta_g$ 之间,建立步长调整模型如下:

$$\begin{cases} h = h/2, & \delta > 2\delta_g \\ h = h/2^{1/3}, & \delta_g < \delta < 2\delta_g \\ h = h, & 1/2\delta_g < \delta < \delta_g \\ h = 2^{1/3}h, & \delta < 1/2\delta_g \end{cases} \quad (14)$$

式中当 $\delta > 2\delta_g$ 时视为误差较大项,将计算结果舍去。模拟计算时逐步累积步长,当达到计算长度时停止求解。

5 分步傅里叶变换的计算机实现

在利用计算机进行求解时应该注意正、逆傅里叶变换的选取和如何由离散傅里叶变换的计算结果得到近似频谱和时间波形。

5.1 傅里叶正、逆变换的选取

在非线性光学领域,光波场正、负频率表示的选取往往决定了正、逆傅里叶变换形式以及基本耦合波方程和非线性薛定谔方程的形式,而已知的非线性薛定谔方程是选取负频率表示的结果,因此正、逆傅里叶变换形式的选取不是任意的。在采用基于傅里叶变换数值方法求解非线性薛定谔方程时,要注意所用编程语言中快速傅里叶正、逆变换的形式。而在大多数编成语言中其快速傅里叶正、逆变换形式与非线性光学中应采用的傅里叶变换形式恰好相反,因此时而出现一些错误的计算结果^[12]。

已知在单模光纤中如果忽略横向分布,一个中心频率为 ω_0 的准单色光波可以表示为

$$E(z, t) = A(z, t) \exp(\pm i\omega_0 t), \quad (15)$$

式中 \pm 为正频率或负频率表示, $A(z, t)$ 为光波的包络函数。若光波选取负频率表示则对应的傅里叶正、逆变换形式为

$$\tilde{A}(z, \Delta\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(z, t) \exp(i\Delta\omega t) dt, \quad (16)$$

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(z, \Delta\omega) \exp(-i\Delta\omega t) d\Delta\omega, \quad (17)$$

而常规的傅里叶正、逆变换如下:

$$\tilde{A}(z, \Delta\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(z, t) \exp(-i\Delta\omega t) dt, \quad (18)$$

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(z, \Delta\omega) \exp(i\Delta\omega t) d\Delta\omega, \quad (19)$$

式中 $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, 即将频域空间的坐标原点移到 ω_0 。可见, 若光波选取负频率表示, 则傅里叶变换形式与常规不同, 不同点在于指数因子项, 正、逆变换的指数因子项刚好相反。如果光波的表达式中选择正频 $\exp(i\omega_0 t)$, 则傅里叶变换和常规形式相同。

计算时如果不注意正负傅里叶变换的选取将导致错误的结果。正逆傅里叶变换的不同相当于正负频率表示选取的不同, 正逆傅里叶变换选取不同造成时域和频域镜像对称变换。对于脉冲时域和频域分布对称, 其镜像对称没有变化, 此时正、逆傅里叶选取不会对结果造成影响, 但是如果时域和频域分布不是对称的将会出现错误。

5.2 近似频谱和时间波形

离散的傅里叶变换计算的结果并不能直接表示连续的时域和频域波形, 其转换需要乘以相应的系数, 在进行傅里叶变换计算时应注意以下两点^[13]:

1) 对一个时间有限的连续信号进行傅里叶分析。求得离散傅里叶变换后将计算结果乘以系数 T_s (采样时间间隔), 即可得到其近似频谱;

2) 由频谱合成的波形。如果已知某信号的频谱在正、负频率范围内共占据频带 f_s , 利用离散傅里叶逆变换计算的结果乘以系数 f_s 即可获得其近似的时间波形。

由于计算机只能进行离散处理, 所以必须将所求解的方程离散化处理, 进行离散傅里叶变换 (DFT) 和离散傅里叶逆变换 (IDFT) 运算。DFT 和 IDFT 的算法如下: 设有限长序列 $x(n)$ 长度为 N (在 $0 \leq n \leq N-1$ 范围内), 其离散傅里叶变换 $X(k)$ 仍然是一个长度为 N (在 $0 \leq k \leq N-1$ 范围内) 的频域有限长序列, $X(k)$ 对应的角频率为 $\omega(k) = 2\pi k / (NT_s)$ ($0 \leq k \leq N-1$), 其中 T_s 是序列的采样时间间隔。正、逆变换的关系式为

$$X(k) = \mathcal{F}_d[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \times \exp(-j2\pi kn/N) \quad (0 \leq k \leq N-1), \quad (20)$$

$$x(n) = \mathcal{F}_d^{-1}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \times \exp(j2\pi kn/N) \quad (0 \leq n \leq N-1). \quad (21)$$

