

快速傅里叶变换方法计算短波长激光束聚焦的讨论

杨美霞 钟鸣 任钢 何衡湘 刘文兵 夏惠军 薛亮平

(西南技术物理研究所, 四川 成都 610041)

摘要 提出了快速傅里叶变换(FFT)计算短波长激光通过短焦距聚焦系统的传输特性的方法。快速傅里叶变换方法计算聚焦光束光场分布时,如果遇到短波长激光通过短焦距聚焦系统,会出现相位随机跃变、波函数失真和采样率不够的问题。采用坐标扩展变换,突破了快速傅里叶变换计算过程中输入屏和衍射屏空间尺度必须相同、抽样格点必须等间隔的限制,使上述问题得到解决,可以得到更加详细的聚焦光束光场分布。同时,采用分两步计算的思想,避免了计算焦平面附近光场时,坐标空间的几何扩展与光束衍射极限的矛盾。

关键词 激光光学;快速傅里叶变换;激光束聚焦;聚焦光束光场分布;坐标变换

中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.0507001

Discussion of Short-Wavelength Laser Beam Focus Using Fast Fourier Transform Method

Yang Meixia Zhong Ming Ren Gang He Hengxiang

Liu Wenbing Xia Huijun Xue Liangping

(Southwest Institute of Technical Physics, Chengdu, Sichuan 610041, China)

Abstract A method is proposed to calculate the focusing characteristics of short-wavelength laser beam through short-focus system. The problem of random phase jumps, wave function distortion and insufficient sampling rate will be met when the optical field distribution of a focused laser beam is calculated by fast Fourier transform method and short-wavelength laser beam passes through the short-focus system. By using coordinate transformation in the fast Fourier transform calculation, the limitation of the same input screen special scale, the same diffraction screen spital scale and the same sampling grid spacing is broken. The optical-field distribution of a focused laser beam can be calculated in detail. At the same time, two-step calculation is used to avoid the conflict between the coordinate space of the geometric expansion and the diffraction limit when the light field near the focus is calculated.

Key words laser optics; fast Fourier transform (FFT); laser-beam focusing; optical-field distribution of focused beam spot; coordinate transform

OCIS codes 070.7345; 050.1960; 050.1970

1 引言

傅里叶分析的方法早在19世纪末20世纪初便成功地应用于光学领域。用光学方法实现二维函数的傅里叶变换在空间频率域中描述和处理光学信息,是傅里叶光学的基本内容^[1,2]。激光器出现以后,人们获得了相干性很好的新光源,使傅里叶光学得到了快速发展。Aziklas等^[3]指出,根据空间频谱传播理论,应用傅里叶变换法计算菲涅耳数较大的非稳腔模式,可以大大提高计算效率,减少计算时间。快速傅里叶变换方法(FFT)是离散傅里叶变换

(DFT)的一种快速计算^[4],随着计算机技术和FFT技术出现,这种算法在各领域获得广泛应用,并已成为计算激光输出模式以及光束空间传播的主流方法^[5~7]。然而在遇到透镜,球面反射镜等光学元件的计算时,采用FFT会出现取样精度和计算速度之间的矛盾,甚至无法实现计算。特别是计算短波长激光经短焦距聚焦系统的情况,会出现聚焦系统后表面复振幅分布函数无规则的情况。针对这两个问题,本文提出采用分两步坐标变换FFT方法计算短波长激光聚焦特性。采用这种方法不仅可以得到更

收稿日期: 2010-11-03; 收到修改稿日期: 2011-01-24

作者简介: 杨美霞(1978—),女,博士研究生,主要从事强激光技术方面的研究。E-mail: yangmx0430@163.com

导师简介: 钟鸣(1957—),男,研究员,博士生导师,主要从事强激光技术方面的研究。E-mail: office@xiwu.net

加详尽的光场分布,而且可以有效地克服取样精度不够,透镜复振幅变换函数失真的问题。对于汇聚光束的空间传输行为,特别是焦平面附近的光场分布有重要意义。

2 FFT 计算聚焦存在的问题

在应用 FFT 的过程中,要求输入波函数 $u_0(x, y)$ 和输出波函数 $u_1(x, y)$ 的抽样格点必须是等间隔的,计算过程中输入屏和衍射屏的空间尺度也需相同。在光传播的计算过程中,当经过透镜或球面反射镜后,会出现发散或者会聚的波束。诸如虚共焦非稳光学谐振腔的扩展部分,波束截面积较小的紧束端的输入空间格点必须十分紧凑,离散点的坐标空间间隔必须足够小,才能使波束截面积较大的扩束端输出空间波函数有足够高的抽样频率,而总的格点也必须足够宽,以覆盖光束较宽部分的波函数 $u_1(x, y)$ 。这两个要求就必须使计算的空间尺度足够大,离散的格点间隔足够小,这就使计算会聚和发散光的过程中大大增加抽样格点数,这个数目超出了问题信息容量所实际需要的数目,使计算带来不必要的复杂化。

