

含核椭球粒子后向散射特性研究

孙贤明 王海华 申 晋

(山东理工大学电气与电子工程学院, 山东 淄博 255049)

摘要 基于 T 矩阵方法, 给出了随机取向、轴对称、含核椭球粒子的散射计算方法, 散射体的核和外壳均可为非球形粒子, 内层粒子和外层粒子可以为同心也可为不同心, 整个粒子具有轴对称性。以含核椭球粒子为模型, 计算了含有吸收性内核的水凝物气溶胶的散射特性, 分析了核的大小、形状以及位置对后向散射的影响。计算结果表明, 后向散射对内核的形状、大小、位置以及外壳的形状非常敏感。

关键词 散射; T 矩阵; Mueller 矩阵; 椭球粒子

中图分类号 TN011.3 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.0829001

Study on Light Backscattering by Spheroid with Inclusion

Sun Xianming Wang Haihua Shen Jin

(School of Electrical and Electronic Engineering, Shandong University of Technology, Zibo, Shandong 255049, China)

Abstract A method is described for the calculation of light-scattering properties of randomly oriented, axially symmetric spheroid particles with inclusion, in the framework of the T-matrix theory. Both the core and the shell can be axially symmetric nonspherical particles, and the inner and outer layers can be concentric or eccentric. Based on the model of spheroid particle with inclusion, light scattering characteristics of water aerosols with an absorptive core are calculated. The effects of core size, shape and position on the light backscattering characteristics are analyzed. It is suggested that light scattering properties in the backscattering region are sensitive to the shape, size, position of the core and the shape of the shell.

Key words scattering; T matrix; Mueller matrix; spheroid particle

OCIS codes 290.1090; 290.4210

1 引 言

自然界中的很多粒子都可以看作含核粒子, 比如融化中的冰晶粒子, 可以看作外层为水内层为冰的混合相粒子^[1]; 另外沙尘、黑碳等非溶解性气溶胶粒子也可以作为云、雾、雨等水凝物气溶胶的凝结核, 从而构成含核粒子增加对光波的吸收。在以往的研究中, 很多研究者利用双层同心球形粒子模型模拟含核粒子的散射特性^[2,3], 这种模型简单易用, 但是很难精确模拟自然界中的真实含核气溶胶粒子。自然界中的水凝物气溶胶很多呈椭球型, 如雨滴, 且随机取向; 另外内核在粒子内部的形状、位置以及占整个粒子的比重也是不固定的, 因此应采用更为切合实际的模型来进行模拟。本文拟采用随机

取向的含核偏心旋转椭球粒子模拟含核粒子的光散射特性, 核的形状可为球形或者椭球形, 位置任意 (但必须在整个粒子内部, 且内外粒子的中心都在旋转轴上)。

含核粒子散射特性的研究方法主要有分离变量法^[4]、几何光学方法^[5]和离散偶极子方法^[6]等, 但是这些方法在处理随机取向的非球形粒子散射时, 需要对所有的取向进行计算然后平均, 会耗费大量的计算时间。而 T 矩阵 (又称为转换矩阵) 方法在处理此类问题时却非常有效, 因为 T 矩阵仅与粒子的形状、构成和尺寸有关, 而与入射方向无关^[7,8], 仅需要计算一次 T 矩阵, 便可应用到其他任意方向入射的情况, 这种方法不需要对所有的粒子取向进行

收稿日期: 2011-03-14; 收到修改稿日期: 2011-03-25

基金项目: 山东省自然科学基金(ZR2009AQ013)资助课题。

作者简介: 孙贤明(1979—), 男, 博士, 副教授, 主要从事粒子光散射和大气辐射传输等方面的研究。

E-mail: xianming_sun@yahoo.com.cn

计算。Mishchenko^[9]给出了一种解析、精确、高效的取向平均计算方法,且给出很多用于非球形粒子光散射特性计算的 T 矩阵程序,这些程序都可以从 http://www.giss.nasa.gov/staff/mmishchenko/t_matrix.html 免费下载,本文也参照了这些程序中的取向平均方法。尽管 T 矩阵方法已经被广泛地应用到非球形粒子的散射计算中,但是应用于含核非球形粒子散射的研究很少,本文利用 T 矩阵方法计算分析核的位置、大小以及形状对整个粒子散射特性的影响。

