原子测量对耦合腔系统中纠缠特性的影响

卢道明

(武夷学院电子工程系,福建武夷山 354300)

摘要 考虑将 W 态中的两个二能级原子分别注入耦合腔 A 和 B 中,并且原子与腔场发生共振相互作用的情况。 利用 Negativity 熵来描述两子系统间的纠缠,采用数值计算方法研究了腔内原子与原子间、腔场与腔场间和原子与 腔场间的纠缠特性。通过对是否进行腔外原子选择性测量的结果的比较,讨论了原子选择性测量对纠缠性质的影响。研究了腔场间的耦合强度变化对纠缠特性的影响。研究结果表明,对腔外原子的选择性测量,可增强腔内原 子间、腔场间和原子与腔场间的纠缠。

关键词 量子光学;选择性原子测量;耦合腔;量子纠缠 中图分类号 O431.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.0727002

Influences of Selective Atomic Measurement on Entanglement Properties in a System of Atoms Interacting with Coupled Cavities

Lu Daoming

(Department of Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China)

Abstract The W state of three two-level atoms, two of which are separated into two initially empty coupling cavities, is considered. The temporal evolution in the entanglement between the atoms, between the cavities, as well as between the atom and the local cavity mode is numerically studied. Through comparing the results if a direct selective measurement is performed or not, the influences of state-selective measurement of the atom outside cavities on entanglement are investigated. The influences of cavity-cavity coupling coefficient on the entanglement is also investigated. The results show that the entanglement can be strengthened through the state-selective measurement on the atom outside the cavities.

Key words quantum optics; selective atomic measurement; coupling cavity; quantum entanglement OCIS codes 270.5580; 270.0270; 020.5580

1 引 言

量子纠缠是量子力学最显著也是最奇特的特征 之一。由于它在量子信息处理中的量子态隐形传 输、量子密钥分配和量子密码共享等方面的广泛应 用,使其成为量子信息领域中的基本资源,因此纠缠 态的制备和度量一直备受关注。关于纠缠态纠缠的 度量,近年来人们已提出了一些描述纠缠的物理量, 如 Von-Neumann 熵、纠缠相对熵^[1]、密度算符之间 的距离^[2]、Renyi 纠缠度^[3]和共生纠缠度^[4]等,并已 用这些物理量对不同原子与光场相互作用系统中原 子的纠缠演化进行了研究。例如,Chen 等^[5]研究了 偶极相互作用和失谐对 Tavis-Cummings 模型中原 子的纠缠的影响。Li 等^[6]研究了两个子系统间的 纠缠演化。另一方面,1997 年 Gerry 等^[7]提出:采 用选择性原子测量的方法可以加强光场的压缩效 应。至今,人们已采用选择性原子测量的方法对光 与原子相互作用系统的量子特性做了大量研究,例 如 Yang 等^[8]提出通过对腔外原子的操作可控制腔 内原子的发射性质;Wu 等^[9]研究了双模相干场与 Δ型三能级原子相互作用系统中的非经典性质;周 原等^[10]研究了远程控制光场的量子统计性质;林秀 等^[11]提出了通过对腔外原子的操作控制腔内原子 的发射性质;卢道明^[12,13]研究了选择原子测量对光 场量子特性的影响和腔外原子操作控制腔内原子的

基金项目:福建省自然科学基金(2008J0217)资助课题。

收稿日期: 2011-01-10; 收到修改稿日期: 2011-02-16

作者简介:卢道明(1963—),教授,主要从事量子光学方面的研究。E-mail: daominglu79@hotmail.com

纠缠特性。在以往的研究中,选择性原子测量的方 法大多应用在原子与非耦合腔相互作用系统中。近 年来,人们对原子与耦合腔相互作用系统进行了研 究^[14~20]。例如,Zheng等^[21]提出一种利用原子与 耦合腔相互作用系统产生双模压缩态的方案。本文 将选择性原子测量的方法应用于原子与耦合腔相互 作用系统中,考虑将初始处于W态中的两个二能级 原子分别注入耦合腔A和B中,并与光场发生共振 相互作用的情况。讨论了对腔外原子的态选择性测 量对腔内原子与原子间、腔场与腔场间和原子与腔 场间纠缠特性的影响以及腔场间的耦合强度对纠缠 特性的影响。

