

# 非线性 Tavis-Cummings 模型的 Berry 相位

廖浩祥 王发强 黄曙亮 陈振宇 梁瑞生

(华南师范大学信息光电子科技学院广东省光子信息技术实验室, 广东 广州 510006)

**摘要** 提出了一种两个二能级原子与单模非线性光场相互作用的非线性 Tavis-Cummings 模型, 分析了它与其他腔量子电动力学(QED)模型之间的关系, 解析求解了此量子系统的本征能量和 Berry 相位, 并利用数值模拟研究了它们随系统参数的变化关系。结果表明, 它们与原子间的偶极相互作用、原子和光场的耦合系数以及非线性耦合系数有关。而且, 光场的非线性耦合作用对 Berry 相位的影响随光场的光子数的增加而变强。

**关键词** 量子光学; 非线性 Tavis-Cummings 模型; Berry 相位; 数值模拟

**中图分类号** O431.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.s100506

## Berry Phase in Nonlinear Tavis-Cummings Model

Liao Haoxiang Wang Faqiang Huang Shuliang Chen Zhenyu Liang Ruisheng

(Laboratory of Photon Information Technology, School of information and Photoelectric Science and Engineering, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510006, China)

**Abstract** A nonlinear Tavis-Cummings model describing interaction of two atoms with a single mode nonlinear field is presented. The relation between it and other cavity quantum electrodynamics (QED) model is analyzed. Berry phase and eigenvalues of this quantum system are evaluated explicitly, and how they change with system parameters is studied by numerical simulation. The results show that they relate to the dipole-dipole coupling strength between two atoms and atom-field coupling constant and nonlinear coefficient of field. Besides, the influence on Berry phase of nonlinear coupling effect increases with the addition of the number of the photon.

**Key words** quantum optics; nonlinear Tavis-Cummings model; berry phase; numerical simulation

**OCIS codes** 270.5580; 270.5585; 190.0190

## 1 引 言

几何相位是现代量子物理学的一个非常重要的课题, 被认为是实现量子计算中的逻辑门最有可能的途径。从 Berry 于 1984 年发现绝热回复系统中的几何相位<sup>[1]</sup>开始, 量子系统的 Berry 相位得到了广泛的研究<sup>[2~6]</sup>, 并在实验系统中被观察到<sup>[7~9]</sup>, 成为量子信息领域中的基本资源, 但在众多的应用中还有许多未知的问题和未能实现的实验, 所以对于几何相位在各种量子系统的演化性质的研究就成为一种迫切的需要。

腔量子电动力学(QED)是一个非常重要的实现量子信息和量子计算进程的量子系统, Jaynes-

Cummings 模型<sup>[10]</sup>描述了一个二能级原子与单模光场的相互作用, 是原子与光场相互作用最基本的一个腔 QED 模型。通过研究这个模型, 得到了许多理论研究成果并得到了实验的证明。本文将 Jaynes-Cummings 模型推广到更为普遍的情况, 提出了一种新的非线性 Tavis-Cummings 模型, 并对这个量子系统的 Berry 几何相位进行研究。

## 2 非线性 Tavis-Cummings 模型

基本的 Jaynes-Cummings 模型的哈密顿量可以写成<sup>[10]</sup>

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2} \sigma^z + \lambda[\hat{a} \sigma^+ + \hat{a}^\dagger \sigma^-], \quad (1)$$

收稿日期: 2010-08-10; 收到修改稿日期: 2010-11-28

基金项目: 国家 973 计划(2007CB307001)和广东省科技计划项目(2007B010400066)资助课题。

作者简介: 廖浩祥(1984—), 男, 硕士研究生, 主要从事量子光学量子信息方面的研究。E-mail: haoxiangliao@126.com

导师简介: 王发强(1968—), 男, 博士, 教授, 主要从事量子光学量子信息方面的研究。E-mail: fqwang@scnu.edu.cn

(通信联系人)

