

基于希尔伯特变换的湍流随机相位差解调算法研究

肖树妹^{1,2,3} 梅海平^{1,2} 钱仙妹^{1,2} 饶瑞中^{1,2}

¹ 中国科学院安徽光学精密机械研究所大气光学研究中心, 安徽 合肥 230031
² 中国科学院大气成分与光学重点实验室, 安徽 合肥 230031
³ 中国科学院研究生院, 北京 100049

摘要 根据大气光学湍流的光纤干涉测量技术原理及其信号表现形式,提出了一种基于希尔伯特(Hilbert)变换的动态相位差解调算法。数值模拟结果表明,该算法能够解调出波形相位差和符合湍流频谱特征的随机相位差,且绝对误差小于 10^{-3} ,与相关法的解调结果一致。两者对比分析表明,Hilbert变换算法无需设定相关长度,对信号无平滑效应,因而能够更好地反映信号的频率特性。该研究为湍流随机相位差的检测提供了一个新方法。

关键词 大气光学;湍流随机相位差;希尔伯特变换;相关法;数值模拟

中图分类号 P427.1 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS201131.0701006

Demodulating Atmospheric Turbulence Random Phase Difference Based on Hilbert Transform

Xiao Shumei^{1,2,3} Mei Haiping^{1,2} Qian Xianmei^{1,2} Rao Ruizhong^{1,2}

¹ Center for Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei, Anhui 230031, China
² Key Laboratory of Atmospheric Composition and Optical Radiation, Chinese Academy of Sciences, Hefei, Anhui 230031, China
³ Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract An algorithm of demodulating dynamic phase difference based on Hilbert transform is proposed according to the principle and signal expression of fiber interference turbulence measurement system. The results of numerical simulation show that waveform phase difference and turbulence's random phase difference can be demodulated by this method and absolute error is less than 10^{-3} , which is in accordance with the results of correlation method. Compared to the correlated algorithm, the algorithm of Hilbert transform doesn't have smooth effect on signal and doesn't need to set correlation length, so it can reflect characteristic of signal frequency better. This research provides a new method for measuring turbulence random phase difference.

Key words atmospheric optics; turbulence random phase difference; Hilbert transform; correlation method; numerical simulation

OCIS codes 010.1330; 120.5050; 060.2300

1 引言

湍流大气是一种非均匀的随机介质,其折射率是空间位置和时间的函数。大气折射率的起伏即光

学湍流所引起的激光波前畸变、光束漂移和光强起伏等湍流效应,是制约激光大气传输^[1]、自由空间光通讯^[2~4]和激光雷达^[5,6]等光学工程应用的重要因

收稿日期: 2010-12-10; 收到修改稿日期: 2011-03-25

基金项目: 中国科学院科研装备研制项目(YZ200923)资助课题。

作者简介: 肖树妹(1984—),女,硕士研究生,主要从事光电检测和大气湍流的光学特征及其光学测量方法等方面的研究。E-mail: apzml@126.com

导师简介: 饶瑞中(1963—),男,研究员,博士生导师,主要从事激光大气传输前沿物理问题、光辐射和图像的大气传输、大气湍流的光学特征及其光学测量方法等方面的研究。E-mail: rao@aiofm.ac.cn

素。因此,准确获取光传播路径上的光学湍流强度至关重要。

由于受技术条件的限制,传统的光学湍流测量手段要么是间接测量要么是在假设前提下的测量,其结果存在不确定性^[1]。为了发展光学湍流精密测量新技术,Mermelstein等^[7]提出了一种双空气间隙光纤马赫-曾德尔干涉测量技术原理,其理论精度可达 10^{-20} 量级。近年来,随着相位载波调制解调原理在光纤湍流检测技术中的应用,实测的大气折射率起伏方差的噪声水平已降低到 10^{-16} 量级^[8,9]。为了进一步逼近理论精度极限,一方面要改进系统硬件性能,另一方面就是要发展更为完善的解调方法。