2 系统态矢的演化

考虑三个全同的初始处于 W 态的二能级原子, 将其中两个原子(原子 1 和原子 2)同时注入耦合腔 A 和腔 B 中,让原子与腔场发生共振相互作用,如 图 1 所示,图中 D 表示对原子的选择性测量。在旋 波近似下,在相互作用表象中原子 1 和原子 2 与耦 合腔 A 和腔 B 构成系统的哈密顿量为^[22]

$$H_{\rm I} = f_1 (a_{\rm A} s_1^+ + a_{\rm A}^+ s_1^-) + f_2 (a_{\rm B} s_2^+ + a_{\rm B}^+ s_2^-) + J (a_{\rm A} a_{\rm B}^+ + a_{\rm A}^+ a_{\rm B}), \qquad (1)$$

式中 $a_{A}^{+},a_{A}(a_{B}^{+},a_{B})$ 分别为腔场的产生和湮没算符, s_{i}^{+} 和 $s_{i}^{-}(i=1,2)$ 为第i个原子的赝自旋算符, f_{1},f_{2} 分别表示两个腔中原子与腔场的耦合系数,J为两 个腔之间的耦合系数。定义激发数算符 $\hat{N} = |e_{1}\rangle\langle e_{1}|+|e_{2}\rangle\langle e_{2}|+a_{A}^{+}a_{A}+a_{B}^{+}a_{B},$ 因[\hat{N},H_{I}]=0, 所以在系统演化过程中激发数守恒。 $|e_{i}\rangle$ 和 $|g_{i}\rangle(i=1,2)$ 分别表示原子的激发态和基态。当系 统的激发数为1时,在演化过程中,系统将保留在以 $|\varphi_{1}\rangle = |e_{1}\rangle|g_{2}\rangle|0_{A}\rangle|0_{B}\rangle, |\varphi_{2}\rangle = |g_{1}\rangle|g_{2}\rangle|1_{A}\rangle|0_{B}\rangle,$ $|\varphi_{3}\rangle = |g_{1}\rangle|g_{2}\rangle|0_{A}\rangle|1_{B}\rangle, |\varphi_{4}\rangle = |g_{1}\rangle|e_{2}\rangle|0_{A}\rangle|0_{B}\rangle$ 为基矢构成的子空间中。在(1)式表示的哈密顿量 作用下,若初始时刻系统处于 $|\varphi_{1}\rangle$ 或 $|\varphi_{4}\rangle$ 态,在任 意时刻t系统态矢分别演化为



图 1 系统框图 Fig. 1 Sketch of the system

$$\begin{aligned} |\varphi_{1}(t)\rangle &= C_{1} |\varphi_{1}\rangle + D_{1} |\varphi_{2}\rangle + F_{1} |\varphi_{3}\rangle + G_{1} |\varphi_{4}\rangle, \\ |\varphi_{4}(t)\rangle &= C_{2} |\varphi_{1}\rangle + D_{2} |\varphi_{2}\rangle + F_{2} |\varphi_{3}\rangle + G_{2} |\varphi_{4}\rangle, \end{aligned}$$

$$(2)$$

式中

$$|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|e_1\rangle|g_2\rangle|g_3\rangle + |g_1\rangle|e_2\rangle|g_3\rangle + |g_1\rangle|g_2\rangle|g_3\rangle + |g_1\rangle|g_2\rangle|e_3\rangle)|0_A\rangle|0_B\rangle.$$
(3)