直接使用 (20), (21) 式运算速度很慢, 所以实际计算时, 通常采用快速傅里叶变换 (FFT) 和快速傅里叶逆变换 (IFFT) 进行计算。结合上一部分的分析, 光波选取负频率表示, 则正、逆傅里叶变换的 Matlab 语言应该为

```
A_f=fftshift[ifft(A_t)] * N * T_s;
%正变换, N 为采样点数
A_t=fftshift{fft[ifftshift(A_f)]}/N/T_s;
%逆变换, T_s 为采样时间间隔
```

6 优化的分步傅里叶算法模拟超连续谱的产生

利用优化的分步傅里叶算法, 文献 [5] 中的参数, 模拟飞秒脉冲抽运光子晶体光纤超连续谱的产生。光纤长度为 15 cm, 零色散波长为 780 nm, 非线性系数为 $\gamma = 0.11 \text{ W}^{-1} \text{ m}^{-1}$ 。抽运为无啁啾的双曲正割脉冲, 波长为 835 nm, 其峰值功率为 10 kW, 脉冲半宽度 (在峰值强度的 $1/e$ 处) 为 $T_0 = 28.4 \text{ fs}$, 脉冲半峰全宽为 (在峰值强度的 $1/2$ 处) 为 50 fs, 抽运波长处的色散参量值 $\beta_2 \sim \beta_{10}$ (单位为 ps^m/km , 其中 m 为色散的阶数) 分别为 $-11.83, 8.1038 \times 10^{-2}, -9.5205 \times 10^{-5}, 2.0737 \times 10^{-7}, -5.3943 \times 10^{-10}, 1.3486 \times 10^{-12}, -2.5495 \times 10^{-15}, 3.0524 \times 10^{-18}, -1.7140 \times 10^{-21}$ 。

计算结果如图 4 所示, 脉冲经历了一个初始压缩阶段, 这是高阶孤子的普遍特征, 但其频谱因 SPM 被展宽。然后再传输约 1 cm 之后, 孤子由于受到高阶色散和非线性效应引起的扰动而产生分裂, 脉冲分裂为多个基阶孤子。在 $z=1 \text{ cm}$ 处, 频谱有了质的变化, 演变为典型的超连续谱。从计算结果可以看出, 传输距离在 2 cm 之前脉冲展宽较小, 此时可以设定较小的时间窗口提高计算速度, 2 cm 之后脉冲加速展宽, 此时时间窗口动态增大。和传统的计算方法相比, 时间窗口和步长的动态自适应提高了计算效率。

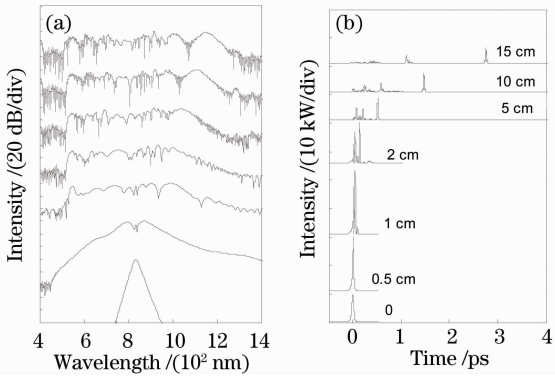


图 4 峰值功率为 10 kW 的 50 fs 脉冲入射到 15 cm 长的 PCF 后的(a)频域演化,(b)时域演化

Fig. 4 (a) Spectral and (b) temporal evolution of a 50 fs pulse launched with 10 kW peak power into a 15-cm-long PCF

在相同的计算设备和计算精度下,获得和图 4 相同的计算结果,传统算法和改进算法在计算时间上的比较如表 1 所示。传统的分步傅里叶计算方法中,时间窗口为一固定值,为保证正确的计算结果必须设置较大的初始时间窗口,这必然降低仿真模型的计算效率。因此,在时间窗口的选择上传统算法显然不如改进算法。在步长的选择上,传统算法采用固定步长方案,如果初始步长选择过大,则可能由于计算精度较差而得到错误的仿真结果。而改进算法采用步长动态自适应方案,如果初始步长选择过大,则可根据计算精度动态调整步长,但在步长调整时需多次求解,然后进行误差比较,增加了计算量。为保证得到相同的计算结果,在做计算时间对比时,表 1 中传统算法采用时间窗口动态自适应方案,但是步长为固定值,其初始步长大小为改进算法中的最小步长。

表 1 传统算法和改进算法计算时间的比较

Table 1 Comparison of calculation time between traditional and improved methods

Fiber length /cm	Calculation time /s	
	Traditional method	Improved method
0.5	0.8694	0.1660
1	1.7000	0.4434
2	3.3590	0.7445
5	12.8174	1.8226
10	43.1116	5.8589
15	90.6777	16.1268

