

量子棒中弱耦合极化子有效质量的温度依赖性

额尔敦朝鲁¹ 乌云其木格² 韩 超¹

(¹ 河北科技师范学院凝聚态物理研究所, 河北 秦皇岛 066004)
(² 内蒙古民族大学物理与电子信息学院, 内蒙古 通辽 028043)

摘要 基于 Tokuda-Lee-Low-Pines 变分法研究了温度对非均匀抛物限制势下量子棒中弱耦合极化子有效质量的影响, 推导出量子棒中弱耦合极化子的有效质量 m^* 随量子棒纵横比 e' 、电子-声子耦合强度 α 和温度参数 γ 的变化规律。数值计算结果表明, 量子棒中弱耦合极化子的横向有效质量 m_{\parallel}^* 和纵向有效质量 m_{\perp}^* 均随电子-声子耦合强度 α 的增加而增大, 随温度 T 的升高而减小; 量子棒中极化子的横向有效质量 m_{\parallel}^* 随量子棒纵横比 e' 的增加而增大, 纵向有效质量 m_{\perp}^* 随 e' 的增加而减小。

关键词 量子光学; 量子棒; Tokuda-Lee-Low-Pines 变分法; 极化子; 有效质量; 温度依赖性

中图分类号 O469 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.0827001

Temperature Dependence of Effective Mass of Weak-Coupling Polaron in a Quantum Rod

Eerdunchaolu¹ Wuyunqimuge² Han Chao¹

(¹ Institute of Condensed Matter Physics, Hebei Normal University of Science and Technology, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)
(² College of Physics and Electronic Information, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao, Inner Mongolia 028043, China)

Abstract The influences of temperature on the effective mass of the weak-coupling polaron in an asymmetric parabolic quantum rod are studied based on Tokuda-Lee-Low-Pines variational method. The change law of the effective mass m^* of the weak-coupling polarons with the aspect ratio e' of the quantum rod, the electron-phonon coupling strength α and the temperature parameter γ are derived. Numerical results indicate that the horizontal effective mass m_{\parallel}^* and the vertical effective mass m_{\perp}^* of the weak-coupling polaron in quantum rod will increase with the increase of the electron-phonon coupling strength α , and decrease with the increase of temperature T . The horizontal effective mass m_{\parallel}^* of the polaron will increase with the increase of the aspect ratio e' of the quantum rod. On the contrary, the vertical effective mass m_{\perp}^* of the polaron will decrease with the increase of the aspect ratio e' .

Key words quantum optics; quantum rod; Tokuda-Lee-Low-Pines variational method; polaron; effective mass; temperature dependence

OCIS codes 270.6570; 160.2100; 160.3220; 160.4236

1 引 言

半导体材料生长技术的进步和飞速发展极大地推动了人们对量子阱、量子点等低维纳米结构的广泛研究,使其成为量子功能器件研究领域中的热点^[1~4]。由于量子棒在材料裁剪方面的自由度和在

生物标记^[5]及光电器件^[6]中的广泛应用,因此,近年来量子棒性质的研究更为引人注目。Hu 等^[7]用半经验赝势方法计算了 CdSe 量子棒的电子态; Zhang 等^[8,9]在有效质量包络函数理论的框架下研究了 CdSe 量子棒的线偏振等光学性质; Li 等^[10,11]

收稿日期: 2011-02-25; 收到修改稿日期: 2011-03-29

基金项目: 内蒙古高等学校科学研究项目(NJ101116)资助课题。

作者简介: 额尔敦朝鲁(1960—),男,教授,主要从事凝聚态光学性质方面的研究。E-mail: eerdunchaolu@sohu.com

采用赝势方法分别计算了考虑自旋与轨道耦合、电子-空穴屏蔽库仑相互作用下量子棒的高激发能和不同材料的量子棒中电子的结构。不难看出,上述工作均未涉及声子效应。然而,由于大多数的纳米结构是离子晶体或极性材料,电子-声子耦合强烈地影响着它们的物理性质^[12],因此,近年来量子棒中电子-声子相互作用的问题也逐渐引起人们的重视。Comas 等^[13]用连续介质理论分析了半导体量子棒中表面极化子的光学声子的性质,并将计算出来的结果与球形量子点和准球形量子点进行了比较;王翠桃等^[14]研究了量子棒中弱耦合极化子的基态能量;巴燕燕等^[15]研究了在非均匀抛物限制势下量子棒中弱耦合杂质束缚极化子的性质。但迄今为止,