式中  $\omega_0$  是两原子的本征跃迁频率, 假设  $|e\rangle$  和  $|g\rangle$  分别是二能级原子的激发态和基态, 则  $\sigma^z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ ,  $\sigma^+ = |e\rangle\langle g|$ ,  $\sigma^- = |g\rangle\langle e|$  分别是原子的反转算符、上升算符、下降算符。 $\omega$  是光场的频率,  $a^+$  和  $a$  是光场的产生和湮没算符,  $\lambda$  是光场和原子之间的耦合强度系数, 目前, 这个模型已经被推广成为更为普遍的情况, 如

1) Buck-Sukumar 模型<sup>[11,12]</sup>, 它的哈密顿量为

$$\hat{H} = \omega a^+ a + \frac{\omega_0}{2} \sigma^z + \lambda [\sqrt{a^+ a} a \sigma^+ + a^+ \sqrt{a^+ a} \sigma^-], \quad (2)$$

2) Kerr-nonlinearity 模型<sup>[13~15]</sup>, 它的哈密顿量是

$$\hat{H} = H_{\text{JC}} + \chi a^+ a a^+ a. \quad (3)$$

3) 非线性 Jaynes-Cummings 模型<sup>[16,17]</sup>, 其哈密顿量的普遍形式具有如下形式

$$\hat{H} = \omega a^+ a + \frac{\omega_0}{2} \sigma^z + \lambda [f(a^+ a^-) a \sigma^+ + \text{adjoint}], \quad (4)$$

式中  $f(a^+ a^-)$  是关于光子数算符的函数, 包含了原子的位置影响耦合系数强度的信息。当  $f(a^+ a^-) = 1$  时, (4) 式即是基本的 Jaynes-Cummings 模型的哈密顿量, 当  $f(a^+ a^-)$  取其他值的时候, (4) 式都被称为非线性 Jaynes-Cummings 模型的哈密顿量。

4) Tavis-Cummings 模型<sup>[18]</sup>

Tavis-Cummings 模型描述的是两个二能级原子与单模光场相互作用的系统, 两个原子间的距离小于光场的波长, 因而原子间的偶极相互作用不可忽略, 此时系统的哈密顿量可以写为

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{in}}, \\ \hat{H}_0 &= \omega a^+ a + \frac{\omega_0}{2} (\sigma_1^z + \sigma_2^z), \\ \hat{H}_{\text{in}} &= \lambda [a (\sigma_1^+ + \sigma_2^+) + a^+ (\sigma_1^- + \sigma_2^-)] + J \sigma_1^+ \sigma_2^- + J \sigma_2^+ \sigma_1^-, \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $\sigma_i^z$ ,  $\sigma_i^+$  和  $\sigma_i^-$  分别是第  $i$  ( $i = 1, 2$ ) 个原子的反转算符、上升算符、下降算符,  $J$  代表两个原子之间的偶极相互作用。

本文在 Tavis-Cummings 模型的基础上提出一种新的非线性 Tavis-Cummings 模型, 描述了两个二能级原子与带有 Kerr 物质的非线性光场的相互作用, 则它的相互作用哈密顿量由(1)式修正为

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{in}} &= \lambda [f(a^+ a^-) a (\sigma_1^+ + \sigma_2^+) + a^+ f(a^+ a^-) (\sigma_1^- + \sigma_2^-)] + J \sigma_1^+ \sigma_2^- + J \sigma_2^+ \sigma_1^- + \chi a^+ a a^+ a, \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\chi$  是 Kerr 非线性系数, 为了将这个模型的哈密

顿量能被解析地求解<sup>[19,20]</sup>, 选择  $f(a^+ a^-)$  的一种特殊形式,  $f(a^+ a^-) = \sqrt{1 + \kappa a^+ a}$  ( $0 \leq \kappa \leq 5$ )。令  $\kappa = \chi/\omega$ ,  $K^+ = a^+ \sqrt{1 + \kappa a^+ a}$ ,  $K^- = \sqrt{1 + \kappa a^+ a} a$ , 则非线性 Tavis-Cummings 模型的哈密顿量可写成

$$\hat{H} = \omega K^+ K^- + \frac{\omega_0}{2} (\sigma_1^z + \sigma_2^z) + \lambda [K^- (\sigma_1^+ + \sigma_2^+) + K^+ (\sigma_1^- + \sigma_2^-)] + J \sigma_1^+ \sigma_2^- + J \sigma_2^+ \sigma_1^-. \quad (7)$$

