

# 改进型分形波带片的焦深特性研究

张芹芹<sup>1</sup> 朱思伟<sup>2\*</sup> 袁小聪<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>南开大学现代光学研究所光电信息技术教育部重点实验室, 天津 300071)  
<sup>2</sup>南开大学人民医院分子医学与纳米光学实验室, 天津 300121)

**摘要** 提出了一种具有增大焦深特性的改进型分形波带片(FZP)。分析并推导了改进型分形波带片基于优化参数  $w$  的周期公式; 计算了改进型分形波带片在非涅耳近似下的衍射光场分布以及对应的横向光场分布特性因子, 包括分辨率因子( $G$ ), 施特雷尔比( $S$ ) 以及旁瓣强度因子( $M$ ); 同时分析了在不同的径向坐标  $r$  和  $r^2$  下的改进型分形波带片的焦深特性, 结果证明在径向坐标  $r$  下, 改进型分形波带片的焦深是常规分形波带片焦深的 1.5 倍以上。分别从横向和纵向两个方面分析了改进型分形波带片的光场分布, 结果表明, 在宽带光照明下, 改进型分形波带片的焦深也大于常规的分形波带片。

**关键词** 衍射; 分形波带片; 周期分布; 焦深

**中图分类号** O438.2; O436.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.0823001

## Focal Depth Properties of Modified Fractal Zone Plate

Zhang Qinqin<sup>1</sup> Zhu Siwei<sup>2</sup> Yuan Xiacong<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Key Laboratory of Optoelectronic Information Science and Technology, Ministry of Education of China, Institute of Modern Optics, Nankai University, Tianjin 300071, China

<sup>2</sup>Laboratory of Molecular Medicine and Nano Optics, the Affiliated Hospital, Nankai University, Tianjin 300121, China

**Abstract** A modified fractal zone plate (FZP) with the character of extending the focal depth is proposed. Through calculating, the period and the structure of modified FZP with the parameter  $w$  are obtained. Within the Fresnel approximation, the diffractive field distribution and the corresponding factors of the transverse field distribution such as superresolution factor  $G$ , Strehl ratio  $S$  and sidelobe strength  $M$  have been studied using the numerical method. The properties of modified FZP in different radial coordinates ( $r$  and  $r^2$ ) also have been studied. The study shows that the modified FZP in  $r$  coordinate have a great improvement of focal depth than conventional FZP. The analysis of the lateral and axial properties shows that the focal depth of the modified FZP is larger than the FZP under the broadband lighting.

**Key words** diffraction; fractal zone plate; distribution of period; focal depth

**OCIS codes** 230.3990; 050.1380; 050.1970

## 1 引 言

在自然界中, 由于分形的一些独特的特性而引起各个领域的科学家们的研究。分形是一类极其零碎而复杂, 但有其自相似性或自仿射性的体系, 最早由 Mandelbrot 于 1974 年提出。分形的研究范围涉

及到极其广泛的领域。在光学领域中, 有关分形的研究主要集中在分形的衍射以及分形结构的超点阵结构和分形多层介质结构的透射和反射特性。Saavedra 等<sup>[1]</sup>综合了分形的概念和常规菲涅耳波带片的概念提出的一种新型的波带片——分形波带片

收稿日期: 2011-03-28; 收到修改稿日期: 2011-04-11

基金项目: 国家 973 计划(2010CB327702)资助课题。

作者简介: 张芹芹(1986—), 女, 博士研究生, 主要从事光学相干层析成像技术的应用以及光束整形等方面的研究。

E-mail: qinqinh@163.com

导师简介: 袁小聪(1963—), 男, 博士, 教授, 主要从事微纳光学及光学旋涡等方面的研究。E-mail: xcyuan@nankai.edu.cn

\* 通信联系人。E-mail: siweiz@medmail.com.cn

(FZP)。同时证明了分形波带片的轴上光强具有自相似性。此后不久, Furlan<sup>[2]</sup>研究了白光入射时 FZP 的焦点特性, 研究表明 FZP 当白光入射时由于多焦点的分形特性具有增大焦深并且减小色散的特点, 进一步扩大了 FZP 的应用范围。而 Davis 等<sup>[3]</sup>利用 LCTV-SLM 第一次得到了其聚焦的实验结果, 与理论计算符合较好。同年, Mousoriu 等<sup>[4]</sup>则进一步研究了波带宽度可变(即缺项)的 FZP, 提出了可变缺项的 FZP, 这对研究 FZP 提供了一个优化参数。2009 年由 Yero 等<sup>[5]</sup>将另一个参数  $\epsilon$  引入到 FZP 中来优化轴上光强分布, 得到了分形广义波带片。参数  $\epsilon$  是周期与透明波带的比值, 是个正整数。参数  $\epsilon$  的给出进一步优化了 FZP, 使得 FZP 的结构以及相应的特性更加灵活的给出。

