

# 基于解耦差分泽尼克待定系数法的 二维横向剪切波面重建算法

彭爱华<sup>1,2,3</sup> 叶红卫<sup>1,2</sup> 李新阳<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>中国科学院光电技术研究所自适应光学研究室, 四川 成都 610209  
<sup>2</sup>中国科学院自适应光学重点实验室, 四川 成都 610209; <sup>3</sup>中国科学院研究生院, 北京 100049

**摘要** 横向剪切干涉术是一种自参考干涉计量技术,其原理是被检测波前与其自身被剪开的波前之间在重叠范围内相干涉,由干涉图得到两相互剪切波前的波前差,通过波面重建算法得到待测波面。在波面重建算法中,泽尼克待定系数法是其中的一种。分析了横向剪切干涉技术的测量原理;提出了一种新的基于解耦差分泽尼克待定系数法的二维横向剪切波面重建算法。理论分析和数值仿真表明,该算法简单直观,复原精度高,而且可用直角坐标系下的差分泽尼克多项式直接拟合环形波面。

**关键词** 自适应光学; 横向剪切干涉技术; 二维; 波前重构; 差分泽尼克待定系数法; 解耦

**中图分类号** O436.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.0801001

## 2D Lateral Shearing Wave-Front Reconstruction Based on Decoupling Difference Zernike Future Defining Coefficient Method

Peng Aihua<sup>1,2,3</sup> Ye Hongwei<sup>1,2</sup> Li Xinyang<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> The Laboratory on Adaptive Optics, Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China  
<sup>2</sup> The Key Laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China  
<sup>3</sup> Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract** Lateral shearing interferometry is a reference-free technique. The wavefront under test interferes with a laterally sheared copy of itself in the superposed range. The wave-front difference of the two sheared wavefronts is obtained from interferogram, the wavefront could be reconstructed using some wavefront reconstruction algorithm. The Zernike underdetermined coefficient method based on difference Zernike polynomial is one of the wavefront reconstruction algorithms. The measuring principle of lateral shearing interferometry is introduced; 2D shearing wavefront reconstruction based on decoupling difference Zernike under determined coefficient method is proposed. It is indicated by theoretical analysis and numerical simulation that the proposed method is simple, accurate and could be used to recover annular wavefront with Zernike polynomials in rectangular coordinates.

**Key words** adoptive optics; lateral shearing interferometry; two dimension; wavefront reconstruction; difference Zernike underdetermined coefficient method; decoupling

**OCIS codes** 010.1080; 010.7350; 110.1220

## 1 引 言

横向剪切干涉仪(LSI)结构简单,其共光路特性使得它具有很好的稳健性和稳定性,可以在非稳环境和其他许多商用干涉仪无法有效工作的环境下进行探测。但横向剪切干涉仪没有标准波面,待测

波面和干涉条纹之间没有直接的对应关系,因此横向剪切干涉波面测量必须分为两步:获得剪切波面分布和重建原始波前。在重建算法中,主要有网格点法<sup>[1]</sup>、积分法<sup>[2]</sup>、待定系数法<sup>[3]</sup>和最小二乘法<sup>[4]</sup>等。网格点法精度较高,但只能用于二维剪切,硬件