算符  $K^+ = a^+ \sqrt{1 + \kappa a^+ a}$  和  $K^- = \sqrt{1 + \kappa a^+ a} a$  分别是非线性光场的产生和湮灭算符, 它们满足以下的对易关系<sup>[19,20]</sup>,

$$\begin{aligned} [K, K^+] &= 2K^0, \quad [K^0, K^+] = \kappa K, \\ [K^0, K] &= -\kappa K^+, \end{aligned} \quad (8)$$

式中  $K^0 = \kappa a^+ a + 1/2$ 。因此,  $\{K, K^+, K^0\}$  构成了封闭的代数空间, 当  $\kappa = 0$  时, 它退化成 Heisenberg-Weyl 代数空间  $\{a, a^+, I\}$ 。而当  $\kappa = 1$  时, 它成为  $SU(1,1)$  代数空间。

$\kappa$  称为光场的非线性耦合系数, 它是非负的, 但事实上, 当  $\kappa = -1$  时,  $K^+$  和  $K$  即是著名 Holstein-Primakoff 旋转算符<sup>[21]</sup>。可以看到, 当  $\kappa = 0$  时, (7) 式即是普通的 Tavis-Cummings 模型的哈密顿量<sup>[18]</sup>。当  $\kappa$  足够小, 使得  $\kappa[a^+ a]$  项被忽略  $\{\kappa[a^+ a] \leq 1\}$ , 而  $\kappa[a^+ a a^+ a]$  项被保留, (7) 式变成了充满 Kerr 介质的 Tavis-Cummings 模型的哈密顿量<sup>[22]</sup>。如果光场的有效光子数足够大, 使得  $\kappa[a^+ a] \geq 1$ , 此时哈密顿量(7)式近似于双原子 Buck-Sukumar 模型哈密顿量<sup>[11]</sup>。

### 3 模型的本征能量和 Berry 相位

选取希尔伯特 (Hilbert) 空间  $|n, e_1, e_2\rangle$ ,  $|n+1, e_1, g_2\rangle$ ,  $|n+1, g_1, e_2\rangle$  和  $|n+2, g_1, g_2\rangle$  作为计算基矢, 则哈密顿量(4)式在此基矢上的矩阵可表示为(在近似相互作用绘景中),

$$H = \begin{bmatrix} \mu^2 \Delta & \mu & \mu & 0 \\ \mu & 0 & 2J & \beta \\ \mu & 2J & 0 & \beta \\ 0 & \beta & \beta & -\mu^2 \Delta \end{bmatrix}, \quad (9)$$

式中  $\mu = \lambda \sqrt{(1 + \kappa n)(n+1)}$ ,  $\Delta = \omega - \omega_0$  是光场的频率失谐量,  $\beta = \lambda \sqrt{[1 + \kappa(n+1)](n+2)}$ 。

由(9)式可以解析地求得瞬时的本征能量  $E_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) 和对应的本征态  $|\psi_j\rangle$ , 为了简便起见, 将其写成

$$|\psi_j\rangle = a_j |n, e_1, e_2\rangle + b_j |n+1, e_1, g_2\rangle + c_j |n+1, g_1, e_2\rangle + d_j |n+2, g_1, g_2\rangle, \quad (10)$$

