

共焦点介质镀层理想导体椭球对高斯波束的散射

王海华¹ 孙贤明^{1*} 申 晋¹ 刘 伟¹ 张华永²

(¹山东理工大学电气与工程学院, 山东 淄博 255049)
(²安徽大学电子科学与技术学院, 安徽 合肥 230039)

摘要 提出了一种求解共焦镀层理想导体椭球粒子对任意角度入射高斯波束散射的解析方法。利用椭球矢量波函数把入射和散射电磁场展开, 待求的展开系数由适当的边界条件推出的线性方程组确定。对于理想导体和镀层理想导体椭球粒子, 给出了归一化微分散射截面的数值计算结果, 并讨论了其散射特性。

关键词 散射; 高斯波束; 镀层椭球; 归一化微分散射截面

中图分类号 TN011.3 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.s100115

Scattering of Gaussian Beam by a Conducting Spheroidal Particle with Confocal Dielectric Coating

Wang Haihua¹ Sun Xianming¹ Shen Jin¹ Liu Wei¹ Zhang Huayong²

(¹ School of Electrical and Electronic Engineering, Shandong University of Technology, Zibo, Shandong 255049, China)
(² School of Electrical Science and Technology, AnHui University, Hefei, AnHui 230039, China)

Abstract An analytic solution to the scattering of an arbitrary incidence Gaussian beam by a coated spheroidal particle is constructed by expanding the incident and scattered electromagnetic fields in terms of spheroidal vector wave functions. The unknown expansion coefficients are determined by a system of linear equations derived from appropriate boundary conditions. Numerical results of the normalized differential scattering cross section of the conducting and coated spheroidal particle are evaluated, and the scattering characteristics are discussed concisely.

Key words scattering; Gaussian beam; conducting spheroid; normalized differential scattering cross section

OCIS codes 290.1090; 290.4210

1 引 言

随着激光技术的发展, 激光作为光源已经被广泛应用到了颗粒测量领域, 比如激光相多普勒仪, 通过测量粒子散射强度的分布, 研究粒子的形状、尺寸、折射率和运动速度; 在环境科学中, 也可通过测量大气悬浮颗粒对光束散射来监测大气污染等。因此研究粒子对光束的散射是近年的热点。在处理很多实际问题时, 为了研究方便, 经常采用一些简化模型, 如将粒子简化为球形、柱形、椭球形等。球形和柱形粒子散射已经相当成熟, 与此相比, 椭球粒子对

有形光束的散射研究相对较少, 主要原因在于椭球波函数的表述形式复杂, 给理论推导以及数值计算带来了很大困难, 对于多层椭球对有形激光束的散射研究更少。

Asano 等^[1,2]采用在椭球坐标系中用分离变量法求解矢量波函数, 研究了具有任意尺寸和折射率的均匀各向同性椭球对线偏振平面波的散射。Sebak 等^[3]分析了共焦点介质镀层导体椭球对平面波的散射。Li 等^[4]给出了封闭在共焦点天线罩内的长椭球形天线辐射的解析解。从理论上讲, 多层

收稿日期: 2011-02-27; 收到修改稿日期: 2011-03-07

基金项目: 山东省自然科学基金(ZR2009AQ013)资助课题。

作者简介: 王海华(1978—), 女, 硕士, 讲师, 主要从事粒子光散射和大气辐射传输等方面的研究。

E-mail: hhwang1978@163.com

* 通信联系人。E-mail: xianming_sun@yahoo.com.cn

椭球的散射可利用广义边界条件法 (EBCM) 来研究^[5]。对于入射有形波束的情况, Barton^[6,7] 计算了椭球内部和外部场的强度分布。Gouesbet 等^[8-10] 提出的广义 Mie 理论 (GLMT) 是一种描述球形粒子对有形波束散射的有效方法, 已经被 Han 等^[11,12] 推广到在轴入射椭球粒子的情况。Xu 等^[13] 研究了椭球粒子对任意指向和位置的有形波束散射的一般情况, 并已经应用到了对椭球粒子辐射压力 (RPF) 的计算^[14]。

在已有的研究基础上, 本课题组^[15] 给出了任意角度入射的高斯波束用椭球矢量波函数的无穷级数展开的表达式。所以在广义 Mie 理论的框架内可以得到椭球对任意入射高斯波束散射的解析解。本文主要研究了任意取向的共焦点介质镀层导体椭球对高斯波束的散射。