本文在参数  $\epsilon$  的基础上给出了一个新的参数  $\omega$ , 得到了改进型 FZP, 进一步提高了 FZP 的焦深, 并对其增大焦深的特性做了理论分析。

## 2 原 理

在极坐标下对于圆对称的孔径函数  $p(r)$  在轴上特定点的衍射光强分布, 由菲涅耳衍射公式可得

$$I(z) = \left(\frac{2\pi}{\lambda z}\right)^2 \left| \int_0^a p(r_0) \exp\left(-i\frac{\pi}{\lambda z} r_0^2\right) r_0 dr_0 \right|^2, \quad (1)$$

式中  $r_0$  为孔径变量,  $a$  为孔径函数的半径大小,  $\lambda$  为入射光的波长。为了处理方便, 采用坐标变换:  $\zeta = (r_0/a)^2$ , 可以得到:  $q(\zeta) = q(r_0)$ 。用无量纲坐标  $u = a^2/(2\lambda z)$  简化, 轴上的光强分布可以写为

$$I(u) = 4\pi^2 u^2 \left| \int_0^1 q(\zeta) \exp(-i2\pi u \zeta) d\zeta \right|^2, \quad (2)$$

轴上的光场分布是由孔径函数  $q(\zeta)$  的傅里叶变换得到的。若孔径函数  $q(\zeta)$  具有分形的特点, 则轴上的光场分布也相应的具有分形自相似的特点。常规 FZP 是由 cantor 集得到的, 其产生过程为: 零级 ( $S=0$ ) 是归一化长度为 1 的条状结构, 按照 cantor 集的分布, 在第一级 ( $S=1$ ) 时, 条状结构总共被分割成奇数段 ( $2N-1$ ), 删除偶数段位置, 奇数段位置保留而形成分布; 然后在第一级剩下的  $N$  段中继续按照这种分割与删除, 以此类推形成了 cantor 集合。简言之, 常规 FZP 是由一系列的等间隔的透明与不透明波带按照 cantor 集组成的。分形广义波带片是在常规 FZP 的基础上提出的, 它是通过控制周期与透明波带的比值  $\epsilon$ , 来控制焦点个数的; 但是参数  $\epsilon$  必须是正整数。这在一定程度上限制了波

带片设计的灵活性, 从而影响其光场的分布。为了能够更灵活、全面地分析分形波带片以及其所需的光场分布, 本文在此提出了改进型 FZP, 它是通过控制参数  $\omega$  来优化其光场分布。参数  $\omega$  是在一个周期内的透明波带部分 ( $\gamma$ ) 与不透明波带部分(即缺项  $\xi$ ) 的比值, 不同于参数  $\epsilon$ , 可以取任意正数, 是一个连续可变量。

根据参数  $\omega$  的定义, 推导了改进型 FZP 的周期分布公式, 其推导过程如下: 图 1 是以  $N=2$  为例的改进型 FZP 的产生过程。按照 cantor 集的规则, 每一级划分为  $2N-1=3$  段。在第一级 ( $S=1$ ) 中, 可以得到

$$\begin{cases} 2\gamma_1 + \xi_1 = 1 \\ \gamma_1 = \omega\xi_1 \end{cases}, \quad (3)$$

第一级的周期为

$$p_1 = \gamma_1 + \xi_1, \quad (4)$$

在第二级中继续划分, 去掉偶数段, 在剩余的奇数段中可以得到

$$\begin{cases} 2\gamma_2 + \xi_2 = \gamma_1 \\ \gamma_2 = \omega\xi_2 \end{cases}, \quad (5)$$