式中  $a_j, b_j, c_j, d_j$  为归一化系数, 满足条件

$$a_j^2 + b_j^2 + c_j^2 + d_j^2 = 1.$$

采用文献[23]和[24]的方法计算 Berry 相位。首先, 引进如下的变换

$$R(t) = \exp[-i\varphi(t)\hat{a}^+ \hat{a}], \quad (11)$$

式中  $\varphi(t) = \omega_0 t$  能被绝热地和周期性地改变。利用(8)式, 可以得到变换  $|\psi_j(t)\rangle = R(t)|\psi_j\rangle$ ,  $|\psi_j\rangle = R^+(t)|\psi_j(t)\rangle$ , 因此量子系统的 Berry 相位可以由下式计算得到

$$\begin{aligned} \gamma_j &= i \int_0^T \langle \psi_j(t) | \frac{d}{dt} | \psi_j(t) \rangle dt = \\ &= i \int_0^{2\pi} \langle \psi_j(\varphi) | \frac{d}{d\varphi} | \psi_j(\varphi) \rangle d\varphi = \\ &= i \int_0^{2\pi} \langle \psi_j | R^+(\varphi) \frac{d}{d\varphi} R(\varphi) | \psi_j \rangle d\varphi, \quad (12) \end{aligned}$$

因此利用(7)式, 可以得到本文模型的 Berry 相位

$$\gamma_j = 2\pi[n|a_j|^2 + (n+1)(|b_j|^2 + |c_j|^2) + (n+2)|d_j|^2]. \quad (13)$$

## 4 数值模拟与讨论

首先, 讨论本征能量随非线性系数  $\kappa$  和光场失谐量  $\Delta$  的变化关系。图 1 画出了不同原子偶极相互作用下和不同光子数下的本征能量随光场非线性系数  $\kappa$  和光场失谐量  $\Delta$  的变化关系。对比图 1(a), (b), 可以发现当两个原子之间不存在偶极相互作用  $J=0$  的时候, 本征能量具有非常好的关于  $\Delta=0$  处直线的对称性。但随着两个原子的偶极相互作用的加强, 本征能量的值也在增大, 并且最低处由  $\Delta=-2$  处变成了  $\Delta=-1/2$  处, 两个原子的偶极相互作用破坏了本征能量随失谐量变化的对称性。另外, 当系统处于基态( $n=0$ )时无论是否存在偶极作用, 非线性系数  $\kappa$  对本征能量基本没有什么影响, 这是因为非线性耦合作用与光场的光子数有关。下面的 Berry 相位的演化规律同样证明了这一点。由图 1(c) 可以看到, 当光子数  $n=4$  时, 非线性耦合系数  $\kappa$  越大, 本征能量下降得越厉害, 因为原子与非线性光场的作用比不存在非线性作用的时候强烈。

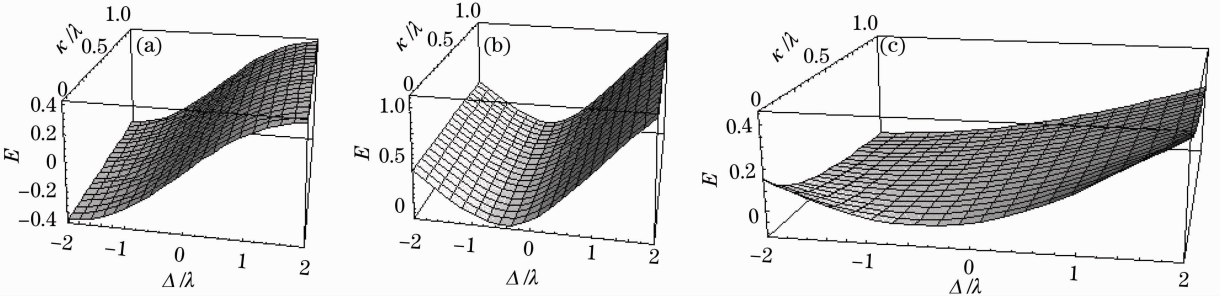


图 1 本征能量的演化曲线( $\lambda=1, \Delta=-1$ )。 (a)  $n=0, J=0$ , (b)  $n=0, J=1$ , (c)  $n=4, J=1$

Fig. 1 Evolution curves of eigenvalues ( $\lambda=1, \Delta=-1$ ). (a)  $n=0, J=0$ , (b)  $n=0, J=1$ , (c)  $n=4, J=1$