在光纤湍流测量系统中,对采集到的载波(干涉)信号和参考信号经过一系列处理后得到形如 $y(t) = \cos[\omega t - \Delta\varphi(t)]$ 和 $x(t) = \cos(\omega t)$ 的两列信号,其中 $\Delta\varphi(t)$ 为大气湍流引起的随机相位差^[9]。解算两列信号相位差的方法主要有过零检测法^[10],频谱分析法^[11]和数字相关法^[12]。过零检测法、频谱分析法不能用于检测动态相位差。一般的数字相关法只用于检测静态相位差,而实际上数字相关法能解调动态相位差^[13]。但其有个技术关键——相关长度,即相关长度个数求一次相关得到一个相位差,这样求得的是一个平均相位,平滑掉了随机相位的细节部分。同时用相关法解调相位时要求的采样频率比较大,必须是湍流频率的相关长度倍。希尔伯特(Hilbert)变换很早就成功用于对信号的瞬时频率测量,但其也能用于相位差检测,解算出来的相位差能体现其细节,要求的采样频率较低。

本文基于 Hilbert 变换原理,提出了一种解算湍流大气随机相位差的新方法,数值模拟了其解调,并将结果与数字相关法进行了比较,讨论了两种方法的优缺点及适用场合。

2 原 理

2.1 Hilbert 相位差解调算法原理

根据 Hilbert 变换原理^[14,15]可知:给定信号 $x(t)$,其 Hilbert 变换 $\hat{x}(t)$ 定义为

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(T)}{t-T} dT = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t-T)}{T} dT = x(t) * \frac{1}{\pi t}, \quad (1)$$

式中 $*$ 表示卷积。 $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ 为冲击响应函数,由傅里叶变换的理论可知,Hilbert 频率响应 $H(\omega) =$

$-\text{sgn } \omega$,即信号 $x(t)$ 经 Hilbert 变换后,其负频率成分作 $+90^\circ$ 相移,而正频率成分作 -90° 相移。因此,余弦信号的 Hilbert 变换为正弦信号;正弦信号的 Hilbert 变换为余弦信号,变换后的信号与原始信号具有相同的幅值和频率,且包含原始信号的相位信息。设两列信号的表达式分别为

$$x_0(t) = A\cos[\omega t + \varphi(t)], \quad (2)$$

$$y_0(t) = B\cos(\omega t), \quad (3)$$

对信号 $x(t), y(t)$ 进行 Hilbert 变换得

$$x_1(t) = A\sin[\omega t + \varphi(t)], \quad (4)$$

$$y_1(t) = B\sin(\omega t), \quad (5)$$

由(2)~(5)式得

$$x(t) = AB\sin \varphi(t), \quad (6)$$

$$y(t) = AB\cos \varphi(t). \quad (7)$$

故两信号的相位差 $\varphi(t)$ 为

$$\varphi(t) = \text{atan}[x(t)/y(t)]. \quad (8)$$

2.2 相关法相位差解调原理

相关法求两信号相位差原理^[12,13]:同频正弦(或余弦)信号在延时为零时的互相关函数值与其相位差的余弦值成正比。设两列同频信号的表达式为

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t) \\ y(t) = B\cos[\omega t + \varphi(t)] \end{cases}, \quad (9)$$

式中 A 和 B 是信号的幅值, $\varphi(t)$ 为两信号的相位差。根据相关函数的定义,当时间延迟为零时

$$R_{xx}(0) = \frac{A^2}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{A^2}{2}, \quad (10)$$

$$R_{xy}(0) = \frac{AB}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{AB}{2} \cos \varphi, \quad (11)$$

$$R_{yy}(0) = \frac{B^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{B^2}{2}, \quad (12)$$