人们对量子棒中电子-声子相互作用体系热学性质的研究工作尚无报道。事实上,研究有限温度下纳米结构中元激发的性质,对改善和提高器件的热学性能具有实际意义。本文基于 Tokuda-Lee-Low-Pines 变换法研究了量子棒中非均匀抛物限制势下弱耦合极化子有效质量的温度依赖性。

2 理论模型及方法

设量子棒中电子在 x - y 平面内和 z 方向上被不同的抛物势限制,并与离子晶体或极性半导体的体纵光学(LO)声子场相互作用,则量子棒中的电子-LO 声子相互作用体系的哈密顿量为^[14]

$$H = \frac{p_{\parallel}^2}{2m} + \frac{e'^2 p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_{\parallel}^2 \rho^2 + \frac{1}{2e'^2} m \omega_z^2 z^2 + \sum_q \hbar \omega_{\text{LO}} b_q^{\dagger} b_q + \sum_q \left[V_q b_q \exp(i\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho} + \frac{i}{e'} q_z z) + H. c. \right], \quad (1)$$

式中 $m, \mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho}, z)$ 和 \mathbf{p} 分别为电子的带质量、坐标和动量, ω_{\parallel} 和 ω_z 分别为横向和纵向限制频率, $b_q^{\dagger} (b_q)$ 代表波矢为 $\mathbf{q} = (q_{\parallel}, q_z)$ 的 LO 声子的产生(湮灭)算符, e' 为量子棒的纵横比,且

$$V_q = i \left(\frac{\hbar \omega_{\text{LO}}}{q} \right) \left(\frac{\hbar}{2m \omega_{\text{LO}}} \right)^{1/4} \left(\frac{4\pi\alpha}{v} \right)^{1/2}, \quad \alpha = \left(\frac{e^2}{2\hbar \omega_{\text{LO}}} \right) \left(\frac{2m \omega_{\text{LO}}}{\hbar} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\epsilon_{\infty}} - \frac{1}{\epsilon_0} \right), \quad (2)$$

式中 v 为晶体的体积, α 为电子-声子耦合强度, ϵ_{∞} 和 ϵ_0 分别是高频和静态介电常数。

为了讨论量子棒中极化子的有效质量,首先对电子的动量和坐标引入 Tokuda 线性组合算符^[16]

$$p_j = \left(\frac{m\hbar\lambda}{2} \right)^{1/2} (a_j + a_j^{\dagger} + p_{0j}), \quad r_j = i \left(\frac{\hbar}{2m\lambda} \right)^{1/2} (a_j - a_j^{\dagger}), \quad (j = x, y, z) \quad (3)$$

式中 λ 和 \mathbf{p}_0 是变分参数。再讨论算符函数 $U^{-1/2} U_1^{-1} (H - \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_T) U_1 U_2$ 在 $|\phi\rangle$ 态中的期待值。按照变分原理

$$\delta \bar{J} = \delta [\langle \phi | U_2^{-1} U_1^{-1} (H - \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_T) U_1 U_2 | \phi \rangle] = 0, \quad (4)$$

式中

$$\mathbf{P}_T = \mathbf{p} + \sum_q \hbar k b_q^{\dagger} b_q, \quad (5)$$

是系统的总动量, \mathbf{u} 是 Lagrange 乘因子,代表极化子的运动速度。

$$U_1 = \exp \left[-iA \sum_q (\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho} + q_z z / e') b_q^{\dagger} b_q \right], \\ U_2 = \exp \left[\sum_q (f_q b_q^{\dagger} - f_q^* b_q) \right], \quad (6)$$

是 Lee-Low-Pines (LLP) 么正变换^[17], 其中 f_q 和

f_q^* 是变分参数, A 为表征电子-声子耦合程度的物理量,对于本文讨论的量子棒中电子-声子弱耦合情形, $A = 1$ ^[16~18]。

$$|\phi\rangle = |\phi(z)\rangle |\{n_q\}\rangle |\{n_j\}\rangle \quad (7)$$

是有限温度下体系的尝试波函数,其中 $|\phi(z)\rangle$ 为电子 z 方向的波函数,满足 $\langle \varphi(z) | \phi(z)\rangle = 1$, $|n_q\rangle$ 为声子态, $|n_j\rangle$ 为极化子态,根据文献[19],可以近似地将电子数和声子数以其平均数代替。按照量子统计 $\bar{n}_q = [\exp(\gamma) - 1]^{-1}$, $\bar{n} = [\exp(\gamma\lambda/\omega_{\text{LO}}) + 1]^{-1}$, 式中 $\gamma = \hbar\omega_{\text{LO}}/k_B T$ 为温度参数, k_B 是玻耳兹曼常数, T 为热力学温度。