2 理 论

基于 T 矩阵方法,任何粒子的入射场内场和散射场都可以被矢量球谐函数展开^[7],即

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{nm} \text{Rg} \mathbf{M}_{nm}(kr) + b_{nm} \text{Rg} \mathbf{N}_{nm}(kr)], \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_{\text{sca}}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [p_{nm} \mathbf{M}_{nm}(kr) + q_{nm} \mathbf{N}_{nm}(kr)], \quad (2)$$

$$\mathbf{E}_{\text{int}}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [c_{nm} \text{Rg} \mathbf{M}_{nm}(m_r kr) + d_{nm} \text{Rg} \mathbf{N}_{nm}(m_r kr)], \quad (3)$$

式中 \mathbf{E}_{inc} , \mathbf{E}_{sca} 和 \mathbf{E}_{int} 分别为入射场,散射场和内场; a_{nm} 和 b_{nm} 为入射场的展开系数, p_{nm} 和 q_{nm} 为散射场的展开系数, c_{nm} 和 d_{nm} 为内场展开系数; m_r 为粒子内部的折射率;

$$\mathbf{M}_{nm}(kr) = (-1)^m d_n h_n^{(1)}(kr) \mathbf{C}_{nm}(\vartheta) \exp(im\phi), \quad (4)$$

$$\mathbf{N}_{nm}(kr) = (-1)^m d_n \left\{ \frac{n(n+1)}{kr} h_n^{(1)}(kr) \mathbf{P}_{nm}(\vartheta) + \frac{1}{kr} [kr h_n^{(1)}(kr)]' \mathbf{B}_{nm}(\vartheta) \right\} \exp(im\phi), \quad (5)$$

$$\mathbf{B}_{nm}(\vartheta) = \vartheta \frac{d}{d\vartheta} d_{0m}^n(\vartheta) + \phi \frac{im}{\sin \vartheta} d_{0m}^n(\vartheta), \quad (6)$$

$$\mathbf{C}_{nm}(\vartheta) = \vartheta \frac{im}{\sin \vartheta} d_{0m}^n(\vartheta) - \phi \frac{d}{d\vartheta} d_{0m}^n(\vartheta), \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{nm}(\vartheta) = r d_{0m}^n(\vartheta) / r, \quad (8)$$

$$d_n = \left[\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \right]^{1/2}, \quad (9)$$

式中 $d_{lm}^n(\vartheta)$ 为维格纳函数:

$$d_{lm}^n(\vartheta) = A_{lm}^n (1 - \cos \vartheta)^{(l-m)/2} (1 + \cos \vartheta)^{-(l+m)/2} \times \frac{d^{n-m}}{(d \cos \vartheta)^{n-m}} [(1 - \cos \vartheta)^{n-l} (1 + \cos \vartheta)^{n+l}]. \quad (10)$$

当 $n \geq n^* = \max(|l|, |m|)$ 时,

$$d_{lm}^n(\vartheta) = 0, \quad (11)$$

当 $n < n^*$ 时, (10) 式中的

$$A_{lm}^n = \frac{(-1)^{n-m}}{2^n} \left[\frac{(n+m)!}{(n-l)!(n+l)!(n-m)!} \right]^{1/2}, \quad (12)$$

(4) 式和 (5) 式中的球汉开尔函数 $h_n^{(1)}$ 用球贝塞尔函数代替即为 $\text{Rg} \mathbf{M}_{nm}(kr)$ 和 $\text{Rg} \mathbf{N}_{nm}(kr)$ 。

散射系数和入射系数可以简单地表示为^[10~12]

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (13)$$

入射场和内场的线性关系为

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}. \quad (14)$$

散射场和内场的线性关系为

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}. \quad (15)$$

因此 T 矩阵可以简单地表示为

$$\mathbf{T} = -\mathbf{BA}^{-1}. \quad (16)$$

对于内层(核)折射率为 m_1 , 外层折射率为 m_2 的双层粒子^[13,14]:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{BA}^{-1} = -[\mathbf{B}_2 + \mathbf{BB}_2(-\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1^{-1})] \times [\mathbf{A}_2 + \mathbf{AA}_2(-\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1^{-1})]^{-1}, \quad (17)$$