2 理 论

如图 1 所示, 假设自由空间的高斯波束沿着笛卡尔直角坐标系 $O'x'y'z'$ 的 z' 轴方向传播。高斯波束的束腰中心位于原点 O' , 时间因子为 $\exp(-i\omega t)$ 。为了确定镀层椭球的位置和空间取向, 图中引入辅助坐标系 $Ox''y''z''$ 与坐标系 $O'x'y'z'$ 平行。镀层椭球的中心位于原点 O , 在坐标系 $O'x'y'z'$ 中的坐标为 $(x_0, 0, z_0)$ 。坐标系 $Oxyz$ 是由 $Ox''y''z''$ 旋转一个

欧勒角 β 而得到, 镀层椭球的长轴沿 z 轴方向。导体椭球的长半轴和短半轴用 a_1 和 b_1 表示, 介质镀层的长半轴和短半轴用 a_2 和 b_2 表示, 共同的半焦距为 f 。

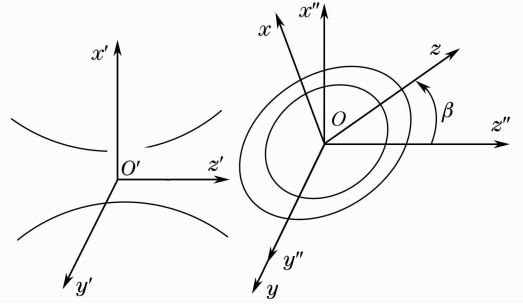


图 1 镀层椭球粒子所在坐标系 $Oxyz$ 与笛卡尔坐标系 $Ox''y''z''$ 的关系

Fig. 1 Relation between the coordinate system $Oxyz$ of a coated spheroidal particle and the Cartesian $Ox''y''z''$

以 TE 模为例, 在坐标系 $Oxyz$ 下, 入射高斯波束的电磁场用椭球矢量波函数 $M_{om}^{e(1)}(c, \zeta, \eta, \phi)$ 和 $N_{om}^{e(1)}(c, \zeta, \eta, \phi)$ 展开为

$$\mathbf{E}^i = E_0 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} i^n [G_{n,TE}^m M_{om}^{e(1)}(c, \zeta, \eta, \phi) + iG_{n,TM}^m N_{om}^{e(1)}(c, \zeta, \eta, \phi)], \quad (1)$$

式中下标中的 o 和 e 分别表示奇函数和偶函数, $c = kf$, $G_{n,TE}^m$ 和 $G_{n,TM}^m$ 为展开系数或波束因子, 可具体表示为^[16,17]

$$\begin{bmatrix} G_{n,TE}^m \\ G_{n,TM}^m \end{bmatrix} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r+m} \frac{2(r+2m)!}{(2r+2m+1)r!} \frac{i^{-r-m}}{N_{nm}} d_r^{nm}(c) \begin{bmatrix} g_{r+m,TE}^m \\ g_{r+m,TM}^m \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} g_{n,TE}^m \\ g_{n,TM}^m \end{bmatrix} = \frac{2}{(1+\delta_{s0})(1+\delta_{m0})} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (-1)^{s+m} \left[\frac{(n+s)!(n-m)!}{(n-s)!(n+m)!} \right]^{1/2} \begin{bmatrix} g_{n,TE}^s \\ ig_{n,TM}^s \end{bmatrix} \times [(-1)^n u_{ms}^{(n)}(\pi + \beta) \pm u_{ms}^{(n)}(\beta)], \quad (3)$$

$$u_{ms}^{(n)}(\beta) = \left[\frac{(n+m)!(n-m)!}{(n+s)!(n-s)!} \right]^{1/2} \sum_{\sigma} \binom{n+s}{n-m-\sigma} \binom{n-s}{\sigma} (-1)^{n-m-\sigma} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2\sigma+s+m} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{2n-2\sigma-s-m}, \quad (4)$$