将(1)~(3)式和(5)~(7)式代入(4)式,可确定变分参量 λ, \mathbf{p}_0 和 $f_q (f_q^*)$, 其中

$$f_q = - \frac{V_q^*}{\hbar \omega_{\text{LO}} + \frac{\hbar^2}{2m} (q_{\parallel}^2 + \frac{q_z^2}{e'^2}) (4\bar{n}_q + 1) - \sqrt{\frac{\hbar\lambda}{2m}} \hbar (\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{p}_{0\parallel} + \frac{q_z p_{0z}}{e'})}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 p_{0\parallel} &= \begin{cases} \left(\frac{m\hbar\lambda}{2} \right)^{1/2} \mathbf{u}_{\parallel} / \left\{ \frac{\hbar\lambda}{2} \left[1 - \frac{\alpha e'}{4(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \left[1 + \frac{e'^2}{1-e'^2} - \frac{e'^2 \ln(1/e' + \sqrt{1-e'^2}/e')}{(1-e'^2)^{3/2}} \right] \right] \right\}, & (e' < 1) \\ \left(\frac{m\hbar\lambda}{2} \right)^{1/2} \mathbf{u}_{\parallel} / \left\{ \frac{\hbar\lambda}{2} \left[1 - \frac{\alpha}{6(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \right] \right\}, & (e' = 1) \\ \left(\frac{m\hbar\lambda}{2} \right)^{1/2} \mathbf{u}_{\parallel} / \left\{ \frac{\hbar\lambda}{2} \left[1 - \frac{\alpha e'}{4(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \left[1 - \frac{e'^2}{e'^2 - 1} + \frac{e'^2 \arccos(1/e')}{(e'^2 - 1)^{3/2}} \right] \right] \right\}, & (e' > 1) \end{cases} \quad (9) \\
 p_{0z} &= \begin{cases} \left(\frac{m\hbar\lambda}{2} \right)^{1/2} u_z / \left\{ \frac{\hbar\lambda}{2} \left[e'^2 - \frac{\alpha e'}{2(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \left[-\frac{1}{1-e'^2} + \frac{\ln(1/e' + \sqrt{1-e'^2}/e')}{(1-e'^2)^{3/2}} \right] \right] \right\}, & (e' < 1) \\ \left(\frac{m\hbar\lambda}{2} \right)^{1/2} u_z / \left\{ \frac{\hbar\lambda}{2} \left[1 - \frac{\alpha}{6(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \right] \right\}, & (e' = 1) \\ \left(\frac{m\hbar\lambda}{2} \right)^{1/2} u_z / \left\{ \frac{\hbar\lambda}{2} \left[e'^2 - \frac{\alpha e'}{2(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \left[\frac{1}{e'^2 - 1} + \frac{\arccos(1/e')}{(e'^2 - 1)^{3/2}} \right] \right] \right\}, & (e' > 1) \end{cases} \quad (10)
 \end{aligned}$$

利用上述变分参量,可进一步算得量子棒中弱耦合极化子的有效质量:

$$\langle \{ \bar{n}_q \} | \langle \{ \bar{n}_j \} | U_2^{-1} U_1^{-1} \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{u} U_1 U_2 | \{ \bar{n}_j \} \rangle | \{ \bar{n}_q \} \rangle = m_{\parallel}^* u_{\parallel}^2 + m_z^* u_z^2, \quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned}
 m_{\parallel}^* &= \begin{cases} m / \left\{ 1 - \frac{\alpha e'}{4(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \left[1 + \frac{e'^2}{1-e'^2} - \frac{e'^2 \ln(1/e' + \sqrt{1-e'^2}/e')}{(1-e'^2)^{3/2}} \right] \right\}, & (e' < 1) \\ m / \left[1 - \frac{\alpha}{4(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \right], & (e' = 1) \\ m / \left\{ 1 - \frac{\alpha e'}{4(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \left[1 - \frac{e'^2}{e'^2 - 1} + \frac{e'^2 \arccos(1/e')}{(e'^2 - 1)^{3/2}} \right] \right\}, & (e' > 1) \end{cases} \quad (12) \\
 m_z^* &= \begin{cases} m \left\{ 1 + \frac{\alpha e' (e' - 1)}{4(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \left[-\frac{1}{1-e'^2} + \frac{\ln(1/e' + \sqrt{1-e'^2}/e')}{(1-e'^2)^{3/2}} \right] \right\} / \left\{ e'^2 + \frac{\alpha e'}{2(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \times \right. \\ \left. \left[-\frac{1}{1-e'^2} + \frac{\ln(1/e' + \sqrt{1-e'^2}/e')}{(1-e'^2)^{3/2}} \right] \right\}, & (e' < 1) \\ m / \left[1 - \frac{\alpha}{6(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \right], & (e' = 1) \\ m \left\{ 1 + \frac{\alpha e' (e' - 1)}{4(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \left[\frac{1}{e'^2 - 1} - \frac{\arcsin(\sqrt{e'^2 - 1}/e')}{(e'^2 - 1)^{3/2}} \right] \right\} / \left\{ e'^2 - \frac{\alpha e'}{2(4\bar{n}_q + 1)^{3/2}} \times \right. \\ \left. \left[\frac{1}{e'^2 - 1} - \frac{\arccos(1/e')}{(e'^2 - 1)^{3/2}} \right] \right\}, & (e' > 1) \end{cases} \quad (13)
 \end{aligned}$$

分别表示量子棒中极化子横向有效质量和纵向有效质量。在以上推导中忽略了多声子间相互作用引起的小项和波矢高阶小项的贡献。

3 数值分析与讨论

(12)式和(13)式分别给出了量子棒中弱耦合极化子横向有效质量 m_{\parallel}^* 和纵向有效质量 m_z^* 随量子棒纵横比 e' 、电子-声子耦合强度 α 和温度参数 γ 的变化规律。图 1~4 给出了其数值结果。

图 1 描绘了量子棒中弱耦合极化子的横向有效质量 m_{\parallel}^* 在量子棒不同纵横比 e' 下随温度参数 γ 的变化。由图 1 可以看出, m_{\parallel}^* 随 γ 的增加而增大, 即极化子的横向有效质量 m_{\parallel}^* 随温度 T 的升高而减小。

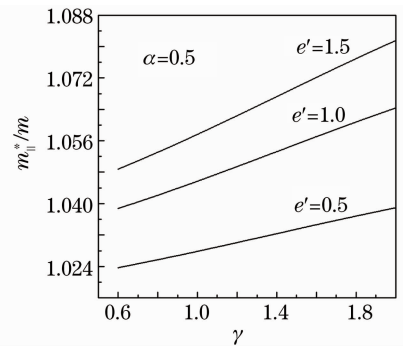


图 1 极化子的横向有效质量 m_{\parallel}^* 在不同纵横比 e' 下随温度参数 γ 的变化

Fig. 1 Horizontal effective mass m_{\parallel}^* of the polaron varying with temperature parameter γ at different aspect ratios e'

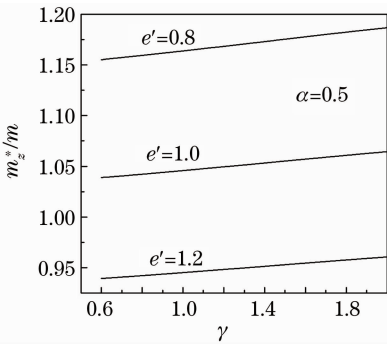


图 2 极化子的纵向有效质量 m_z^* 在不同纵横比 e' 下随温度参数 γ 的变化

Fig. 2 Vertical effective mass m_z^* of the polaron varying with temperature parameter γ at different aspect ratios e'

这一结果的物理图像是,随着温度的升高,量子棒晶格的热振动增强,电子-声子相互作用的强度减弱,直至极化子完全失去它的声子云而变为准自由极化子。由图 1 还可以看出, m_{\parallel}^* 随量子棒纵横比 e' 的增加而增大,这是因为 $e' = L/2R$ (其中 L 为量子棒的纵向长度, R 为量子棒的横向半径), 所以,随着 e' 的增加,量子棒的横向长度变小,以声子为媒介的电子热运动和电子-声子相互作用因粒子横向运动空间的缩小而增强,致使极化子横向有效质量增大。