式中 $-\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{T}_1$ 为核的 T 矩阵, 粒子的折射率为 m_1/m_2 , 介质的相对折射率为 1, 入射波数为 $k_0 m_2$, $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ 为真空中的入射波长。在计算矩阵 \mathbf{A}_2 和 \mathbf{B}_2 时粒子的折射率为 m_2 , 媒质折射率为 1, 入射波数为 k_0 ; 矩阵 \mathbf{BB}_2 和 \mathbf{AA}_2 的计算条件与 $\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2$ 类似, 但是在计算时, 宗量为 kr 的第一类贝塞尔函数需要用汉开尔函数替代。

根据 Mishchenko^[9]的研究结果, 在求得 T 矩阵以后, 随机取向非球形粒子的散射特性可以通过解析形式直接求得, 而不需要对所有的取向求解然后取平均, 这种方法的计算速度相比于取向数值平均的方法可提高几十倍。Mueller 矩阵描述了散射体对入射光的散射影响, 入射光和散射光可以由斯托克斯矢量来描述, 它们的关系由 Mueller 矩阵描述^[15], 即

$$\mathbf{I}_s = \frac{C_{\text{sca}}}{4\pi R^2} \mathbf{F}(\theta) \mathbf{I}_i, \quad (18)$$

式中 \mathbf{I}_s 和 \mathbf{I}_i 为斯托克斯矢量, 是由 I, Q, U 和 V 四个参数组成的列向量, R 为散射体到观测点的距离。对于轴对称的非球形粒子, Mueller 矩阵只有 8 个非零元素, 6 个相互独立的元素^[13],

$$\mathbf{F}(\theta) = \begin{bmatrix} F_{11}(\theta) & F_{12}(\theta) & 0 & 0 \\ F_{12}(\theta) & F_{22}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{33}(\theta) & F_{34}(\theta) \\ 0 & 0 & -F_{34}(\theta) & F_{44}(\theta) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

式中 \mathbf{F}_{11} 为单次散射相函数。对于旋转对称体，Mueller 矩阵只有对角线上的元素不等于 0，即，

$$\mathbf{F}(\pi) = \text{diag}[F_{11}(\pi) \quad F_{22}(\pi) \quad F_{33}(\pi) \quad F_{44}(\pi)], \quad (20)$$

其他各元素均为 0。

3 计算结果与讨论

计算中采用的含核粒子模型内核为黑碳，外壳为水，入射波长在真空中为 448 nm，黑碳的真空相对折射率为 $1.75 + 0.44i^{[16]}$ ，水的真空相对折射率为 1.33。讨论外壳的尺寸参数为 10 时，内核粒子的尺寸、形状以及位置对整个粒子散射特性的影响。

椭球粒子为旋转对称体，在球坐标系下，其方程为

$$r(\theta, \phi) = r_{\text{eq}} \varepsilon^{1/3} [\varepsilon^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta]^{-1/2}, \quad (21)$$