其中, (2) 式求和号的上标表明当 $n-m$ 为偶数时对 r 的偶数值求和, 当 $n-m$ 为奇数时对 r 的奇数值求和, $d_r^{nm}(c)$ 和 N_{nm} 分别是角函数 $S_{nm}(\eta)$ 的展开系数和归一化常数。在 (3) 式中, 当 $m \neq 0$ 和 $s \neq 0$ 时, 有 $\delta_{m0} = 0$ 和 $\delta_{s0} = 0$, 而 $\delta_{00} = 1$ 。系数 $g_{n,TE}^s$ 和 $g_{n,TM}^s$ 为高斯波束在 $Ox''y''z''$ 下的球坐标系展开系数, 文献[9,10]中给出了积分法、有限级数法以及局域近似法共 3 种计算方法。

对于在轴入射高斯波束 ($x_0 = 0$), 只有 $g_{n,TE}^1$ 和 $g_{n,TM}^1$ 不为零, 可表示为

$$g_{n,TE}^1 = -\frac{1}{2} g_n, \quad g_{n,TM}^1 = -\frac{i}{2} g_n, \quad (5)$$

当高斯波束采用 Davis-Barton 模式时, 系数 g_n 可用如下所示的局域近似公式计算^[9,18]:

$$g_n = \frac{1}{1+2is z_0/\omega_0} \exp(ikz_0) \exp \left[\frac{-s^2(n+1/2)^2}{1+2is z_0/\omega_0} \right], \quad (6)$$

式中 $s = \frac{1}{k\omega_0}$, ω_0 为高斯波束的束腰半径。

所以, 在轴高斯波束的展开系数 $G_{n,TE}^m$ 和 $G_{n,TM}^m$ 可简化为如下的较简单的形式

$$\begin{bmatrix} G_{n,TE}^m \\ G_{n,TM}^m \end{bmatrix} = \frac{2(-1)^m}{N_{nm}} \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{d_r^{mm}(c)}{(r+m)(r+m+1)} g_{r+m} \begin{bmatrix} (2-\delta_{0m}) \frac{dP_{r+m}^m(\cos\beta)}{d\beta} \\ 2m \frac{P_{r+m}^m(\cos\beta)}{\sin\beta} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

镀层椭球的散射场可表示为

$$\mathbf{E}^s = E_0 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} i^n [\beta_{nm} \mathbf{M}_{enn}^{r(3)}(c, \zeta, \eta, \phi) + i\alpha_{nm} \mathbf{N}_{omm}^{r(3)}(c, \zeta, \eta, \phi)], \quad (8)$$

由(1)式和(8)式可写出介质镀层内场的展开式为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^w = E_0 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} i^n [\delta_{nm} \mathbf{M}_{enn}^{r(1)}(c_1, \zeta, \eta, \phi) + \delta'_{nm} \mathbf{M}_{enn}^{r(3)}(c_1, \zeta, \eta, \phi)] + i\gamma_{nm} N_{omm}^{r(1)}(c_1, \zeta, \eta, \phi) + \\ i\gamma'_{nm} N_{omm}^{r(3)}(c_1, \zeta, \eta, \phi), \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $c_1 = fk_1, k_1 = k\bar{n}, \bar{n}$ 为镀层介质相对于自由空间的折射率。

相应的入射高斯波束、散射场以及介质镀层内的磁场的展开式可利用如下关系式得到^[15]

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} \quad \mathbf{M}_{omm}^e = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{N}_{omm}^e, \quad \mathbf{N}_{omm}^e = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_{omm}^e. \quad (10)$$

待求的展开系数 $\alpha_m(\zeta), \beta_m(\zeta), \chi_m(\zeta), \chi'_m(\zeta), \tau_m(\zeta)$ 和 $\tau'_m(\zeta)$ 可利用电磁场边界条件确定。已知 ζ_1 和 ζ_2 分别为导体椭球和介质镀层边界的径向坐标, 边界条件要求在界面 $\zeta = \zeta_2$ 上电场和磁场的切向分量连续, 在界面 $\zeta = \zeta_1$ 上电场的切向分量为零。

在界面 $\zeta = \zeta_2$ 和 $\zeta = \zeta_1$ 上的边界条件可表示为

$$\{E_\eta^i + E_\eta^s = E_\eta^w, \quad E_\phi^i + E_\phi^s = E_\phi^w, \quad H_\eta^i + H_\eta^s = H_\eta^w, \quad H_\phi^i + H_\phi^s = H_\phi^w \quad \text{at} \quad \zeta = \zeta_2, \quad (11)$$