图 2 给出了量子棒中弱耦合极化子的纵向有效质量 m_z^* 在量子棒不同纵横比 e' 下随温度参数 γ 的变化。由图 2 可以看出, m_z^* 随 γ 的增加而增大,即极化子的纵向有效质量 m_z^* 与横向有效质量 m_{\parallel}^* 具有相同的温度依赖性。但是,由图 2 不难发现, m_z^* 随 e' 的增加而减小,也就是说,极化子的纵向有效质量 m_z^* 随量子棒纵横比 e' 的变化规律与横向有效质量 m_{\parallel}^* 完全相反。可以这样解释,因 $e' = L/2R$, 所以随着量子棒纵横比 e' 的增加,量子棒的纵向长度变大,以声子为媒介的电子热运动和电子-声子相互作用因粒子纵向运动空间的增加而减小,致使极化子纵向有效质量减小。另外,比较图 1 和图 2 还可以看出,极化子的纵向有效质量 m_z^* 相对横向有效质量 m_{\parallel}^* 对量子棒纵横比 e' 的变化更加敏感。这些特性都表现了量子棒的奇特量子尺寸效应。

图 3 描绘了量子棒中弱耦合极化子的横向有效质量 m_{\parallel}^* 在不同耦合强度 α 下随温度参数 γ 的变化。图 4 给出了量子棒中弱耦合极化子的纵向有效质量 m_z^* 在不同耦合强度 α 下随温度参数 γ 的变化。由图 3 和图 4 可以看出, m_{\parallel}^* 和 m_z^* 随 α 的增加而增大,这是因为电子-声子耦合强度越大,电子-声子相互作用

用越强,导致了极化子有效质量的增大。

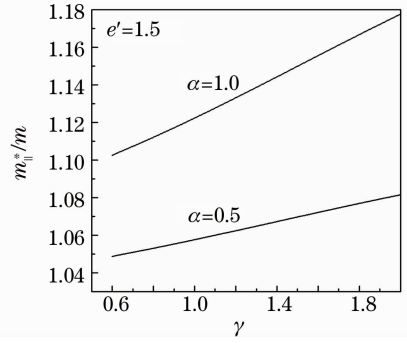


图 3 极化子的横向有效质量 m_{\parallel}^* 在不同耦合强度 α 下随温度参数 γ 的变化

Fig. 3 Horizontal effective mass m_{\parallel}^* of the polaron varying with temperature parameter γ at different coupling strengths α

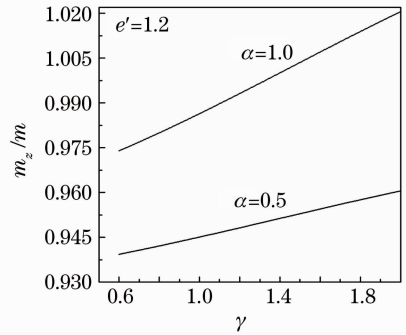


图 4 极化子的纵向有效质量 m_z^* 在不同耦合强度 α 下随温度参数 γ 的变化

Fig. 4 Vertical effective mass m_z^* of the polaron varying with temperature parameter γ at different coupling strengths α

4 结 论

采用 Tokuda-Lee-Low-Pines 变分法研究了温度对非均匀抛物限制势下量子棒中弱耦合极化子有效质量的影响。结果表明,量子棒中弱耦合极化子的横向有效质量 m_{\parallel}^* 和纵向有效质量 m_z^* 均随电子-声子耦合强度 α 的增加而增大,随温度 T 的升高而减小;量子棒中极化子的横向有效质量 m_{\parallel}^* 随量子棒纵横比 e' 的增加而增大,而纵向有效质量 m_z^* 则随量子棒纵横比 e' 的增加而减小,而且,极化子的纵向有效质量 m_z^* 比横向有效质量 m_{\parallel}^* 对量子棒纵横比 e' 的变化更加敏感。

参 考 文 献

1 Zhang Shuang, Guo Shuxu, Gao Fengli *et al.*. Direct current and 1/f noise characteristics of InGaAsP/GaAs high power quantum