收稿日期: 2011-03-07; 收到修改稿日期: 2011-04-26

基金项目: 国家 863 计划资助课题。

作者简介: 彭爱华(1984—),女,硕士研究生,主要从事横向剪切干涉仪方面的研究。E-mail: aihua03281225@163.com

导师简介: 李新阳(1971—),男,研究员,博士生导师,主要从事自适应光学等方面的研究。E-mail: xyli@ioe.ac.cn

要求较高,同时存在运算量巨大的问题;积分法能应用于一维或者二维剪切的情况,但只适用于小剪切量干涉;最小二乘法利用优化算法求解最小二乘方程组,精度受到一定影响。泽尼克待定系数法在横向剪切干涉领域的应用是利用泽尼克多项式对剪切相位进行拟合求出剪切相位泽尼克系数,再通过  $x, y$  方向剪切相位泽尼克多项式系数与被测相位泽尼克多项式系数之间的直接转换矩阵,最终求得被测相位的泽尼克系数<sup>[5,6]</sup>。但是,一方面由于泽尼克多项式本身的复杂性,系数之间直接转换矩阵的求解异常困难,使得这种方法在二维横向剪切干涉领域的应用仅局限于对低阶相位的探测(一般为前 35 阶泽尼克像差),很难推广;另一方面由于转换矩阵非奇异,所得系数之间存在耦合,需要找出真实系数与两个方向分别求得的系数之间的关系才能最终确定真实系数,然而这种关系不易确定;最后,在实际应用中因无法预知被测相位的泽尼克阶数而导致误差。刘晓军等<sup>[6]</sup>采取了自适应的待定系数法试图解决这个问题,但其对低阶像差的复原误差仅为  $\lambda/300$ 。

针对泽尼克待定系数法的这些缺点,本文参照径向剪切波面复原的差分泽尼克待定系数法的一般原理,提出了一种新的基于解耦差分泽尼克待定系数法的二维横向剪切波面复原算法,利用差分泽尼克多项式对两个方向的剪切波前进行拟合,分别求出两个方向的剪切泽尼克系数,对系数进行平均,再利用转换矩阵便可直接求解被测相位的真实系数。转换矩阵的求解过程简单,而且可以利用它对系数进行解耦,因而可以更方便准确地重建波面。

## 2 横向剪切干涉原理

横向剪切干涉(以  $x$  方向剪切为例)的基本原理是以被测波前  $\tilde{\phi}(x, y)$  与其自身的剪开波前  $\tilde{\phi}(x + S_x, y)$  在重叠范围内干涉。其原理图如图 1 所示。

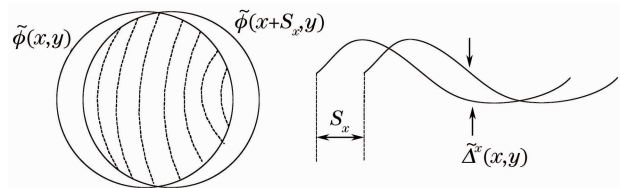


图 1 横向剪切干涉原理

Fig. 1 Schematics of a lateral shearing interferometry

从图中可见叠加部分光程差为

$$\tilde{\Delta}^x(x, y) = \tilde{\phi}(x, y) - \tilde{\phi}(x + S_x, y), \quad (1)$$

式中  $\tilde{\phi}(x, y)$  是原始波面,  $\tilde{\phi}(x + S_x, y)$  是其剪开波面,  $\tilde{\Delta}^x(x, y)$  是剪切波前差,均以弧度为单位,  $S_x$  为

剪切量。干涉条纹实际反映了波面  $x$  方向上间距为  $S_x$  的两点的相位差的影响,因此利用横向剪切干涉技术进行波面测量通常分为两个步骤进行:1) 利用干涉图处理技术获得剪切波面  $\tilde{\Delta}^x(x, y), \tilde{\Delta}^y(x, y)$ ; 2) 重建剪切波面。由  $\tilde{\Delta}^x(x, y), \tilde{\Delta}^y(x, y)$  获得原始波面  $\tilde{\phi}(x, y)$ , 在波面重建算法中,基于差分泽尼克的待定系数法是其中一种。

## 3 差分泽尼克待定系数算法

差分泽尼克待定系数法因在径向剪切干涉波面复原中不存在耦合,被广泛应用于该领域。仿照其原理,基于差分泽尼克待定系数法的二维横向剪切波面复原算法的原理可以这样表述:假设以泽尼克多项式为基底的原始波面

$$\tilde{\phi}(x, y) = \sum_{m=1}^M a_m z_m(x, y), \quad (2)$$

式中  $a_m$  为原始波面的第  $m$  阶泽尼克多项式对应的系数,  $z_m$  为第  $m$  阶泽尼克多项式,  $M$  为用于拟合的泽尼克多项式的项数。根据剪切原理,剪切波面为

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^x(x, y) &= \tilde{\phi}(x, y) - \tilde{\phi}(x + S_x, y) = \\ &= \sum_{m=1}^M a_m [z_m(x, y) - z_m(x + S_x, y)] = \\ &= \sum_{m=1}^M a_m Z_m(x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$Z_m = z_m(x, y) - z_m(x + S_x, y), \quad (4)$$