以及

$$E_\eta^w = 0, \quad E_\phi^w = 0 \quad \text{at} \quad \zeta = \zeta_1, \quad (12)$$

由前面给出的场的展开式, (11)式可具体表示为

$$\sum_{n=m}^{\infty} i^n [\Gamma] \begin{bmatrix} \alpha_{nm} \\ \beta_{nm} \\ \delta_{nm} \\ \delta'_{nm} \\ \gamma_{nm} \\ \gamma'_{nm} \end{bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} i^n [G] \begin{bmatrix} U_{nm}^{(1),t}(c) \\ V_{nm}^{(1),t}(c) \\ X_{nm}^{(1),t}(c) \\ Y_{nm}^{(1),t}(c) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

(12)式可表示为

$$\sum_{n=m}^{\infty} i^n [\Gamma'] \begin{bmatrix} \delta_{nm} \\ \delta'_{nm} \\ \gamma_{nm} \\ \gamma'_{nm} \end{bmatrix} = 0, \quad (14)$$

(13)式中的矩阵 $[G]$ 和 $[\Gamma]$ 为

$$[G] = \begin{bmatrix} -G_{n,TE}^m & -G_{n,TM}^m & 0 & 0 \\ -G_{n,TM}^m & -G_{n,TE}^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{n,TE}^m & -G_{n,TM}^m \\ 0 & 0 & -G_{n,TM}^m & -G_{n,TE}^m \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} V_{nm}^{(3),t}(c) & U_{nm}^{(3),t}(c) & -U_{nm}^{(1),t}(c_1) & -U_{nm}^{(3),t}(c_1) & -V_{nm}^{(1),t}(c_1) & -V_{nm}^{(3),t}(c_1) \\ U_{nm}^{(3),t}(c) & V_{nm}^{(3),t}(c) & -\frac{k_1}{k} V_{nm}^{(1),t}(c_1) & -\frac{k_1}{k} V_{nm}^{(3),t}(c_1) & -\frac{k_1}{k} U_{nm}^{(1),t}(c_1) & -\frac{k_1}{k} U_{nm}^{(3),t}(c_1) \\ Y_{nm}^{(3),t}(c) & X_{nm}^{(3),t}(c) & -X_{nm}^{(1),t}(c_1) & -X_{nm}^{(3),t}(c_1) & -Y_{nm}^{(1),t}(c_1) & -Y_{nm}^{(3),t}(c_1) \\ X_{nm}^{(3),t}(c) & Y_{nm}^{(3),t}(c) & -\frac{k_1}{k} Y_{nm}^{(1),t}(c_1) & -\frac{k_1}{k} Y_{nm}^{(3),t}(c_1) & -\frac{k_1}{k} X_{nm}^{(1),t}(c_1) & -\frac{k_1}{k} X_{nm}^{(3),t}(c_1) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

(14)式中的矩阵 $[\Gamma']$ 为

$$[\Gamma'] = \begin{bmatrix} U_{nm}^{(1),t}(c_1) & U_{nm}^{(3),t}(c_1) & V_{nm}^{(1),t}(c_1) & V_{nm}^{(3),t}(c_1) \\ X_{nm}^{(1),t}(c_1) & X_{nm}^{(3),t}(c_1) & Y_{nm}^{(1),t}(c_1) & Y_{nm}^{(3),t}(c_1) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

参数 $U_{nm}^{(j),t}, V_{nm}^{(j),t}, X_{nm}^{(j),t}, Y_{nm}^{(j),t}$ ($j = 1$ 或 3 对应于径向函数为第一类或第三类)的表达式已由 Asano 等^[1]给出。给定 m 的一个值, (13)和(14)式对 $t \geq 0$ 的任何一个整数都成立。取一个较大的 t , 在待定系数之间就会建立起足够数目的关系式, 则散射场以及镀层内部场的展开系数即可求出^[1]。