对于初态为(3)式表示的系统,其任意时刻 t 系统的 态矢为

$$|\varphi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [\langle C | \varphi_1 \rangle + D | \varphi_2 \rangle + F | \varphi_3 \rangle + G | \varphi_4 \rangle) | g_3 \rangle + |g_1\rangle | g_2\rangle | e_3\rangle | 0_A\rangle | 0_B\rangle], \qquad (4)$$

式中 $C = C_1 + C_2$, $D = D_1 + D_2$, $F = F_1 + F_2$, $G = G_1 + G_2$ 。

3 原子间纠缠的演化

采用 Negativity 熵来描述两个子系统间的纠 $缠^{[13]}$,即对于用密度矩阵 ρ 表示的两个子系统,纠 缠可用其部分转置矩阵 ρ^{T} 的负本征值来定义

$$N = -2\sum_{i}\lambda_{i}, \qquad (5)$$

式中 λ_i 是部分转置矩阵 ρ^{T} 的负本征值。N = 0表示 两子系统是分离的;N = 1表示两子系统处于最大 纠缠态;0 < N < 1表示两子系统是纠缠的。 利用(4)式对原子 3、腔场 A 和腔场 B 的态求 迹,以 $|e_1\rangle|e_2\rangle$, $|e_1\rangle|g_2\rangle$, $|g_1\rangle|e_2\rangle$, $|g_1\rangle|g_2\rangle$ 为 基矢,可得到原子 1 和原子 2 的密度矩阵为

$$\boldsymbol{\rho}_{12} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |C|^2 & C^* G & 0 \\ 0 & CG^* & |G|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |D|^2 + |F|^2 + 1 \end{bmatrix}.$$
(6)

利用(6)式,通过计算可得出原子1和原子2间的纠 缠度为

$$N_{12} = \frac{1}{3} \left[\sqrt{(|D|^2 + |F|^2 + 1)^2 + 4 |GC|^2} - (|D|^2 + |F|^2 + 1) \right].$$
(7)

另一方面,若利用场电离技术对原子3进行态 选择性测量,测得原子3处于基态 |g>,那么系统的 态矢塌缩为

$$\left| \varphi(t) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (C \left| \varphi_1 \right\rangle + D \left| \varphi_2 \right\rangle + F \left| \varphi_3 \right\rangle + G \left| \varphi_4 \right\rangle).(8)$$

对腔场 A 和腔场 B 的态求迹,可得出原子 1 和原子 2 的密度矩阵为

$$\boldsymbol{p}'_{12} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |C|^2 & C^* G & 0 \\ 0 & CG^* & |G|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |D|^2 + |F|^2 \end{bmatrix} . (9) \qquad \text{frackafee} \\ \text{fractional sets of the sets o$$

利用(9)式可得到腔内原子1和原子2间的纠缠 度为

$$N'_{12} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(|D|^2 + |F|^2)^2 + 4|GC|^2} - (|D|^2 + |F|^2) \right].$$
(10)

利用(7)式和(10)式,可计算出原子1和原子2间的 纠缠度 N_{12} 随时间的演化。为简单起见,设 $f_1 =$ $f_2 = f$,两个腔之间的耦合系数 J 分别取 0.2f, 0.5f, 2f, 5f时,纠缠量 N_{12} 随时间的演化如图2所 示。为了便于对是否进行原子态选择性测量的纠缠 演化进行比较,将两种情况的曲线画在同一图中。图 中虚线表示对原子 3 进行选择性测量后原子 1 和原 子2间的纠缠度 N 随时间的演化,而实线则表示未 对原子3进行洗择性测量的情况。由图2可见:纠缠 量 N12 随时间作周期性振荡,其振荡频率随腔场间 的耦合系数增大而增大。另一方面,图中虚线高于实 线,表明利用场电离技术对原子3进行态选择性测 量,若测得原子3处于基态 |g>,可使腔内两原子间 的纠缠增强。比较图 2(a)~(d)可见:随着腔场间 的耦合增强,即J增大,无论是否有对腔外原子进 |量曲线重心均上移,表明随着腔场间 子1和原子2间的纠缠增强。因此, 耦合对增强腔内原子间的纠缠有利。