为第  $m$  ( $m = 1, 2, 3 \dots M$ ) 阶泽尼克波前剪切差(以下称第  $m$  阶差分泽尼克多项式)。记  $\tilde{\Delta}_i^x$  为在第  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N_x, N_x$  为总的有效采样点数)点的理论波面差分值,  $\Delta_i^x$  为实际测量的第  $i$  点的剪切波面值,这样构造最小二乘代价函数

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_x} (\Delta_i^x - \tilde{\Delta}_i^x)^2. \quad (5)$$

令  $\partial \chi^2 / \partial a_m = 0$ , 可得

$$\sum_{m=1}^M \mu_{jm} a_m = \beta_j, \quad (6)$$

式中

$$\mu_{jm} = \sum_{i=1}^{N_x} Z_j(x_i, y_i) Z_m(x_i, y_i),$$

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{N_x} \Delta_i^x Z_j(x_i, y_i).$$

解(6)式就可以得到  $a_m^x$ 。同理由  $y$  方向的剪切波前可以求得另外一组系数  $a_m^y$ 。对两组系数求平均,再通过泽尼克拟合可以得到  $\tilde{\phi}(x, y)$ 。

该方法的基础是求得差分泽尼克多项式  $Z_m$ 。表

1 显示了直角坐标系下第 3 到第 6 阶差分泽尼克多项式的表达式,可以看出  $Z_4$  和  $Z_5, Z_6$  和  $Z_7$  具有相关性。由表 1 可以得知,差分泽尼克多项式线性相关,不能构成一组基底,利用这组多项式对剪切波面进行最小二乘拟合时所求得的系数并非就是原始波面的真实系数,系数之间存在耦合,而且  $x, y$  方向的系数之间存在非一致性,也就是说对于第  $m$  阶泽尼克系数,有可能  $a_m^x$  (或  $a_m^y$ ) 等于真实系数,而  $a_m^y$  (或  $a_m^x$ ) 不等于真实系数;或者  $a_m^x$  与  $a_m^y$  都不等于真实系数,这样两组系数简单平均会导致重建误差非常大。

 表 1  $x$  方向差分泽尼克多项式表

 Table 1 Difference Zernike polynomial along  $x$  direction

Zernike polynomial	$Z_m(x, y)$	$Z_m(x, y)$ described on Zernike polynomials
$z_3 = 2xy$	$Z_3 = 2S_x y$	$Z_3 = 2S_x z_1$
$z_4 = 2x^2 + 2y^2 - 1$	$Z_4 = 4xS_x + 2S_x^2$	$Z_4 = 4S_x z_2 + 2S_x^2$
$z_5 = x^2 - y^2$	$Z_5 = 2xS_x + S_x^2$	$Z_5 = 2S_x z_2 + S_x^2$
$z_6 = 3x^2 y - y^3$	$Z_6 = 6xyS_x + 3S_x^2 y$	$Z_6 = 3S_x z_3 + 3S_x^2 z_1$
$z_7 = 3x^2 y + 3y^3 - 2y$	$Z_7 = 6xyS_x + 3S_x^2 y$	$Z_7 = 3S_x z_3 + 3S_x^2 z_1$

图 2 显示了用 65 阶差分泽尼克多项式前 65 阶泽尼克像差进行处理的重建效果统计图,由于上述原因致使大部分阶数泽尼克像差的重建精度很低,只有例如第 4, 12, 14, 22, 24 等阶数的重建精度相对较高。这里重建精度用重建波面与被测波面之差所形成的残差波面均方根值与被测波面均方根(RMS)值之比(重建误差)来衡量。比如对于  $a_6 = 2$  的波面形成的双向剪切波面进行处理,利用上述原理所得到的  $x, y$  方向的泽尼克系数分别为  $a_4 = 1, a_6 = 1$  和  $b_4 = 2$ , 这样对两组系数平均后所得系数为  $a'_4 = 1.5, a'_6 = 0.5$ , 波面的重建误差为 0.3530。