式中 $R_{xx}(0), R_{yy}(0)$ 分别为两信号在延时为零时的自相关函数, $R_{xy}(0)$ 为互相关函数。综合上面三式可得

$$\cos \varphi = \frac{2}{AB} R_{xy}(0) = \frac{R_{xy}(0)}{\sqrt{R_{xx}(0)R_{yy}(0)}}, \quad (13)$$

即

$$\varphi = \arccos \left[\frac{R_{xy}(0)}{\sqrt{R_{xx}(0)R_{yy}(0)}} \right]. \quad (14)$$

计算机处理的是经模拟/数字(A/D)采样后的离散时间序列,即 $x(n), y(n)$,其中 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1, N$ 为总的采样点数。设 f_s 为采样率,定义参与一次相关运算的数据长度为相关长度 T 。

对于离散的时间序列,在一个相关长度内的相关运算由积分式变为求和式,即

$$\begin{cases} R_{xx}(0) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} x^2(n) \\ R_{xy}(0) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} x(n)y(n). \\ R_{yy}(0) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} y^2(n) \end{cases} \quad (15)$$

将结果代入(14)式即可求得 φ 。设计总采样点数恰好为相关长度的 k 倍,那么经过相关运算所获得的 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ 即为动态的随机相位差时间序列。

2.3 湍流随机相位差的产生原理

根据相位 S 的频谱与湍流折射率的空间谱密度 $\Phi(K)$ 之间的关系及 Kolmogorov 湍流谱理论,构建一个相位空间的复随机场,然后对此场进行傅里叶变换可得到一个湍流相位随机场^[1]:

$$S(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a_R \sqrt{0.066\pi\Delta Z k^2 C_n^2 K^{-5/3}} \exp(iKx) dK, \quad (16)$$

式中 $a_R = (A_R + iB_R)/\sqrt{2}$, A_R, B_R 分别为实部和虚部,且均为均值为 0,方差为 1 的随机数, ΔZ 为传输距离, k 为激光的波数, C_n^2 为折射率结构常数, K 为相空间波数。通过(16)式模拟生成湍流随机相位,取 $\Delta Z = 10$ cm,激光波长 $\lambda = 1.310$ μm ,湍流强度 $C_n^2 = 1 \times 10^{-14}$ $\text{m}^{-2/3}$,采样频率 $f_s = 20$ kHz,采样数

$k = 40000$,则模拟生成的湍流随机相位如图 1 所示。

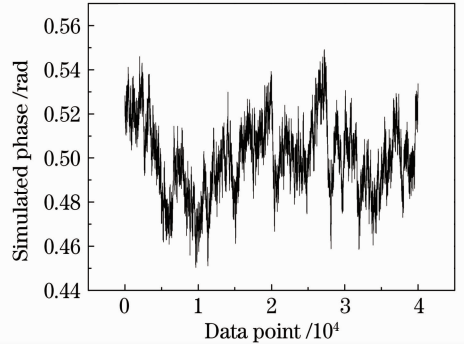


图 1 模拟湍流随机相位差

Fig. 1 Simulated random turbulence phase difference

3 数值模拟与分析

3.1 Hilbert 变换算法对波形相位差的解调

设两同频余弦信号:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_c t),$$

$$y(t) = B \cos[2\pi f_c t + \varphi(t)],$$

式中 A, B 分别为信号 $x(t), y(t)$ 的幅值, f_c 为信号的频率, $\varphi(t)$ 为两信号的相位差。令 $A = 2, B = 5, f_c = 2000$ Hz, $\varphi(t) = 0.5 \cos(20\pi t) + 0.5 \cos(200\pi t)$, 即相位差是两个不同频率余弦信号的合成,频率分别是 $f_1 = 10$ Hz, $f_2 = 100$ Hz,采样频率 $f_s = 20$ kHz,采样数 $N = 4000$,则原始相位差与基于 Hilbert 变换算法解调的相位差分别如图 2(a), (b) 所示。结果表明该算法解调的相位差与原信号波形一致。