从表 1 的计算时间对比结果中可以看出,改进算法的计算效率明显优于传统算法。改进算法虽然

在步长动态调整时增加了计算步骤,但是通过步长调整减少了总的计算量,在保证精度的前提下缩短了计算时间,有效地提高了计算效率。

7 结 论

介绍了一种改进的动态自适应算法。改进的算法不需要预先估计时间窗口,可根据脉冲扩散情况进行动态调整,避免了预设窗口过大带来的计算量过大问题。算法通过局部误差的判断动态调整步长,在保证精度的同时提高了计算效率。讨论了如何正确选取傅里叶变换的形式,分析了离散傅里叶计算结果与连续波形的转换关系,给出了数值计算时正、逆傅里叶变换对应的 Matlab 语言。最终用改进的 SSFM 模拟了飞秒脉冲抽运 PCF 中 SC 的产生,并对比分析了传统算法和改进算法的计算时间。计算结果与文献报道相同,验证了算法的正确性。传统算法和改进算法计算时间的对比结果表明,改进算法在保证精度的前提下有效地提高了计算效率。

参 考 文 献

- Herrera, F. Ramos, J. Marti. Small-signal analysis of wavelength converters based on cross-phase modulation in dispersion-shifted fibers [J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 2005, **17**(11): 2370~2372
- Yongzhong Li, Liejia Qian, Daquan Lu *et al.*. Ultrafast four-wave mixing in single-pumped fibre optical parametric amplifiers [J]. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 2006, **8**(8): 689~694
- W. L. Kath, N. F. Smyth. Soliton evolution and radiation loss for the nonlinear Schrödinger equation [J]. *Phys. Rev. E*, 1995, **51**(2): 1484~1492
- Cui Xiuyan, Zhao Jianlin, Yang Dexing *et al.*. Simulation of supercontinuum generation by using modified split-step Fourier algorithm [J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(8): 2046~2051
崔秀艳, 赵建林, 杨德兴等. 利用改进的分步傅里叶算法模拟超连续谱的产生 [J]. *中国激光*, 2009, **36**(8): 2046~2051
- J. M. Dudley, G. Genty, S. Coen. Supercontinuum generation in photonic crystal fiber [J]. *Rev. Mod. Phys.*, 2006, **78**(4): 1135~1184
- Chen Yongzhu, Li Yuzhong, Qu Gui *et al.*. Numerical research of flat wide band supercontinuum generation in anomalous dispersion-flattened fibers [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(2): 717~722
陈泳竹, 李玉忠, 屈圭等. 反常色散平坦光纤产生平坦宽带超连续谱的数值研究 [J]. *物理学报*, 2006, **55**(2): 717~722
- Zhao Lei, Sui Zhan, Zhu Qihua *et al.*. Improvement and precision analysis of the split-step Fourier method in solving the general nonlinear Schrödinger equation [J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(7): 4731~4737
赵磊, 隋展, 朱启华等. 分步傅里叶法求解广义非线性薛定谔方程的改进及精度分析 [J]. *物理学报*, 2009, **58**(7): 4731~4737
- F. Matera, A. Mecozzi, M. Romagnoli *et al.*. Sideband instability induced by periodic power variation in long-distance fiber links [J]. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(18): 1499~1501

- 9 G. Bosco, A. Carena, V. Curri *et al.*. Suppression of spurious tones induced by the split-step method in fiber systems simulation [J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 2000, **12**(5): 489~491
- 10 Luo Jiang, Luo Bin, Pan Wei *et al.*. A dynamic and adaptable split-step Fourier method and it's application in the optical fiber transmission model [J]. *Laser Journal*, 2006, **27**(3): 46~48
罗江, 罗斌, 潘炜等. 动态自适应分步傅里叶算法及其在光纤传输模型中的应用[J]. *激光杂志*, 2006, **27**(3): 46~48
- 11 O. V. Sinkin, R. Holzner, J. Zweck *et al.*. Optimization of the split-step Fourier method in modeling optical-fiber communications systems [J]. *J. Lightwave Technol.*, 2003, **21**(1): 48~61
- 12 Zhang Xiaoguang, Yang Bojun, Yu Zhongyuan. Discussion on the choice of the Fourier transformation form in numerical solutions of nonlinear Schrödinger equation [J]. *Chinese J. Computational Physics*, 2003, **20**(3): 267~272
张小光, 杨伯君, 俞重远. 非线性薛定谔方程数值解法中傅里叶正逆变换选取的讨论[J]. *计算物理*, 2003, **20**(3): 267~272
- 13 Zheng Junli, Ying Qiheng, Yang Weili. *Signal and System (II)* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2000. 150~151
郑君里, 应启珩, 杨为理. *信号与系统(下册)*[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000. 150~151
- 14 G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*, 4th edition [M]. San Diego: Academic Press, 2007. 36~47