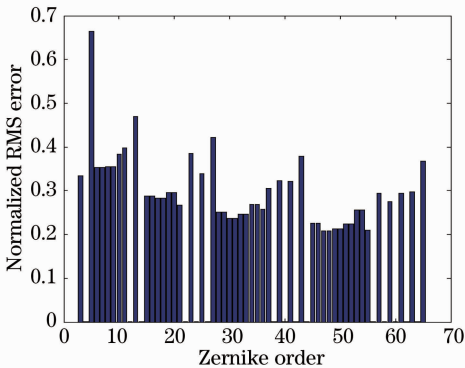


图 2 差分泽尼克法对第 3 到 65 阶泽尼克像差的重建误差统计图

Fig. 2 Error statistical figure of wavefront reconstruction of the 3rd to 65th Zernike aberration using difference Zernike method

为了提高重建精度,必须对所求的泽尼克系数进行解耦。首先依照(4)式求出有效采样范围中的一组泽尼克剪切波前多项式,将这组泽尼克剪切波前多项式中的每一项拉成列向量依次序保存成矩阵。

对于第  $m$  阶系数为 1 的泽尼克像差,利用已得矩阵与上述传统的差分泽尼克待定系数法可以求得一组泽尼克系数  $\tilde{\mathbf{a}}'_m = [\tilde{a}'_{m1}, \tilde{a}'_{m2}, \dots, \tilde{a}'_{mM}]^T$  ( $M$  为拟合阶数)。将每一阶泽尼克像差进行上述处理后所得系数组合,得到矩阵  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = [\tilde{a}'_1, \tilde{a}'_2, \tilde{a}'_3, \dots, \tilde{a}'_M]. \quad (7)$$

如前所述  $\mathbf{P}$  的各列之间线性相关,存在耦合。

对于泽尼克系数为  $a_m$  的波前,利用泽尼克剪切波前基底矩阵可求出两组泽尼克系数  $a_m^x, a_m^y$ , 求平均后得  $\mathbf{a}'_m$ ,  $\mathbf{a}'_m$  与  $\mathbf{a}_m$  之间存在关系

$$\mathbf{a}'_m = \mathbf{P} \mathbf{a}_m. \quad (8)$$

从而

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{P}^+ \mathbf{a}'_m. \quad (9)$$

$\mathbf{P}^+$  为矩阵  $\mathbf{P}$  的广义逆。利用  $\mathbf{P}$  对  $\mathbf{a}'_m$  进行修正,相当于对传统差分泽尼克待定系数法所求系数进行解耦。以  $\mathbf{a}_m$  为系数进行泽尼克拟合就可以得到被测波前。

## 4 仿真结果

仿真验证过程中,模拟的数字波面为  $240 \text{ pixel} \times 240 \text{ pixel}$  的数字窗口(尺寸为  $2.38 \text{ cm}$ )范围内,外半径为  $1 \text{ cm}$ ,内半径为  $0.2 \text{ cm}$  的环形波面,横向剪切的剪切量为  $0.15 \text{ cm}$ 。为了说明本文算法能很好地解决差分泽尼克待定系数法在二维横向剪切干涉波前复原中存在的耦合问题,用前 65 阶剪切泽尼克多项式对  $a_6 = 2$  的波面形成的双向剪切波面进行处理,解耦后得到的泽尼克系数为  $a_6 = 2$ ,其他阶均为极小的接近于 0 (小于  $10^{-14}$ ) 的数,因而能够精确重建输入波面,重建误差为  $2.076 \times 10^{-16}$ 。

为了说明算法的稳定性,分别选取了 20, 30, 40, 45,  $\dots$ , 100 阶的差分泽尼克多项式对  $a_6 = 0.8, a_{14} = 1, a_{23} = 2, a_{29} = -0.6, a_{35} = 1, a_{41} = -0.4, a_{49} = 0.3, a_{55} = -0.2, a_{63} = 0.5$  的像差进行处理,得到的波前重建精度显示于图 3。可见用于拟合的差分泽尼克多项式的阶数  $N_s$  小于待测波前最高阶数  $N_f$  (如  $N_f = 63$ ) 时,存在比较大的截断误差(图 4 给出了利用 55 阶差分泽尼克多项式进行处理的情况,重建误差为 0.2385);当  $N_s \geq 63$  时,复原精度非