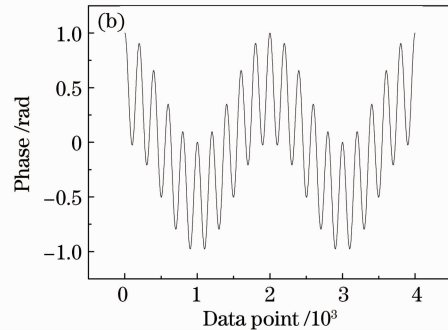
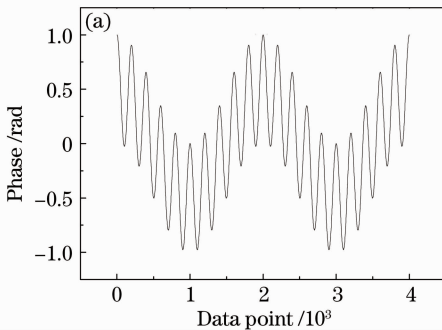


图 2 (a) 原始相位差, (b) 基于 Hilbert 变换解调的相位差

Fig. 2 (a) Original phase difference, (b) demodulated phase difference based on Hilbert transform

3.2 Hilbert 变换算法对湍流随机相位差的解调

用 Hilbert 变换法对模拟生成的湍流随机相位(图 1)进行解调,结果如图 3 所示,图 4 为用相关法解调的结果。结果表明两种方法解调的湍流随机相位量级、趋势都与模拟生成的湍流随机相位差有很好的 consistency。定义解调相位与模拟生成相位的差值

为绝对误差。图 5 为 Hilbert 变换法解调结果的绝对误差。为了便于比较,将模拟生成湍流随机相位以 T 个数为一组分段平均与图 4 的差值为相关法解调结果的绝对误差,如图 6 所示。从图 5, 6 来看用两种方法解调的湍流随机相位的绝对误差量级都小于 10^{-3} 。

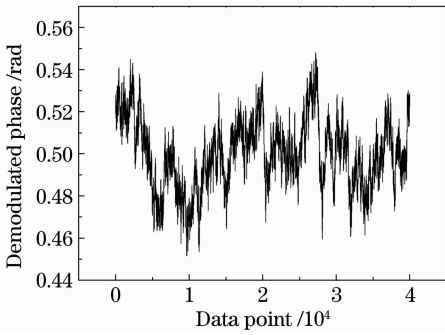


图 3 基于 Hilbert 变换解调的湍流随机相位差
Fig. 3 Demodulated random turbulence phase difference based on Hilbert transform

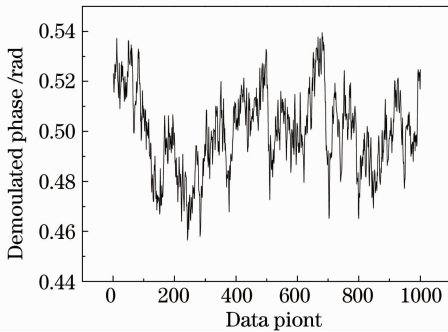


图 4 相关法解调的湍流随机相位差
Fig. 4 Demodulated random turbulence phase difference with algorithm of correlation

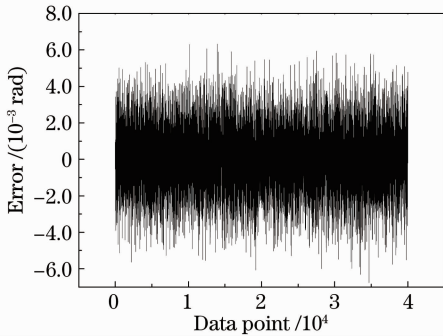


图 5 基于 Hilbert 变换解调相位差的绝对误差
Fig. 5 Absolute error of demodulated phase difference based on Hilbert transform