式中 r_{eq} 为等体积球的半径， $\varepsilon = b/a$ 为纵横比，旋转轴的长度为 a 。

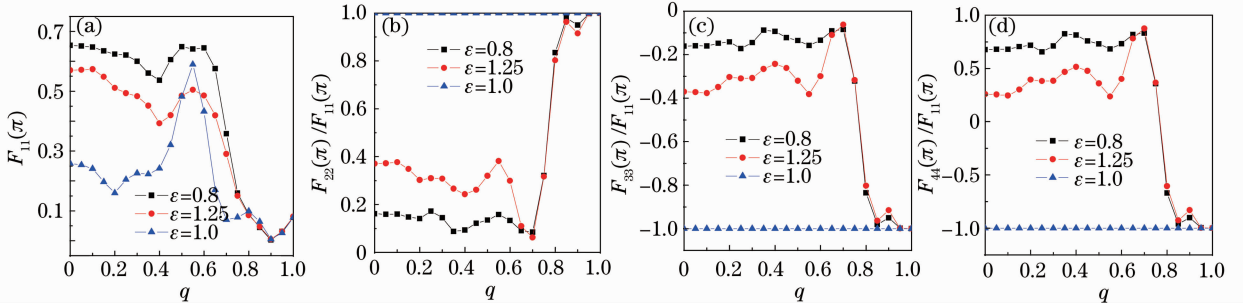


图 1 同心双层椭球粒子的 Mueller 矩阵后向散射参数 $F_{11}(\pi)$, $F_{22}(\pi)/F_{11}(\pi)$, $F_{33}(\pi)/F_{11}(\pi)$, $F_{44}(\pi)/F_{11}(\pi)$ 随粒径比 q 的变化曲线

Fig. 1 Variation of backscattering parameters of Mueller matrix $F_{11}(\pi)$, $F_{22}(\pi)/F_{11}(\pi)$, $F_{33}(\pi)/F_{11}(\pi)$, $F_{44}(\pi)/F_{11}(\pi)$ of concentric spheroids with the core/particle size ratio q

图 2 给出了内层为球形粒子外层为椭球粒子，或者内层为椭球粒子外层为球形粒子的同心含核粒子的后向散射特性，其中 ε_i 表示内层粒子的纵横比， ε_o 表示外层粒子的纵横比。从图中可以看出，这两种类型的含核粒子散射特性差距较大，其中外层为球形粒子时，内层无论为扁椭球还是长椭球 $F_{11}(\pi)$ 近似相等；当 $q < 0.6$ 时， $F_{22}(\pi)/F_{11}(\pi) \approx 1$ ； $F_{33}(\pi)/F_{11}(\pi) \approx F_{44}(\pi)/F_{11}(\pi) \approx -1$ ；当外层为椭球内层为球形粒子时，整个粒子的散射特性和双层椭球粒子相类似，但是在数值上有较小的差异。从图 2 也可以得出后向散射对于外层粒子的形状也

对于非共心粒子，在计算中以内核的中心为坐标原点，内核可以为球形也可以为椭球形，外壳取为球形粒子，其在球坐标系下的方程为

$$r(\theta) = a[p \cos^2 \theta + (1 - p^2 \sin^2 \theta)^{1/2}], \quad (22)$$

式中 c 为外壳的半径， $p = l/c$ 为内外层粒子中心的距离和外层粒子的半径比，计算中仍然取外层粒子的尺寸参数为 10。

图 1 给出了尺寸参数为 10 的双层同心椭球粒子在 ε 分别等于 0.8(长椭球)，1.0(同心球)和 1.25(扁椭球)时，随机取向的双层椭球粒子的后向散射系数随内核半径和外壳半径比 $q = r_{\text{core}}/r_{\text{shell}}$ 的变化关系，粒子的半径为体积等效球的半径。对于 $F_{11}(\pi)$ ，从图中可以看出，当 q 较小时，扁椭球的后向散射较强，球形的最弱；另外，当 q 较大时，三者之间的差距很小。对于球形粒子， $F_{22}/F_{11} = 1$ 。对于非球形粒子，当 q 较小时，和 1 偏移很大；而当 q 较大时， $F_{22}/F_{11} \approx 1$ 。对于球形粒子， $F_{33}/F_{11} = -1$ 和 $F_{44}/F_{11} = -1$ 。对于椭球粒子，在 $0 < q < 1$ 时， $F_{33}/F_{11} < 0$ ， F_{44}/F_{11} 在 $q < 0.8$ 时为正值；在 q 较大时， $F_{33}/F_{11} \approx F_{44}/F_{11} \approx -1$ 。综上可知，粒子后向散射特性对粒子的形状和构成很敏感。

非常敏感。

图 3 给出了非共心含核粒子外层为球形，内层为球形或者椭球形时，整个粒子的散射特性随偏心率 p 的变化曲线，其中 ε_i 表示内层粒子的纵横比，内层和外层的等效半径比为 0.5，从图中可以看出随着 p 的增大， $F_{11}(\pi)$ 总体呈减小的趋势，内核为扁椭球的后向散射系数最大，长椭球最小； $F_{22}(\pi)/F_{11}(\pi)$ 也呈减小趋势，且扁椭球减小最快； $F_{33}(\pi)/F_{11}(\pi)$ 和 $F_{44}(\pi)/F_{11}(\pi)$ 的变化趋势基本相同，都呈增大的趋势，且扁椭球增大最快，长椭球最慢。从图 3 可以得出后向散射对于含核粒子内核的位置也非常敏感。