常高(重建误差小于  $10^{-14}$ ),说明不存在模式混淆(图 5 展示了利用 65 阶差分泽尼克多项式进行处理的情况,重建误差为  $5.152 \times 10^{-15}$ )。因此影响本算法精度的最大因素是  $N_s$  的选取。实际应用中,在未知被测波面的组成情况下,为了避免  $N_s$  小于被测波面最高泽尼克阶数时引起较大重建误差,可以利用尽量多阶差分泽尼克多项式(比如 100 阶)进行处理。

此外,所有的仿真结果都是对环形波面的处理,可见本算法对于环形波面复原并不需要像一般的模式法波前复原那样必须要用环形泽尼克多项式。

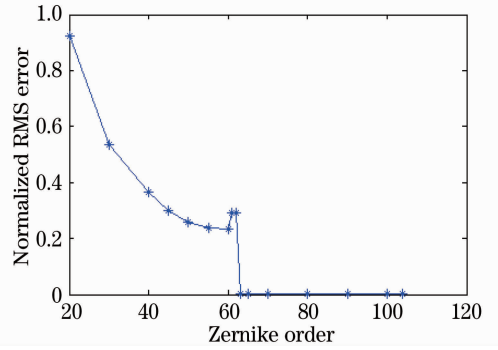


图 3 算法稳定性分析图

Fig. 3 Stability of the decoupled method

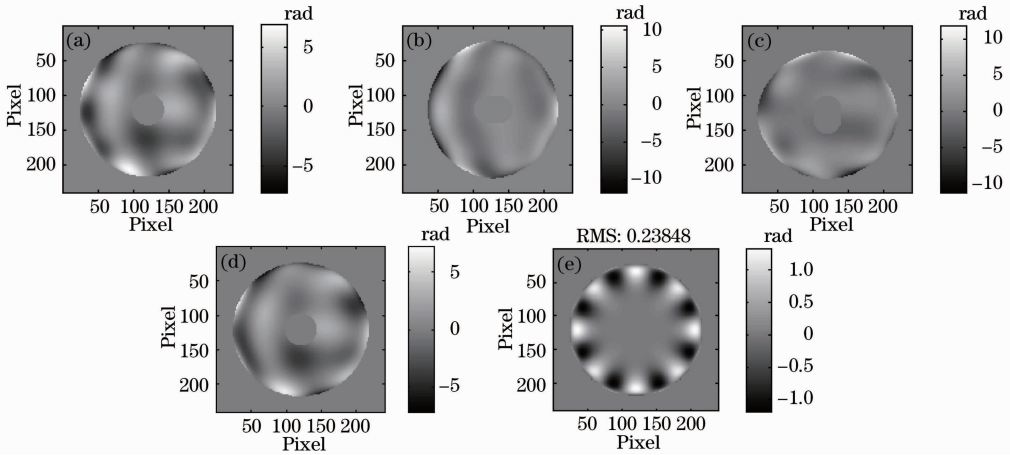


图 4  $N_s < N_f$  时解耦的差分泽尼克待定系数法对给定波面的重建效果图。(a) 被测波面; (b) 由(a)形成的  $x$  方向剪切波面; (c)  $y$  方向的剪切波面; (d) 解耦的差分泽尼克待定系数法重建波面; (e), (a)与(d)的残差波面(RMS为相对误差值)

Fig. 4 Reconstruction of random wave-front when  $N_s < N_f$  by decoupled difference Zernike method. (a) Tested wave-front; (b) shearing wave-front along  $x$  direction; (c) shearing wave-front along  $y$  direction; (d) recovered wave-front using the decoupled one; (e) residual wave-front between (a) and (d)