3.3 Hilbert 变换算法与相关法解调结果的比较

从上面解调的结果来看,两种方法都能正确地解调出相位差,但两种方法解调的结果有区别:基于 Hilbert 变换解调的相位差数据点数为采样数,解调信号的频率为采样频率,能实时解调信号的变化,体现信号的细节;数字相关法解调的相位差数据点缩小了 T 倍,相当于对信号进行了平均,平滑掉了高频噪声,同时略去了信号的部分细节,解调信号的频率为也相应地缩小 T 倍,故用相关法解调相位差

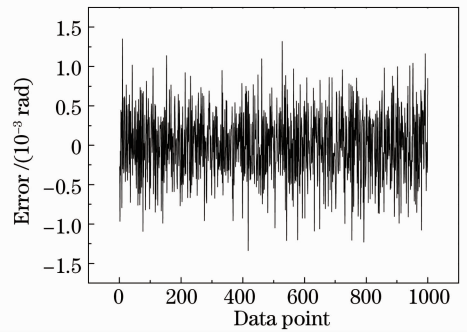


图 6 相关法解调相位差的绝对误差
Fig. 6 Absolute error of demodulated phase difference with algorithm of correlation

时,采样频率必须上升至湍流频率的 T 倍。另外用相关法解调相位差时,其相关长度的选取是关键,必须是整周期取样^[16],如果偏离整周期就会造成一定的误差,甚至会使解调的结果畸变。在满足整周期采样的同时,相关长度不能取太大,若取得过大就会平滑掉随机相位过多的细节部分。Hilbert 变换算法实现起来较简单,没有相关长度的限制,对采集卡采样频率的要求也比较低。

4 结 论

数值模拟了基于 Hilbert 变换和相关法对动态相位差的解调。结果表明,这两种方法解调的相位差与模拟生成的相位差有很好的 consistency,绝对误差量级都小于 10^{-3} ,但解调结果在体现相位差的细节、频率及解调相位的区域上有所区别,实现算法的难易程度也有区别。基于 Hilbert 变化法能实时地解调出相位的变化,算法比较简单,易于实现,但存储数据量相对比较大,对计算机存储空间有要求,同时对随机噪声没有抑制作用,解调过程中用到的是反正切函数,能解调相位差的范围是 $-\pi/2 \sim \pi/2$ 。相关法解调相位时对随机噪声有抑制作用,其解调结果是相位差的一个平均值,滤掉了信号的部分细节,解调过程中用到的是反余弦函数,能解调 $0 \sim \pi$ 之间的相位差。两种算法各有优缺点,使用场合不同,应用中怎样选取算法,需具体而定。

参 考 文 献

- 1 Rao Ruizhong. Light Propagation in the Turbulent Atmosphere [M]. Hefei: Anhui Science and Technology Press, 2005
饶瑞中. 光在湍流大气中的传播[M]. 合肥: 安徽科学技术出版社, 2005
- 2 S. Arnon. Effects of atmospheric turbulence and building sway on optical wireless-communication systems[J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(2): 129~131
- 3 Yang Shiji, He Zhiping, Jia Jianjun *et al.*. Research of the