4 腔场 A 与腔场 B 间纠缠的演化 腔场 A 与腔场 B 间的纠缠仍然采用 Negativity 熵 来描述。利用(4)式,对原子 1、原子 2 和原子 3 的态求 迹,以 $|1_A\rangle|1_B\rangle$, $|1_A\rangle|0_B\rangle$, $|0_A\rangle|1_B\rangle$, $|0_A\rangle|0_B\rangle$ 为基

6

AAAAA

6

8

10

10

$$\boldsymbol{\rho}_{AB} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |D|^2 & D^*F & 0 \\ 0 & DF^* & |F|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |C|^2 + |G|^2 + 1 \end{bmatrix}.$$
(11)

通过计算可得到腔场 A 和腔场 B 间的纠缠量为

$$N_{AB} = \frac{1}{3} \left[\sqrt{(|C|^2 + |G|^2 + 1)^2 + 4 |DF|^2} - (|C|^2 + |G|^2 + 1) \right].$$
(12)

另一方面,若对原子3进行态选择性测量,测得原子3处于基态 |g),那么系统的态矢塌缩为(8)式表示的态。对原子1和原子2的态求迹,可得到腔场A和腔场B构成的系统的密度矩阵为



通过计算可得到腔场 A 和腔场 B 间的纠缠量为

$$N'_{AB} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(|C|^2 + |G|^2)^2 + 4|DF|^2} - (|C|^2 + |G|^2) \right].$$
(14)

同样,取 $f_1 = f_2 = f_0$ 两个腔之间的耦合系数J分 别取 0.2f,0.5f,2f,5f时腔场 A 与腔场 B 间的纠 缠量 N_{AB} 随时间的演化如图 3 所示。图中虚线仍表 示对原子 3 进行选择性测量后纠缠度随时间的演 化,而实线则表示未对原子 3 进行选择性测量的情 况。从图中可以看出:纠缠量 N_{AB} 随时间作周期性 振荡,振荡频率随腔场间的耦合系数增大而增大。 图中虚线高于实线,表明采用原子选择性测量方法, 可实现腔场间的纠缠增强。另一方面,随着腔场间 耦合的增强,曲线峰值和重心下移,纠缠量的平均值 减小。这表明随腔场间耦合的增强,腔场 A 与腔场 B 间的纠缠减弱。



图 3 腔场 A 与腔场 B 间纠缠量 N_{AB} 随时间的演化。(a) J=0.2f,(b) J=0.5f,(c) J=2f,(d) J=5fFig. 3 Time evolution of cavity-cavity entanglement N_{AB} . (a) J=0.2f,(b) J=0.5f,(c) J=2f,(d) J=5f

5 原子与腔场间纠缠的演化

原子1与腔场A间的纠缠同样采用 Negativity 熵来描述。利用(4)式,对原子2、原子3和腔场B 的态求迹,以 $|e_1\rangle|1_A\rangle$, $|e_1\rangle|0_A\rangle$, $|g_1\rangle|1_A\rangle$ 和 $|g_1\rangle|0_A\rangle$ 为基矢,可得到原子1和腔A构成的系统 的密度矩阵为

$$\boldsymbol{\rho}_{1A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |C|^2 & C^* D & 0 \\ 0 & CD^* & |D|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |F|^2 + |G|^2 + 1 \end{bmatrix}.$$
(15)

利用(15)式,通过计算可得出原子1和腔场A间的 纠缠量为

$$N_{1A} = \frac{1}{3} \left[\sqrt{(|F|^2 + |G|^2 + 1)^2 + 4 |CD|^2} - (|F|^2 + |G|^2 + 1) \right].$$
(16)