周期分布为

$$p_2 = \gamma_2 + \xi_2, \quad (6)$$

以此类推。

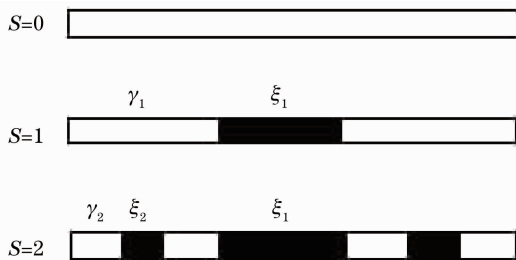


图 1 改进型 FZP 的构造过程

Fig. 1 Construction procedure of modified FZP

最后得到改进型 FZP 的周期分布公式

$$p_s = \frac{\omega^{s-1} + \omega^s}{(2\omega + 1)^s} = \frac{\omega^s(1 + 1/\omega)}{(2\omega + 1)^s}, \quad (7)$$

如果  $N$  取任意整数, 则周期分布为

$$p = \frac{\omega^s(1 + 1/\omega)}{[N\omega + (N - 1)]^s}. \quad (8)$$

从上面的推导可以得到以下结论:

1) 如果  $\gamma = \xi$ , 即  $\omega = \xi/\gamma = 1$ , 周期为  $p = 2/[(2N - 1)^s]$ 。这是常规 FZP<sup>[1]</sup> 的特性, 在一个周期内透明波带与不透明波带是相等的。

2) 如果  $\xi/\gamma = \epsilon - 1$ , 即  $\omega = \epsilon - 1$ , 即  $p/\gamma = (\gamma +$

$\xi)/\gamma = \epsilon, (\epsilon = 1, 2, 3, \dots)$ , 周期为

$$p = \frac{\epsilon}{[N\epsilon - (\epsilon - 1)]^S},$$

这正是分形广义波带片<sup>[5]</sup>的周期分布。

3) 除了以上两点  $\omega$  的特殊取值以外,  $\omega$  的其他取值更进一步优化了 FZP。按照上面的划分与分割的过程, 改进型 FZP 的振幅透射率函数在径向坐标 ( $r$  或  $r^2$ ) 下, 可以通过沿着整个结构的一端旋转一周即可获得, 是由按照一定分布的同心圆环组成的。

根据文献中提到, FZP 由于在主焦点周围有一系列的次焦点的存在, 使得在白光照射下不同波长的次焦点的相互交叠, 从而起到了增大焦深的作用, 同时减小色散。改进型 FZP 是在常规 FZP 基础上

提出的, 相应的也具有增大焦深减小色散的作用。本文就改进型 FZP 增大焦深的特性与常规 FZP 增大焦深的特性进行研究 with 比较。

### 3 结 果

根据(1)式可以计算出改进型 FZP 的光场分布。与常规 FZP 一样, 改进型 FZP 也具有一个主焦点和一系列的次焦点, 但是与之不同的是主焦点对增大焦深起主要作用。图 2 给出了常规 FZP ( $N=2, S=2$ ) 和改进型 FZP ( $N=2, S=2, \omega=2$ , 在径向坐标  $r$  和  $r^2$  下) 在三个波长的照射下的轴向的光场分布。