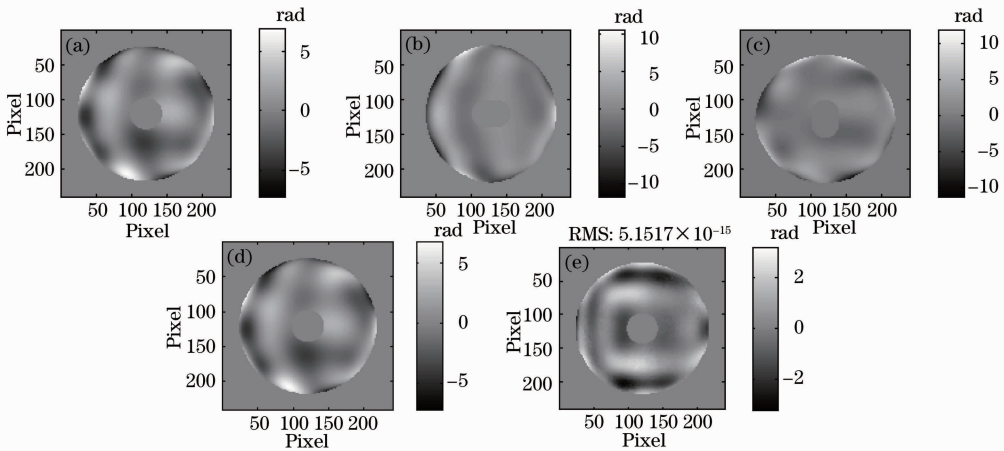


图 5  $N_s > N_f$  时解耦的差分泽尼克待定系数法对给定波面的重建效果图。(a) 被测波面; (b)由(a)形成的  $x$  方向剪切波面; (c)  $y$  方向的剪切波面; (d)解耦的差分泽尼克待定系数法重建波面; (e) (a)与(d)的残差波面(RMS为相对误差值)

Fig. 5 Construction of random wave-front when  $N_s > N_f$  by decoupled difference Zernike method. (a) Tested wave-front; (b) shearing wave-front along  $x$  direction; (c) shearing wave-front along  $y$  direction; (d) recovered wave-front using the decoupled one; (e) residual wave-front between (a) and (d)

## 5 结 论

鉴于传统的泽尼克待定系数法算法复杂的缺陷,提出了基于解耦差分泽尼克待定系数法的二维横向剪切波面重建算法,复原精度极高,且不存在模式法波前复原固有的模式混淆问题。不同于传统的泽尼克待定系数法,它是用差分泽尼克多项式对剪切波前进行拟合,因而不需要进行复杂的转换矩阵计算,也不需要找出两个方向分别求得的泽尼克系数与真实系数之间的关系,只需直接求出系数耦合矩阵  $\mathbf{P}$ ,利用  $\mathbf{P}$  对系数解耦即可求得真实系数,而  $\mathbf{P}$  的求解直观简单。对于环形波面,不需要特别地用环形区域上的泽尼克多项式进行拟合,这也是传统的泽尼克待定系数法所不具有的优点。

### 参 考 文 献

1 M. P. Rimmer, J. C. Wyant. Method for evaluating lateral

- shearing interferometry [J]. *Appl. Opt.*, 1974, **13**(3): 623~629
- 2 H. Schreiber, J. Schwider. Lateral shearing interferometer based on two Ronchi phase gratings in series[J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(22): 5321~5324
- 3 S. Okuda, T. Nomura, K. Kamiya *et al.*. High-precision analysis of a lateral shearing interferogram by use of the integration method and polynomials[J]. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(28): 5179~5186
- 4 M. Servin, D. Malacara, J. L. Marroquin. Wave-front recovery from two orthogonal sheared interferograms[J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(22): 4343~4348
- 5 Gao Bilie. The mathematical principle of quantitative process and the technique in sampling process about lateral shearing interference[J]. *Optical Instruments*, 2001, **23**(3): 31~41
- 高必烈. 剪切干涉仪的定量处理数学原理及采样处理技巧[J]. *光学仪器*, 2001, **23**(3): 31~41
- 6 Liu Xiaojun, Gao Yongsheng, Zhang Ming *et al.*. Adaptive wave front reconstruction based on Zernike polynomials in shearing interferometry [J]. *China Mechanical Engineering*, 2003, **14**(3): 252~255
- 刘晓军,高咏生,章明等. 剪切干涉测量中基于 Zernike 多项式的自适应波前重建[J]. *中国机械工程*, 2003, **14**(3): 252~255