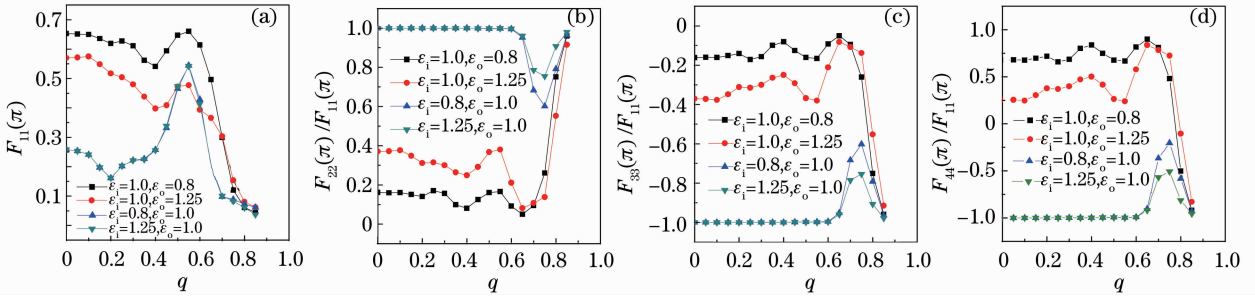


图 2 内层为球形粒子、外层为椭球粒子,以及内层为椭球粒子、外层为球形粒子的 Mueller 矩阵后向散射参数 $F_{11}(\pi)$, $F_{22}(\pi)/F_{11}(\pi)$, $F_{33}(\pi)/F_{11}(\pi)$, $F_{44}(\pi)/F_{11}(\pi)$ 随粒径比 q 的变化曲线

Fig. 2 Variation of backscattering parameters of Mueller matrix $F_{11}(\pi)$, $F_{22}(\pi)/F_{11}(\pi)$, $F_{33}(\pi)/F_{11}(\pi)$, $F_{44}(\pi)/F_{11}(\pi)$ of coating particle with the core/particle size ratio q , and the shape of the inner layer is sphere and outer layer is spheroid or the outer layer is sphere and the inner layer is spheroid

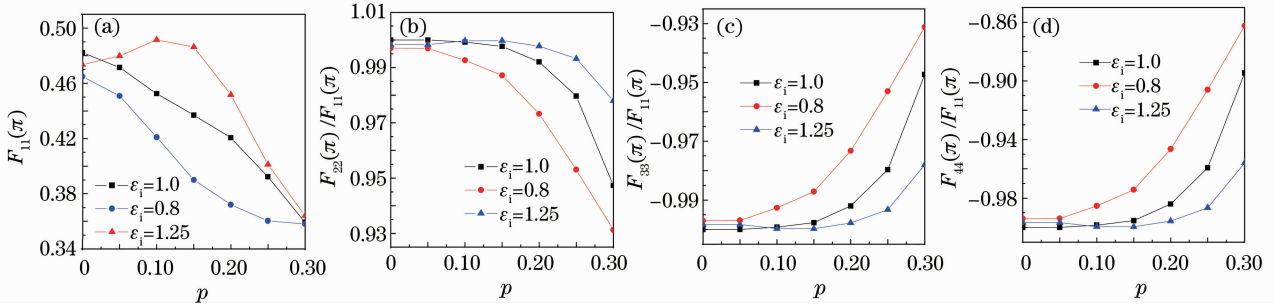


图 3 Mueller 矩阵的后向散射参数 $F_{11}(\pi)$, $F_{22}(\pi)/F_{11}(\pi)$, $F_{33}(\pi)/F_{11}(\pi)$, $F_{44}(\pi)/F_{11}(\pi)$ 随偏心率 p 的变化曲线