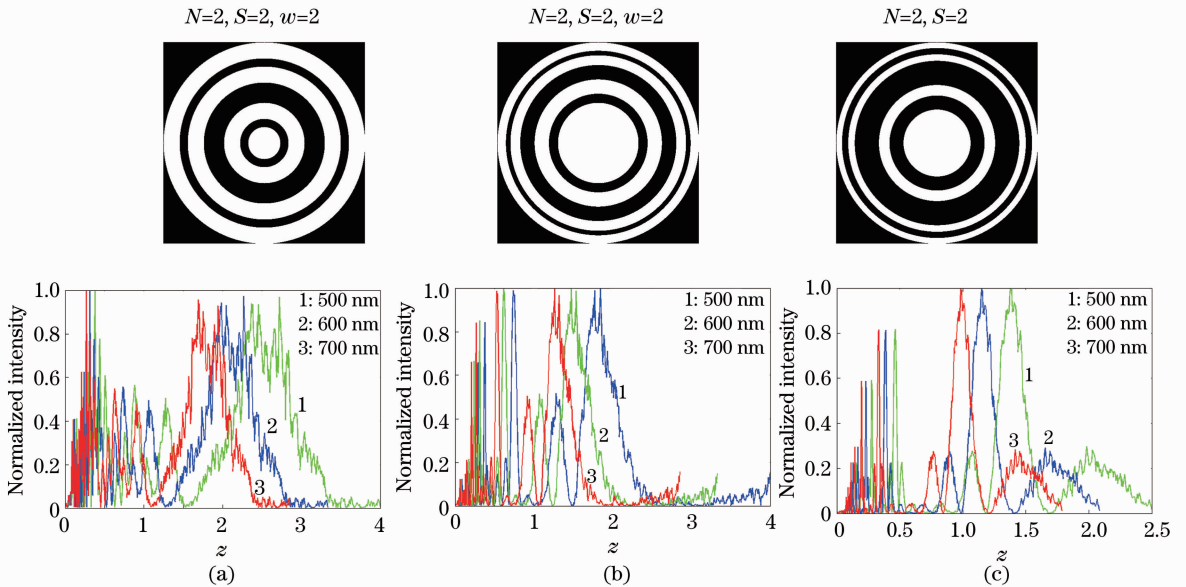


图 2 改进型 FZP 在 (a) 径向坐标  $r$  和 (b) 径向坐标  $r^2$  下的结构图及轴向光强分布; (c) FZP 的结构图及轴向光强分布  
Fig. 2 Structure and axial intensity distributions of modified FZP pupil in (a)  $r$  and (b)  $r^2$ , and (c) structure and axial intensity distribution of FZP

从结果上可以看出, 改进型 FZP 的光场分布要比常规 FZP 的分布更加均匀, 且主焦点对增大焦深起到更大的作用, 同时焦深要比常规 FZP 得大。然而在不同的径向坐标  $r$  和  $r^2$ , 其他参数相同的条件下, 分形波带片的光场分布有所变化, 因此对焦深有一定的影响。在径向坐标  $r$  下, 改进型 FZP 增大焦深的作用更加明显。这对研究 FZP 增大焦深的特性具有重要意义。由于在不同径向坐标下, 波带片的光场分布不同。需要从普遍意义上对改进型 FZP 进行研究, 即对参数  $\omega$  连续变化进行研究并观察其特性。

改进型 FZP 是二元衍射光学器件, 由一系列同心圆环组成的, 以  $N=2, S=2$  为例, 各个同心圆环的归一化半径为  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$  和 1, 同心环之间是由 0 和  $\pi$  或者 0 和 1 交替出现的。图 3 给出了参数为  $N=2, S=2$  不同  $\omega$  取值对应的改进型 FZP 的结构图以及对应的光场分布。从图 3 可以得到, 在相同参数的情况下, 不论  $\omega$  的取值如何变化, 在坐标  $r$  的波带片总要比坐标  $r^2$  下的焦深大。表 1 给出了在坐标  $r$  下,  $\omega$  连续变化时所对应的各个半径的取值大小。