3 数值计算结果

计算了距离散射体较远的远区场, 其可由散射场 E^s 在 $c\zeta \rightarrow \infty$ 时的渐进表达式得到。在 $M_{omn}^{(3)}(c, \zeta, \eta, \phi)$ 和 $N_{omn}^{r(3)}(c, \zeta, \eta, \phi)$ 中当 $c\zeta \rightarrow \infty$ 时忽略 $1/r$ 的高阶小量, 即可由(8)式得到如下散射电场 E^s 的渐进表达式:

$$-E_\eta^s = E_0 \frac{i\lambda}{2\pi r} \exp\left(i \frac{2\pi r}{\lambda}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \left[\alpha_{nm} \frac{dS_{nm}(c, \cos \theta)}{d\theta} + m\beta_{nm} \frac{S_{nm}(c, \cos \theta)}{\sin \theta} \right] \sin(m\phi), \quad (18)$$

$$E_\phi^s = E_0 \frac{i\lambda}{2\pi r} \exp\left(i \frac{2\pi r}{\lambda}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \left[m\alpha_{nm} \frac{S_{nm}(c, \cos \theta)}{\sin \theta} + \beta_{nm} \frac{dS_{nm}(c, \cos \theta)}{d\theta} \right] \cos(m\phi), \quad (19)$$

微分散射截面的定义为

$$\sigma(\theta, \phi) = 4\pi r^2 \left| \frac{E^s}{E_0} \right|^2 = \frac{\lambda^2}{\pi} [|T_1(\theta, \phi)|^2 + |T_2(\theta, \phi)|^2], \quad (20)$$

式中

$$T_1(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \left[m\beta_{nm} \frac{S_{nm}(c, \cos \theta)}{\sin \theta} + \alpha_{nm} \frac{dS_{nm}(c, \cos \theta)}{d\theta} \right] \sin(m\phi), \quad (21)$$

$$T_2(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \left[m\alpha_{nm} \frac{S_{nm}(c, \cos \theta)}{\sin \theta} + \beta_{nm} \frac{dS_{nm}(c, \cos \theta)}{d\theta} \right] \cos(m\phi). \quad (22)$$

本文的算例是在属于椭球粒子的坐标系中计算归一化微分散射截面 $\pi\sigma(\theta, \phi)/\lambda^2$, 并设高斯波束为 TE 模且 $x_0 = z_0 = 0$ 。

为了验证上述理论的正确性, 将高斯波束的束腰半径取为无限大(此时, $w_0 = \infty, g_n = 1$, 即平面波模型), 椭球粒子取为球形粒子(横纵比等于 1), 计算了一介质镀层理想导体球的归一化微分散射截面 $\pi\sigma(\theta, \phi)/\lambda^2$, 如图 2 所示, 其中内层导体球的尺寸参数为 $ka_1 = 3$, 外层尺寸参数为 $ka_2 = 4$, 介质的相对折射率为 $\bar{n} = 1.414$, 欧勒角 $\beta = 0$, 与 Sebak 等^[3]所给的数值结果一致。

图 3 给出了束腰半径为 $w_0 = 2\lambda$ 的高斯波束以不同角度入射时, 一镀层理想导体椭球的归一化微分散射截面 $\pi\sigma(\theta, \phi)/\lambda^2$ 。镀层椭球的尺寸参数 $ka_1 = 6, kb_1 = 3, ka_2 = 10, kb_2 = 8.54$, 介质的折射率为 $\bar{n} = 1.33$ 。从图中可以看出, 当正入射时, 微分散射截面最大, 这是因为所取椭球形状为扁椭球, 即横轴长度大于纵轴长度, 因此高斯光束垂直入射时, 其横截面积最大, 对光的前向散射也最强。

图 4 给出了束腰半径 $w_0 = 2\lambda$ 的高斯波束和平

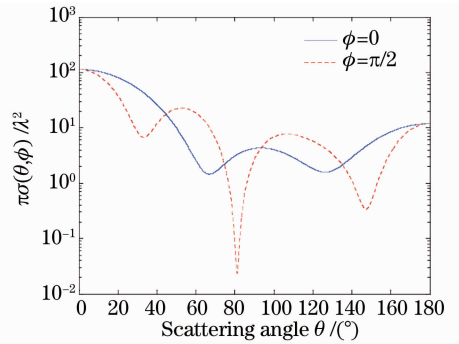


图 2 平面波入射时, 归一化微分散射截面 $\pi\sigma(\theta, 0)/\lambda^2$ 和 $\pi\sigma(\theta, \pi/2)/\lambda^2$

Fig. 2 Normalized differential scattering cross sections $\pi\sigma(\theta, 0)/\lambda^2$ and $\pi\sigma(\theta, \pi/2)/\lambda^2$ for a conducting sphere with a dielectric coating illuminated by a plane wave