- well laser diodes [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(8): 1144~1148
- 张爽, 郭树旭, 邵峰利等. 大功率 InGaAsP/GaAs 量子阱半导体激光器的直流和 1/f 噪声性质[J]. *中国激光*, 2008, **35**(8): 1144~1148
- 2 Chen Libai, Guo Zhenning, Yang Xiaoru. Exciton energy levels of (nc-Si/SiO₂)/SiO₂ multi-layer quantum dots structure [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(5): 1320~1323
- 陈丽白, 郭震宇, 杨小儒. (nc-Si/SiO₂)/SiO₂ 多层量子点结构的激子能级[J]. *光学学报*, 2009, **29**(5): 1320~1323
- 3 Eerdunchaolu, Yu Ruomeng. Temperature dependence of quasi-two-dimensional strong-coupling excitons' effective mass [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(4): 1105~1112
- 额尔敦朝鲁, 于若蒙. 准二维强耦合激子有效质量的温度依赖性[J]. *光学学报*, 2009, **29**(4): 1105~1112
- 4 Eerdunchaolu, Wuyunqimuge, Wang Hongyan. Effective potential of strong coupling bipolaron in a parabolic quantum dot [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(9): 2737~2741
- 额尔敦朝鲁, 乌云其木格, 王鸿雁. 抛物量子点中强耦合双极化子的有效势[J]. *光学学报*, 2010, **30**(9): 2737~2741
- 5 M. Bruchez, M. Moronne, P. Gin *et al.*. Semiconductor nanocrystals as fluorescent biological labels [J]. *Science*, 1998, **281**(5385): 2013~2016
- 6 V. I. Klimov, A. A. Mikhailovsky, Su Xu *et al.*. Optical gain and stimulated emission in nanocrystal quantum dots [J]. *Science*, 2000, **290**(5490): 314~317
- 7 Hu Jiangtao, Wang Linwang, Li Liangshi *et al.*. Semiempirical pseudopotential calculation of electron state of CdSe quantum rods [J]. *J. Phys. Chem. B*, 2002, **106**(10): 2447~2452
- 8 Zhang Xiuwen, Xia Jianbai. Linear-polarization optical property of CdSe quantum rods [J]. *Chinese J. Semiconductors*, 2006, **27**(12): 2094~2100
- 张秀文, 夏建白. CdSe 量子棒的线偏振光学性质[J]. *半导体学报*, 2006, **27**(12): 2094~2100
- 9 X. W. Zhang, Y. H. Zhu, J. B. Xia. Optical properties and g factors of GaAs quantum rods [J]. *Phys. E*, 2006, **33**(2): 376~380
- 10 J. B. Li, L. W. Wang. High energy excitations in CdSe quantum rods [J]. *Nano. Lett.*, 2003, **3**(1): 101~105
- 11 J. B. Li, L. W. Wang. Electronic structure of InP quantum rods: difference between wurtzite, zinc blende, and different orientations [J]. *Nano. Lett.*, 2004, **4**(1): 29~33
- 12 Ci L. Fai, V. Teboul, A. Monteil *et al.*. Polaron in a quasi 1D cylindrical quantum wire [J]. *Condensed Matter Physics*, 2005, **8**[3(43)]: 639~650
- 13 F. Comas, N. Studart, G. E. Marques. Optical phonons in CdSe quantum rods [J]. *Solid State Commun.*, 2004, **130**(7): 477~480
- 14 Wang Cuitao, Xiao Jinglin, Zhao Cuilan. Ground-state energy of weak-coupling polarons in quantum rod [J]. *Chinese J. Semiconductors*, 2009, **30**(7): 072002
- 王翠桃, 肖景林, 赵翠兰. 量子棒中弱耦合极化子的基态能量[J]. *半导体学报*, 2009, **30**(7): 072002
- 15 Ba Yanyan, Xiao Jinglin. Properties of weak-coupling impurity bound polaron in a quantum rod [J]. *Research & Progress of SSE*, 2009, **29**(4): 529~533
- 巴燕燕, 肖景林. 量子棒中弱耦合杂质束缚极化子的性质[J]. *固体电子学研究进展*, 2009, **29**(4): 529~533
- 16 N. Tokuda. A variational approach to the polaron problem [J]. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 1980, **13**(30): L851~L855
- 17 T. D. Lee, F. M. Low, D. Pines. The motion of slow electrons in a crystal [J]. *Phys. Rev.*, 1953, **90**(2): 297~302
- 18 E. Haga. Note on the slow electron in polar crystal [J]. *Prog. Theor. Phys.*, 1954, **11**(425): 449~460
- 19 M. A. Brummell, R. J. Nicholas, M. A. Hopkins *et al.*. Modification of the electron-phonon interactions in GaAs-GaAlAs heterojunctions [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(1): 77~80