另一方面,若对原子3进行态选择性测量,测得 原子3处于基态 |g>,那么系统的态矢塌缩为(8)式 表示的态。对原子2和腔场B的态求迹,可得到原 子1和腔场A构成的系统的密度矩阵为

$$\boldsymbol{p}_{1A}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |C|^2 & C^* D & 0 \\ 0 & CD^* & |D|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |F|^2 + |G|^2 \end{bmatrix}. (17)$$

通过计算可得到原子1和腔场A间的纠缠量为

$$N'_{1A} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(|F|^2 + |G|^2)^2 + 4 |CD|^2} - (|F|^2 + |G|^2) \right].$$
(18)

$$\begin{array}{c} 0.22 \\ 0.18 \\ 0.14 \\ \ge \ 0.06 \\ 0.02 \\ -0.02 \\ \hline 0 \\ 2 \\ \hline 0 \\$$

同样,取 $f_1 = f_2 = f_a$ 当两个腔之间的耦合系数J分别取 0.5f,f,3f,5f时,纠缠量 N_{1A} 随时间的演 化如图 4 所示,图中虚线和实线仍然与是否对腔外 原子进行选择性测量的情况相对应。从图 4 中可以 看出:纠缠量 N_{1A} 随时间仍作周期性振荡,振荡频 率随腔场间的耦合系数增大而增大。图中虚线高于 实线,表明采用原子选择性测量方法,也可实现原子 与腔场间的纠缠增强。另一方面,当耦合系数J较 小时随着腔场间耦合的增强,纠缠量的平均值增大。 但当耦合系数J大于一定值后随着腔场间耦合的 增强,纠缠量的平均值减小。这表明纠缠量 N_{1A} 与 腔场间耦合强度之间存在非线性关系。进一步研究 表明,原子 2 和腔场 B 间的纠缠演化与原子 1 和腔 场 A 间的纠缠演化结果一致。



图 4 原子与腔场间纠缠量 N_{1A} 随时间的演化。(a) J=0.5f, (b) J=f, (c) J=3f, (d) J=5fFig. 4 Time evolution of atom-cavity entanglement N_{1A} . (a) J=0.5f, (b) J=f, (c) J=3f, (d) J=5f

6 结 论

运用 Negativity 熵来描述两个子系统间的纠 缠,考虑将初始处于 W 态中的两个二能级原子分别 注入耦合腔 A 和 B 中的情况,研究了两个二能级原 子与耦合腔共振相互作用系统中的纠缠特性。采用 数值计算方法,讨论了对腔外原子的态选择性测量 和腔场间的耦合强度变化对纠缠特性的影响。研究 结果表明:采用原子选择性测量方法,对腔外原子进 行选择性测量不仅可以实现腔内两原子间的纠缠增 强,而且可以实现两腔场间以及原子与腔场间的纠 缠增强。另一方面,两原子间纠缠随腔场间耦合强 度增强而增强,两腔场间的纠缠则随腔场间耦合强 度的增强而减弱,而原子与腔场间的纠缠随腔场间 的耦合强度变化呈非线性变化。

参考文献

- B. Zheng, G. C. Guo. Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity QED [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **85**(11): 2392~2395
- 2 S. B. Zheng. One-step synthesis of multiatom Greenberger-Horne-Zeilinger states[J]. Phys. Rev. Lett., 2001, 87(23): 230404
- 3 V. Vedral, M. B. Plenin, M. A. Rippin et al.. Quantifying entanglement[J]. Phys. Rev. Lett., 1997, 78(2): 2275~2279
- 4 L. Knoll. Distance between density operators: applications to the Jaynes-Cummings model [J]. Phys. Rev. A, 1995, 51 (2): 1622~1630