面波正入射时, 一镀层理想导体椭球的归一化微分散射截面 $\pi\sigma(\theta, \phi)/\lambda^2$, 其尺寸参数同图 3, 从图中可以看出, 平面波的散射强度大于高斯波, 这是因为平面波均匀的照射在粒子上, 而高斯波束能量主要集中在束腰处。

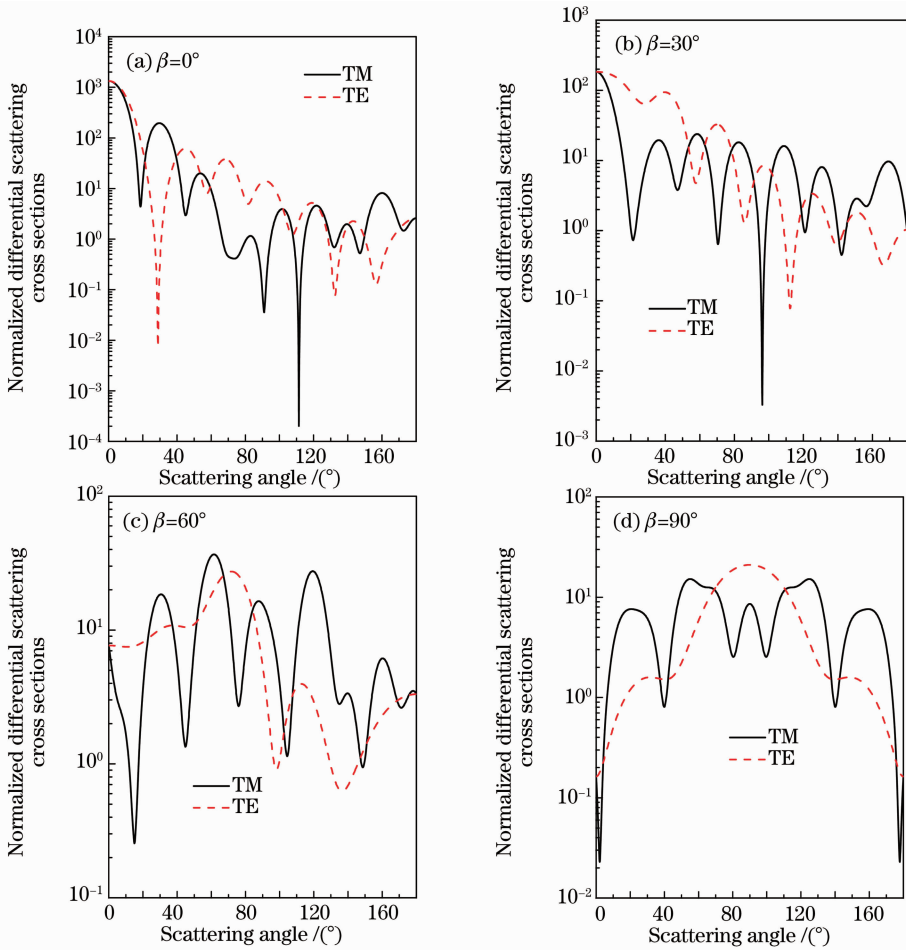


图 3 束腰半径为 $w_0 = 2\lambda$ 的高斯波束以欧勒角 β 分别为 $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 和 90° 入射时, 一介质镀层导体椭球的归一化微分散射截面 $\pi\sigma(\theta, 0)/\lambda^2$ 和 $\pi\sigma(\theta, \pi/2)/\lambda^2$

Fig. 3 Normalized differential scattering cross sections $\pi\sigma(\theta, 0)/\lambda^2$ and $\pi\sigma(\theta, \pi/2)/\lambda^2$ for a conducting spheroid with a dielectric coating for incidence of a Gaussian beam with $w_0 = 2\lambda$, and $\beta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ and 90°