Fig. 3 Variation of backscattering parameters of Mueller matrix $F_{11}(\pi)$, $F_{22}(\pi)/F_{11}(\pi)$, $F_{33}(\pi)/F_{11}(\pi)$, $F_{44}(\pi)/F_{11}(\pi)$ with the eccentricity p

4 结 论

利用 T 矩阵方法计算了随机取向含核椭球粒子的后向散射特性, Mueller 矩阵中 $F_{11}(\pi)$, $F_{22}(\pi)/F_{11}(\pi)$, $F_{33}(\pi)/F_{11}(\pi)$ 和 $F_{44}(\pi)/F_{11}(\pi)$ 随纵横比 ϵ 、内核与外壳的半径比 q 以及偏心率 p 的变化关系。从计算结果可以分析得到, 后向散射对于含核粒子的形状(包括内核和外壳)、位置、内核的尺寸等因素都很敏感, 因此可以应用后向散射进行粒子微观特性的定性和定量的反演。本文结果对于研究含核非球形粒子的散射具有一定的应用价值。

参 考 文 献

- 1 Sun Xianming, Han Yiping. Absorption and scattering of light by ice-water mixed clouds [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(2): 682~689
孙贤明, 韩一平. 冰水混合云的吸收和散射特性 [J]. *物理学报*, 2006, **55**(2): 682~689
- 2 X. M. Sun, Y. P. Han. Reflection of polarized light in ice-water mixed clouds [J]. *J. Electromagn. Waves and Appl.*, 2006, **20**(2): 1655~1665
- 3 Wang Yawei, Lei Haina, Bu Min *et al.*. Distribution characteristics and identification of several typical blood cells

under optical phase models[J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(10): 2629~2635

王亚伟, 雷海娜, 卜敏等. 几种典型血细胞的光学相位模型及其分布特征与识别方法[J]. *中国激光*, 2009, **36**(10): 2629~2635

- 4 Han Yiping, Du Yungang. Electromagnetic scattering for a non-spherical aerosols with arbitrary shaped beam [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(4): 630~633
韩一平, 杜云刚. 非球形大气粒子对任意波束的电磁散射特性 [J]. *光学学报*, 2006, **26**(4): 630~633
- 5 Sun Xianming, Wang Haihua, Liu Wanqiang *et al.*. Light scattering by a spherical particle with multiple densely packed inclusions [J]. *Chinese Physics B*, 2009, **18**(3): 1040~1044
- 6 Miroslav Kocif, František Kundracik, Gordon Videen. Optical properties of single mixed-phase aerosol particles [J]. *J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 2008, **109**(11): 2108~2123
- 7 P. C. Waterman. Symmetry, unitarity, and geometry in electromagnetic scattering [J]. *Phys. Rev. D*, 1971, **3**(4): 825~839
- 8 L. Tsang, J. A. Kong, R. T. Shin. Radiative transfer theory for active remote sensing of a layer of nonspherical particles [J]. *Radio Sci.*, 1984, **19**(2): 629~642
- 9 M. I. Mishchenko. Light scattering by size-shape distributions of randomly oriented axially symmetric particles of a size comparable to a wavelength [J]. *Appl. Opt.*, 1993, **32**(24): 4652~4666
- 10 M. I. Mishchenko. Light scattering by randomly oriented axially

- symmetric particles[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1991, **8**(6): 871~882
- 11 M. I. Mishchenko, L. D. Travis, A. A. Lacis. *Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002
- 12 P. W. Barber, S. C. Hill. *Light Scattering by Particles: Computational Methods* [M]. Singapore: World Scientific, 1990
- 13 B. Peterson, S. Ström. T-matrix formulation of electromagnetic scattering from multilayered scatterers[J]. *Phys. Rev. D*, 1974, **10**(8): 2670~2684
- 14 Arturo Quirantes. A T-matrix method and computer code for randomly oriented, axially symmetric coated scatterers[J]. *J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 2005, **92**(3): 373~381
- 15 C. B. Bohren, D. R. Huffman. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* [M]. New York: Wiley, 1983
- 16 G. A. D'Almeida, P. Koepke, E. P. Shettle. *Atmospheric Aerosols: Global Climatology and Radiative Characteristics* [M]. Hampton: A. Deepak, 1991