其次, 研究量子系统的 Berry 相位随非线性系数  $\kappa$  的变化关系。图 2 给出了不同的原子与光场耦合系数作用下和不同光子数下的 Berry 相位随非线性系数  $\kappa$  的变化关系。由图 2(a), (b) 可以看出, 当光场与原子的耦合系数远大于两个原子之间的偶极作用, 即光场处于强耦合( $\lambda \geq J$ )时, Berry 相位最终会趋近一个值。但因为光场的非线性耦合作用与光场的光子数有关, 光场的光子数不同, 其演化曲线也有区别。可以发现, 当  $n=0$ [图 2(a)]时, 在  $\kappa$  比较小( $0 < \kappa < 0.2$ )的范围内, 出现 Berry 相位随  $\kappa$  的变大而降低, 这是由于当非线性耦合作用不强时, 原子之间偶极作用会影响 Berry 相位的演化。当  $\kappa > 0.2$  范围才出现随  $\kappa$  的变大而升高的现象。而当  $n=5$ [图 2(b)]时, 光场的非线性耦合作用在  $\kappa$  比较小时已经足够强, 因此不会出现随  $\kappa$  的变大而降低的趋

势。弱耦合强度作用下的 Berry 相位演化规律在图 2(c), (d) 中画出, 同样的, 当  $n=0$  时, 原子间的耦合相互作用远远大于光场的非线性耦合作用, 因此出现了 Berry 相位随  $\kappa$  的变大而降低, 而当  $n=5$  时, 在  $\kappa$  比较小时, 原子间的偶极作用对 Berry 相位的演化的影响导致 Berry 相位随  $\kappa$  变大而降低。

最后, 讨论量子系统的 Berry 相位随原子与光场耦合系数  $\lambda$  变化关系。图 3 给出了不同非线性系数  $\kappa$  作用下的 Berry 相位随原子与光场耦合系数  $\lambda$  和不同光子数下的变化关系。强非线性耦合作用的情况下( $\kappa \geq J$ ), 当光场的光子数为零时[图 3(a)], Berry 相位的变化随  $\lambda$  从零开始先增后减, 到达最低点后再不断变大。当光子数不为零的情况[图 3(b)], Berry 相位随  $\lambda$  从零迅速变成  $2\pi$ , 并且之后维持  $2\pi$  不变, 这给实现量子计算的量子相位门

提供一个可能的途径。弱非线性耦合作用情况在图 3(c),(d)画出,可以看到,在相同的原子与光场耦合系数的情况下, $n=0$  时 Berry 相位比  $n=5$  时

要小得多,这是由于非线性耦合作用影响了系统演化获得的 Berry 相位。

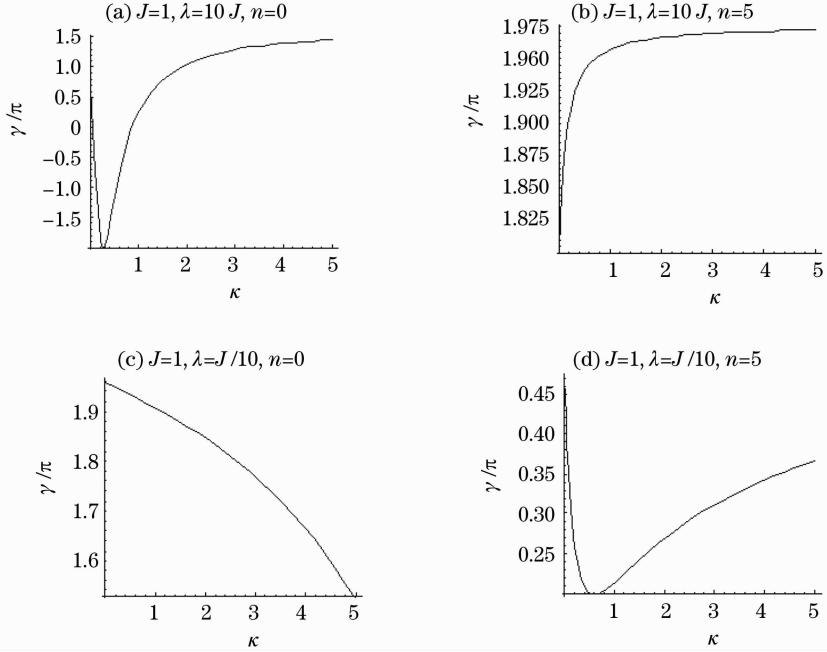


图 2 Berry 相位随非线性系数  $\kappa$  的变化曲线( $\Delta=-1$ )