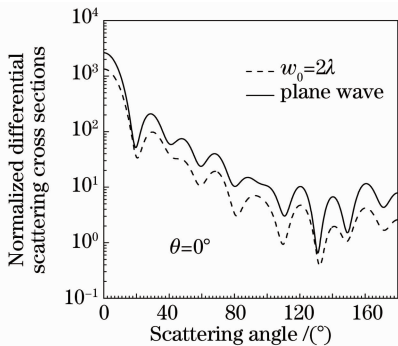


图 4 束腰半径为 $w_0 = 2\lambda$ 的高斯波束和平面波正入射时, 一介质镀层导体椭球的归一化微分散射截面

Fig. 4 Normalized differential scattering cross sections $\pi\sigma(\theta, 0)/\lambda^2$ and $\pi\sigma(\theta, \pi/2)/\lambda^2$ for a conducting spheroid with a dielectric coating for normal incidence of a Gaussian beam with $w_0 = 2\lambda$ and a plane wave

4 结 论

给出了一种计算任意取向介质镀层导体椭球对高斯波束散射的方法。散射场的展开系数可通过求解由边界条件写出的线性方程组而得到。对于归一化的微分散射截面给出了算例。该解析方法为解释任意取向的非球形粒子对高斯波束的散射现象提供了一种可供选择的理论模型。

参 考 文 献

- 1 S. Asano, G. Yamamoto. Light scattering by a spheroid particle [J]. *Appl. Opt.*, 1975, **14**(1): 29~49
- 2 S. Asano. Light scattering properties of spheroidal particles[J]. *Appl. Opt.*, 1979, **18**(3): 712~723
- 3 A. Sebak, B. Sinha. Scattering by a conducting spheroidal object with dielectric coating at axial incidence [J]. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 1992, **40**(3): 268~273
- 4 L. Li, M. Leong, T.-S. Yeo *et al.*. Electromagnetic radiation from a prolate spheroidal antenna enclosed in a confocal spheroidal radome[J]. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2002, **50**(11):

1525~1533

- 5 D. Wang, P. Barber. Scattering by inhomogeneous nonspherical objects[J]. *Appl. Opt.*, 1979, **18**(8): 1190~1197
- 6 J. Barton. Internal and near-surface electromagnetic fields for a spheroidal particle with arbitrary illumination[J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(24): 5542~5551
- 7 J. Barton. Internal, near-surface, and scattered electromagnetic fields for a layered spheroid with arbitrary illumination[J]. *Appl. Opt.*, 2001, **40**(21): 3598~3607
- 8 G. Gouesbet, B. Maheu, G. Gréhan. Light scattering from a sphere arbitrarily located in a Gaussian beam, using a Bromwich formulation[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1988, **5**(9): 1427~1443
- 9 G. Gouesbet, G. Gréhan, B. Maheu. Computations of the g_n coefficients in the generalized Lorenz-Mie theory using three different methods[J]. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(23): 4874~4883
- 10 G. Gouesbet, G. Gréhan, B. Maheu. Localized interpretation to compute all the coefficients g_n^m in the generalized Lorenz-Mie theory[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1990, **7**(6): 998~1007
- 11 Y. Han, Z. Wu. Scattering of a spheroidal particle illuminated by a Gaussian beam[J]. *Appl. Opt.*, 2001, **40**(15): 2501~2509
- 12 Y. Han, G. Gréhan, G. Gouesbet. Generalized Lorenz-Mie theory for a spheroidal particle with off-axis Gaussian-beam illumination[J]. *Appl. Opt.*, 2003, **42**(33): 6621~6629
- 13 F. Xu, K. Ren, G. Gouesbet *et al.*. Generalized Lorenz-Mie theory for an arbitrarily oriented, located, and shaped beam scattered by homogeneous spheroid[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2007, **24**(1): 119~131
- 14 F. Xu, K. F. Ren, G. Gouesbet *et al.*. Theoretical prediction of radiation pressure force exerted on a spheroid by an arbitrarily shaped beam[J]. *Phys. Rev. E*, 2007, **75**(2): 026613
- 15 Y. Han, H. Zhang, G. Han. The expansion coefficients of arbitrarily shaped beam in oblique illumination [J]. *Opt. Express*, 2007, **15**(2): 735~746
- 16 A. Edmonds. Angular momentum in quantum mechanics[M]. Princeton, N. J: Princeton University Press, 1957. Chap. 4
- 17 C. Flammer. Spheroidal wave functions [M]. Stanford, California: Stanford University Press, 1957
- 18 L. Davis. Theory of electromagnetic beams[J]. *Phys. Rev. A*, 1979, **19**(3): 1177~1179