- transmittance of atmospheric turbulent channels[J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(11): 2860~2863
- 杨世骥, 何志平, 贾建军等. 湍流大气信道激光透射率的研究[J]. *中国激光*, 2010, **37**(11): 2860~2863
- 4 Wang Huiqin, Ke Xizheng. Hybrid space-time code for free space optical communication[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(1): 132~137
- 王惠琴, 柯熙政. 自由空间光通信中的混合空时编码[J]. *光学学报*, 2009, **29**(1): 132~137
- 5 Dai Pinjuan, Liu Guoguo, Wu Jin. Numerical simulation on synthetic aperture lidar imaging through atmospheric turbulence with phase gradient algorithm compensation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(3): 739~746
- 戴品娟, 刘国国, 吴 谨. 大气湍流下合成孔径激光雷达成像数值模拟及PGA补偿[J]. *光学学报*, 2010, **30**(3): 739~746
- 6 A. B. Viktor, N. S. Igor, W. Christian. Numerical simulation of the effect of refractive turbulence on coherent lidar return statistics in the atmosphere[J]. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(30): 5403~5414
- 7 Mermelstein. Fiber-optic atmospheric turbulence sensor [J]. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(18): 1922~1923
- 8 Hao Lei, Mei Haiping, Qian Xianmei *et al.*. Demodulation algorithm for the measurement of atmospheric optical turbulence with fiber optics [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(11): 2292~2295
- 郝 磊, 梅海平, 钱仙妹等. 大气光学湍流光纤测量技术中的解调算法研究[J]. *光子学报*, 2008, **37**(11): 2292~2295
- 9 Mei Haiping, Hao Lei, Rao Ruizhong. Experimental study on carrier modulated fiber optic atmospheric optical turbulence measurement system [J]. *J. Atmospheric and Environmental Optics*, 2008, **3**(5): 321~325
- 梅海平, 郝 磊, 饶瑞中. 载波调制型大气光学湍流光纤测量系统的实验研究[J]. *大气与环境光学学报*, 2008, **3**(5): 321~325
- 10 Ye Lin, Zhou Hong, Zhang Hong *et al.*. Measurement methods for the phase shift detection and their accuracy analysis [J]. *Electrical Measurement and Instrumentation*, 2006, **43**(484): 11~14
- 叶 林, 周 弘, 张 洪等. 相位差的几种测量方法和测量精度分析[J]. *电测与仪表*, 2006, **43**(484): 11~14
- 11 Lu Yanjie, Xi Zhihong, Wang Jiangbo. Analysis and comparison between FFT and digital correlation theory in phase difference measurement [J]. *Information Technology*, 2007, (12): 105~108
- 路艳洁, 席志红, 王姜铂. FFT法与数字相关法在相位测量上的比较[J]. *信息技术*, 2007, (12): 105~108
- 12 Yang Aibing, Zhang Xien, Guo Li. Analysis of correlation theory applied in testing area [J]. *Science Technology and Engineering*, 2007, **7**(13): 3249~3251
- 杨艾兵, 张锡恩, 郭 利. 相关原理在测试领域的应用分析[J]. *科学技术与工程*, 2007, **7**(13): 3249~3251
- 13 Xiao Shumei, Mei Haiping, Qian Xianmei *et al.*. Demodulating atmospheric turbulence random phase difference with the algorithm of correlation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(2): 0201002
- 肖树妹, 梅海平, 钱仙妹等. 大气湍流随机相位差的相关解调算法研究[J]. *光学学报*, 2011, **31**(2): 0201002
- 14 Zhou Jihui, Cao Qingsong, Song Jingwei. A new method of phase measuring based on Hilbert and its comparison with digital correlation method [J]. *Nondestructive Testing*, 2006, **28**(7): 341~343
- 周继惠, 曹青松, 宋京伟. 基于 Hilbert 变换的相位测量法与数字相关测相法的比较[J]. *无损检测*, 2006, **28**(7): 341~343
- 15 Zhou Zengjian, Wang Hai, Zheng Shengfeng *et al.*. Measuring method for phase difference based on Hilbert transform [J]. *Pro Testing*, 2009, **9**: 18~19
- 周增建, 王 海, 郑胜峰等. 一种基于希尔伯特变换的相位差 [J]. *测量方法测试测量技术*, 2009, **9**: 18~19
- 16 Yang Jun, Wu Qisheng, Sun Hongqi. Study on using correlation to detect phase difference in coriolis flow meter [J]. *Chinese J. Sensors and Actuators*, 2007, **20**(1): 138~145
- 杨 俊, 武奇生, 孙宏琦. 基于相关法的相位差检测方法在科氏质量流量计中的应用研究[J]. *传感技术学报*, 2007, **20**(1): 138~145