Fig. 2 Evolution curves of Berry phase with  $\kappa(\Delta=-1)$

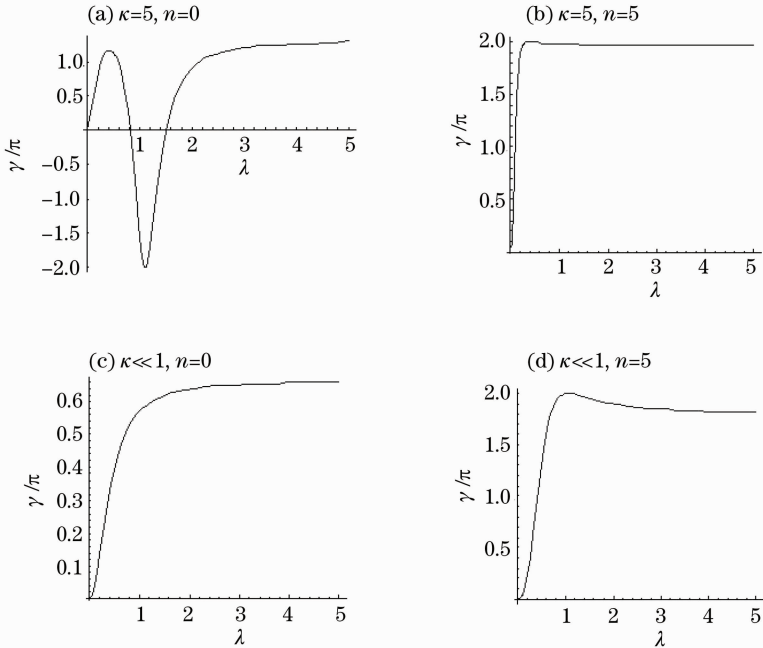


图 3 Berry 相位随原子与光场耦合系数  $\lambda$  的变化曲线( $J=1, \Delta=-1$ )

Fig. 3 Evolution curves of Berry phase with  $\lambda(J=1, \Delta=-1)$

## 5 结 论

提出了一种新的双原子与光场作用的非线性

Tavis-Cummings 模型,并通过求解该量子系统的本征能量和本征态,研究了本征能量和模型获得的

Berry 相位随参数演化的情况。结果表明,系统的本征能量只在系统不处于基态( $n \neq 0$ )时受非线性耦合系数  $k$  的影响,随  $k$  变大而降低。而 Berry 相位随参数的演化可以看成是原子与光场的非线性耦合作用与双原子偶极作用相互竞争的结果,分为两种情况,强耦合时先减后增,弱耦合时随增大而变小。总之,系统的 Berry 相位的演化与原子间的偶极相互作用、原子和光场的耦合系数以及非线性耦合系数有关,使得 Berry 相位呈现丰富而复杂的变化。