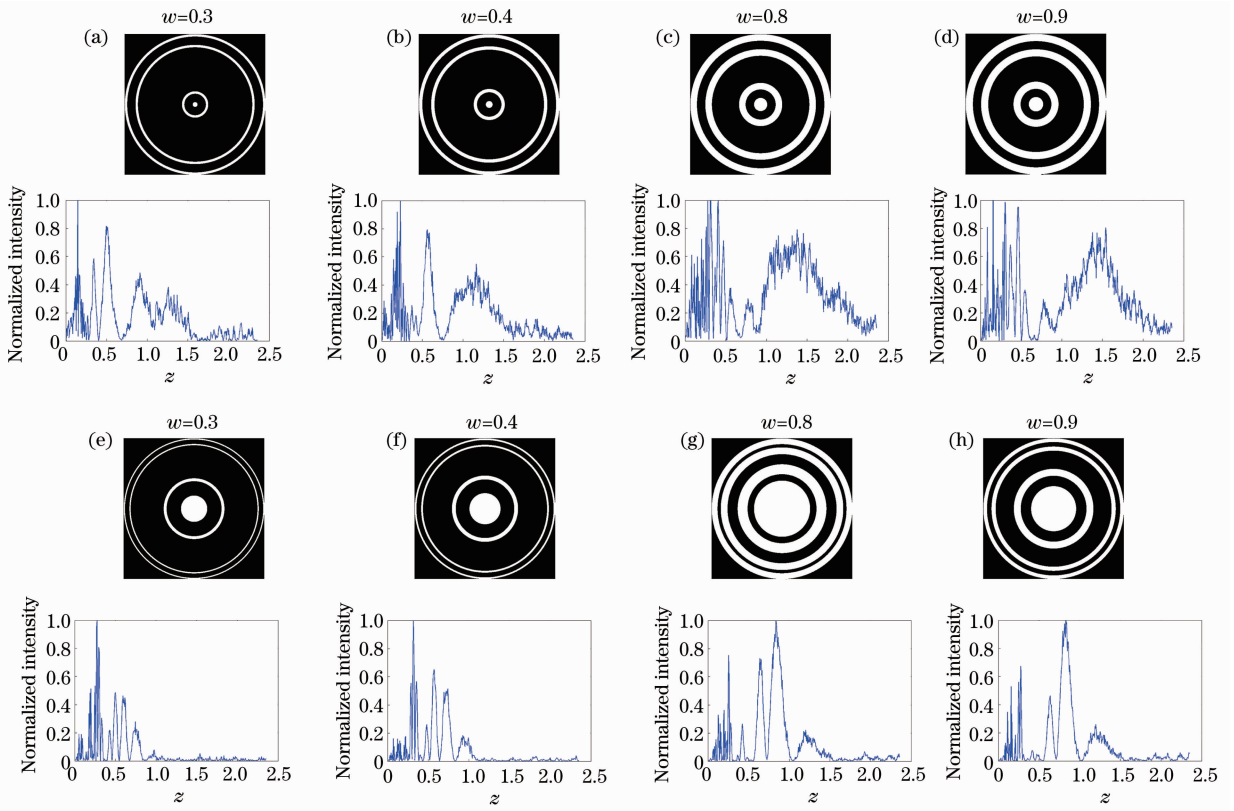


图 3 分别在  $r$  [(a)~(d)]和  $r^2$  [(e)~(h)]不同的径向坐标下,不同  $w$  的改进型 FZP 的结构图及其轴向光强分布  
Fig. 3 Structure and axial intensity distributions of modified FZP with different  $w$  pupil in  $r$  [(a)~(d)] and in  $r^2$  [(e)~(h)]

表 1 在  $N=2, S=2$  下不同  $w$  取值的改进型 FZP 的参数分布  
Table 1 Parameters of modified FZP with different  $w$  at  $N=2, S=2$

$w$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$
0.3	9/256	39/256	48/256	208/256	217/256	247/256
0.4	4/81	14/81	18/81	63/81	67/81	77/81
0.5	1/16	3/16	4/16	12/16	13/16	15/16
0.6	9/121	24/121	33/121	88/121	97/121	112/121
0.7	49/576	119/576	168/576	408/576	457/576	527/576
0.8	16/169	36/169	52/169	117/169	133/169	153/169
0.9	81/784	171/784	252/784	532/784	613/784	703/784
1	1/9	2/9	3/9	6/9	7/9	8/9
1.5	9/64	15/64	24/64	40/64	49/64	55/64
2	4/25	6/25	10/25	15/25	19/25	21/25

对于超分辨成像系统,通常采用三个指标定量描述横向分辨率点扩展函数的性能:超分辨因子  $G$ , 施特雷尔比  $S$  和旁瓣强度因子  $M$ <sup>[6~10]</sup>。为了更全面地分析改进型 FZP 的成像特性,对相应的横向特性因子  $G, S$  和  $M$  也做了相关的研究。超分辨因子  $G$  是指系统加入衍射光学器件与未加入时点扩展函数的半峰全宽之比,描述了系统的分辨率的特性;施特雷尔比  $S$  是指加入衍射光学器件与未加入时主瓣中心强度值之比,反映了光学系统对光的利用效率;旁瓣

强度比  $M$  是指加入衍射光学器件与未加入时点扩展函数的最高旁瓣强度之比,代表了光学系统的背景噪声水平。 $G$  越小则分辨率越高, $S$  越大则主瓣能量利用率越高, $M$  越小则旁瓣噪声越低。对于一个比较理想的光学系统,需要  $G$  和  $M$  的取值越小越好,而  $S$  的取值需要越大越好。通过上面的定义对这三个因子进行了计算与模拟。图 4 给出了在  $r$  坐标下,改进型分形波带片随着  $w$  的不同取值而得到的  $G, S$  和  $M$  的曲线分布,从图 4 中可以看到,分辨率