- 5 L. Chen, X. Q. Shao, S. Zhang. The influences of dipole-dipole interaction and detuning on the sudden death of entanglement between two atoms in the Tavis-Cummings model [J]. *Chinese Physics B*, 2009, **18**(3): 888~893
- 6 Z. G. Li, S. M. Fei, Z. D. Wang et al.. Evolution equation of entanglement for bipartite system [J]. Phys. Rev. A, 2009, 79(2): 024303
- 7 C. C. Gerry, H. H. Ghosh. Squeezing enhancement in the Jaynes-Cummings model via selective atomic measurements [J]. *Phys. Lett. A*, 1997, **229**(1): 17~22
- 8 C. P. Yang, G. C. Guo. Controllable emission properties of an atom inside a cavity by manipulating the atom outside the cavity [J]. *Phys. Lett. A*, 1999, **255**(3): 129~132
- 9 H. Wu, W. Su. Nonclassical properties in the resonant interaction of a three level Λ -type atom with two-mode field in coherent state [J]. *Chinese Physics*, 2007, **16**(1): 106~110
- 10 Zhou Yuan, Zhang Yingjie, Xia Yunjie. Remote control of quantum statistical properties of light field [J]. Acta Optica Sinica, 2007, **27**(6): 1122~1128 国 西 改革本 百元本 近現於制來坛的最子练计析面[1] 来

周 原,张英杰,夏云杰.远程控制光场的量子统计性质[J]. 光 学学报,2007,27(6):1122~1128

- 11 Lin Xiu, Li Hongcai. Controllable emission properties of two atoms inside cavities by manipulating the atom outside the cavity [J]. Acta Optica Sinica, 2001, 21(10): 1182~1185
 林 秀,李洪才.通过对腔外原子的操作控制腔内原子的发射性 质[J]. 光学学报, 2001, 21(10): 1182~1185
- 12 Lu Daoming. Effect of selective atomic measurement on quantum properties of light field[J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(6): 1804~1808

卢道明.选择原子测量对光场量子特性的影响 [J]. 光学学报, 2010, **30**(6): 1804~1808

13 Lu Daoming. Entanglement properties of two-atom inside cavities

controlled by manipulating the atom outside the cavity[J]. Acta Physica Sinica, 2010, 59(12): $8359 \sim 8365$

卢道明. 腔外原子操作控制腔内原子的纠缠特性 [J]. 物理学报,2010,**59**(12):8359~8365

- 14 C. D. Ogden, E. K. Irish, M. S. Kim. Dynamics in a coupledcavity array[J]. Phys. Rev. A, 2008, 78(6): 063805
- 15 M. J. Hartmann, F. G. Brandao, M. B. Plenio. Effective spin systems in coupled microcavities [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, 99(16): 160501
- 16 S. B. Zheng, C. P. Yang, F. Nori. Arbitrary control of coherent dynamics for distant qubits in a quantum network [J]. *Phys. Rev. A*, 2010, 82(4): 042327
- 17 S. B. Zheng. Quantum communication and entanglement between two distant atoms via vacuum fields [J]. Chin. Phys. B, 2010, 19(6): 064204
- 18 A. C. Ji, Q. Sun, X. C. Xie *et al.*, Josephson effect for photons in two weakly linked microcavities [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, 102(2): 023602
- 19 A. C. Ji, X. C. Xie, W. M. Liu. Quantum magnetic dynamics of polarized light in arrays of microcavities [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, 99(18): 183602
- 20 J. M. Zhang, W. M. Liu, D. L. Zhou. Cavity QED with cold atoms trapped in a double-well potential [J]. *Phys. Rev. A*, 2008, **77**(3): 033620
- 21 S. B. Zheng, Z. B. Yang, Y. Xia. Generation of two-mode squeezed states for two separated atomic ensembles via coupled cavities [J]. *Phys. Rev. A*, 2010, 81(1): 015804
- 22 Z. B. Yang, Y. Xai, S. B. Zheng. Resonant scheme for realizing quantum phase gates for two separate atoms via coupled cavities[J]. Opt. Commun., 2010, 283(15): 3052~3057