### 参 考 文 献

- 1 M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes [J]. *Proc. R. Soc. A*, 1984, **392**(3): 45~47
- 2 A. Shapere, F. Wilczek. Geometric Phase in Physics [M]. Singapore: World Scientific, 1989
- 3 K. M. Fonseca Romero, A. C. Aguiar Pinto, M. T. Thomaz. Berry's phase in the presence of a dissipative medium [J]. *Physica A*, 2002, **307**(4): 142~156
- 4 Chen Jumei, Fang Maofa. Effects of the motion of atomic mass centre and field mode structure on dynamics of field phase [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(7): 890~895  
陈菊梅, 方卯发. 原子质心运动和场模结构对场相位动力学的影响[J]. *光学学报*, 2000, **20**(7): 890~895
- 5 C. F. Li, G. C. Guo. Conditions for the existence of non-zero geometric phase and its formula [J]. *Acta Physica Sinica*, 1996, **45**(6): 897~903  
李春芳, 郭光灿. 非零几何相存在的条件及其计算公式[J]. *物理学报*, 1996, **45**(6): 897~903
- 6 Li Bozhang, Zhang Degang, Wu Jianhua *et al.*. Bloch theorem for the evolution of state in the cyclic quantum system and the unification of resonant geometric phase[J]. *Acta Physica Sinica*, 1997, **46**(2): 227~237  
李伯臧, 张德刚, 吴建华等. 循环量子系统中状态演化的 Bloch 定理和同步几何相位的统一[J]. *物理学报*, 1997, **46**(2): 227~237
- 7 D. Suter, K. T. Mueller, A. Pines. Study of the aharonov-anandan quantum phase by NMR interferometry [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, **60**(13): 1218~1220
- 8 R. Bhandari, J. Samuel. General setting for Berry's phase [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, **60**(23): 2339~2342
- 9 P. G. Kwiat, R. Chiao. Observation of a nonclassical Berry's phase for the photon [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66**(5):

- 588~591
- 10 E. T. Jaynes, F. W. Cummings. Quantum and semiclassical radiation theories [J]. *Proc. of the IEEE*, 1963, **51**(1): 89~109
- 11 B. Buck, C. V. Sukumar. Exactly soluble model of atom-phonon coupling showing periodic decay and revival [J]. *Phys. Lett. A*, 1981, **81**(2-3): 132~135
- 12 C. C. Gerry. Jaynes-Cummings model with intensity-dependent coupling interacting with Holstein-Primakoff SU(1,1) coherent state[J]. *Phys. Rev. A*, 1998, **39**(6): 3196~3199
- 13 M. J. Werner, H. Risken. Quasiprobability distributions for the cavity-damped Jaynes-Cummings model with an additional Kerr medium [J]. *Phys. Rev. A*, 1991, **44**(7): 4623~4632
- 14 P. Gora, C. Jedrzejek. Nonlinear Jaynes-Cummings model [J]. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(9): 6816~6828
- 15 A. Joshi, R. R. Puri. Dynamical evolution of the two-photon Jaynes-Cummings model in a Kerr-like medium [J]. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(7): 5056~5060
- 16 W. Vogel, de Matos Filho. Nonlinear Jaynes-Cummings dynamics of a trapped ion [J]. *Phys. Rev. A*, 1995, **52**(5): 4214~4217
- 17 J. Lie, Y. Wang. Motion-quantized Jaynes-Cummings models with an arbitrary intensity-dependent medium [J]. *Phys. Rev. A*, 1996, **54**(3): 2326~2333
- 18 M. Tavis, F. W. Cummings. Exact solution for an N molecule radiation field Hamiltonian [J]. *Phys. Rev.*, 1968, **170**(2): 379~384
- 19 S. Sivakumar. Interpolating coherent states for Heisenberg Weyl and single-photon SU(1,1) algebras [J]. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2002, **35**(31): 6755~6766
- 20 S. Sivakumar. Nonlinear Jaynes-Cummings model of atom-field interaction [J]. *Int. J. Theor. Phys.*, 2004, **43**(12): 2405~2421
- 21 Vladimir Buzek. Jaynes-Cummings model with intensity-dependent coupling interacting with Holstein-Primakoff SU(1,1) coherent state [J]. *Phys. Rev. A*, 1989, **39**(6): 3196~3199
- 22 Jun-Mao Ma, Zhi-Yong Jiao, Ning Li. Quantum entanglement in two-photon tavis-cummings model with a Kerr nonlinearity [J]. *Int. J. Theor. Phys.*, 2007, **46**(10): 2550~2559
- 23 I. Fuentes-Guridi, A. Carroll, S. Bose *et al.*. Vacuum induced spin-1/2 Berry's phase [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, **89**(22): 220404
- 24 A. Arollo, I. Fuentes. Guridi, M. France Santos *et al.*. Spin-1/2 geometric phase driven by decohering quantum fields [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **92**(2): 020402