因子  $G$  的取值都小于 1, 也就是说系统中加入改进型 FZP 与不加时, 分辨率是有所提高的; 同时从  $S$  和  $M$  的曲线也可以看出, 系统中加入改进型 FZP 对成像质量是有利无害的。其中图 4 中的五角星是常规 FZP ( $N = 2, S = 2$ ) 在  $r^2$  坐标下得到的  $G, S, M$  的取值大小。通过与在  $r$  坐标下的相应值比较可以得到: 虽然分辨率没有什么变化的, 但是施特雷尔比  $S$  和旁瓣强度因子  $M$  与有很大变化, 降低了成像质量, 因此在  $r$  坐标下得到的 FZP 成像特性要比  $r^2$  坐标下的好。从横向和纵向的光场分布的研究结果表明, 本文给出的改进型 FZP 的焦深要比常规 FZP 的大, 且具有更加灵活的设计参数  $w$ , 增大了 FZP 的应用范围和价值。对于不同的系统要求, 可以根据具体情况进行选择设计与应用。

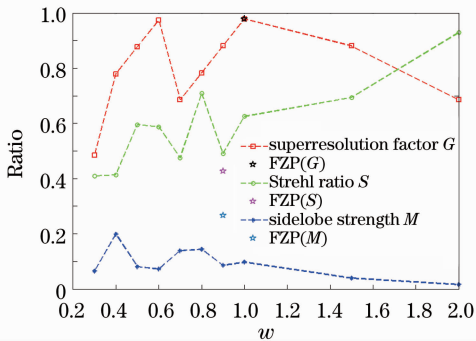


图 4 分辨率因子  $G$ , 施特雷尔比  $S$  和旁瓣强度因子  $M$  随不同  $w$  取值的曲线分布

Fig. 4 Superresolution factor ( $G$ ), Strehl ratio ( $S$ ) and sidelobe strength factor ( $M$ ) with different  $w$

## 4 结 论

经过分析可以得出, 在常规 FZP 的基础上增加了一个优化参数  $w$  得到了改进型 FZP。优化参数  $w$  的给出极大地优化了 FZP 的设计的灵活度和轴

上的光强分布; 从光场的横向和纵向两个方面进行分析, 得到改进型 FZP 的焦深要比常规 FZP 的焦深要大且成像特性也比较好。在坐标  $r$  下, 改进型 FZP 增大焦深的作用更加明显, 且大约是常规 FZP 焦深的 1.5 倍。改进型 FZP 的提出, 对需要大焦深的光学系统提供了一种新的方法。

## 参 考 文 献

- 1 G. Saavedra, W. D. Furlan, J. A. Monsoriu. Fractal zone plates [J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(12): 971~973
- 2 W. D. Furlan, G. Saavedra, J. A. Monsoriu. White-light imaging with fractal zone plates [J]. *Opt. Lett.*, 2007, **32**(15): 2109~2111
- 3 Jeffrey A. Davis, Laura Ramirez, María Luisa Calvo *et al.* Focusing properties of fractal zone plates: experimental implementation with a liquid-crystal display [J]. *Opt. Lett.*, 2004, **29**(12): 1321~1323
- 4 J. A. Monsoriu, G. Saavedra, W. D. Furlan. Fractal zone plates with variable lacunarity [J]. *Opt. Express*, 2004, **12**(18): 4227~4234
- 5 O. M. Yero, M. F. Alonso, G. M. Vega *et al.* Fractal generalized zone plates [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2009, **26**(5): 1161~1166
- 6 C. J. R. Sheppard, S. Ledesma, J. Campos *et al.* Improved expressions for performance parameters for complex filters [J]. *Opt. Lett.*, 2007, **32**: 1713~1715
- 7 Linbo Liu, Frédéric Diaz, Liang Wang *et al.* Superresolution along extended depth of focus with binary-phase filters for the Gaussian beam [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2008, **25**(8): 2095~2101
- 8 Wang Haifeng, Gan Fuxi, Chen Zhongyu. A new superresolution element [J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(5): 593~596
- 9 王海凤, 干福熹, 陈仲裕. 一种新型衍射超分辨光学器件 [J]. *光学学报*, 2001, **21**(5): 593~596
- 10 Ding Hongping, Li Qinghui, Zou Wenyi. Design of 3-zone amplitude-type superresolution pupil filters [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(9): 1177~1180
- 11 丁洪萍, 李庆辉, 邹文艺. 三区振幅型超分辨光瞳滤波器的设计 [J]. *光学学报*, 2004, **24**(9): 1177~1180
- 12 Yun Maojin, Wang Mei, Kong Weijin *et al.* Axial focal shift and extended focal depth with tunable filter [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(3): 0311003
- 13 云茂金, 王 美, 孔伟金等. 可调光瞳滤波器的轴向焦移及扩展焦深 [J]. *光学学报*, 2011, **31**(3): 0311003