另外,在透镜聚焦和发散的计算过程中,透镜的复振幅变换函数为

$$T(x, y) = \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2f}\right), \quad (1)$$

式中 k 代表波数,与波长 λ 成反比; f 代表透镜焦距; x, y 是透镜平面的横向空间坐标。当计算的激光波长 λ 较小,透镜焦距 f 也较小的情况下,相邻空间格点的相位变化远远超过 2π ,使得经透镜变换函数后光场的相位失去应有的规律,相位变化变得随机,复振幅分布函数发生随机振荡。此时的复振幅分布函数再进行衍射积分方程的 FFT 计算后,模场波函数失真。若要使相位不发生随机的跃变,这就要求空间格点数增多,相邻空间格点的间隔变小,又会导致计算速度达不到计算精度要求的问题。

3 计算聚焦的分两步坐标扩展变换方法

文献[2]中给出了计算虚共焦非稳腔激光模式的坐标变换 FFT 方法,用于解决虚共焦非稳腔发散球面波的传播过程与 FFT 方法计算速度精度之间的矛盾^[2]。本文将这种思想应用于计算聚焦光斑。自由空间传播的光场复振幅分布函数 $u(x, y, z)$ 满足傍轴方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2jk \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

这个方程可以由傅里叶变换展开,将空域的光场传播转化为频域的计算,通常采用两次 FFT 对其进行数值求解。现考虑激光通过一个理想薄透镜聚焦系统,激光器输出激光在透镜处的复振幅分布为 $u_0(x, y)$,经过焦距为 f 的透镜后,复振幅分布函数为

$$u_1(x, y) = u_0(x, y) \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2f}\right). \quad (3)$$

计算聚焦光束就是将透镜后表面复振幅分布函数 u_1 代入(2)式计算传播距离 d 后的光场分布,由于聚焦光束比入射光束的横向尺寸小得多,直接用 FFT 计算一定会遇到前面提到的两个问题。所以采用坐标变换两步计算方法进行计算,如图 1 所示。

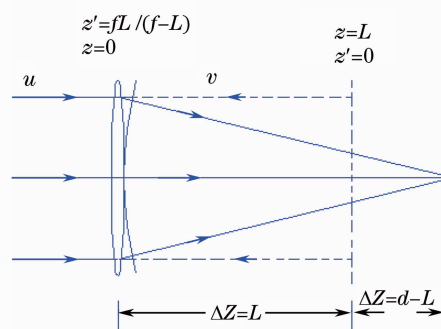


图 1 坐标变换快速傅里叶变换法分两步计算透镜聚焦
Fig. 1 Calculation of lens focusing by two-step coordinate transformation FFT method

图 1 为坐标变换计算透镜聚焦示意图,实线表示真实空间 (x, y, z) 光场传输,虚线表示通过变换的虚拟空间 (x', y', z') 。

第一步:采用坐标扩展变换的 FFT 方法计算距离透镜 L 处的会聚光斑 $u_L(x, y)$ 。主要目的是将计算的空间尺度缩小,因为相同的取样格点数目情况下,小尺度空间能够更详细地描述相同特征的光场分布。第一步中要采用坐标变换方法。透镜位置处 $z=0$;图 1 所示透镜与焦平面之间竖直虚线位置 $z=L$;焦点附近处 $z=d$ 。将 $z>0$ 时的波函数 $u(x, y, z)$ 如下转换:

$$u(x, y, z) = (f - z)^{-1} \times \exp\{j[\pi/(f - z)\lambda](x^2 + y^2)\} v(x', y', z'), \quad (4)$$

式中 (x', y', z') 为新坐标系下的坐标,与原坐标系下的坐标 (x, y, z) 之间的转换关系为

$$x'(x, z) = (\alpha x / f - z), \quad (5)$$

$$y'(y, z) = (\alpha y / f - z), \quad (6)$$

$$z' = \frac{\alpha^2 [(f - z) - (f - L)]}{(f - z)(f - L)}, \quad (7)$$

式中坐标变换参数 α 为任意的常数,在此取为 $\alpha = f$, 是为了使 (x', y', z') 坐标空间计算的横向尺度保持不变。 L 为第一步计算中波函数 u 的真实空间传播距离。将坐标变换关系(4)~(7)式代入傍轴(2)式,经数

学推导得到转换后的波函数 $v(x', y', z')$ 与原函数 $u(x, y, z)$ 一样, 仍然满足与(2)式同样形式的方程。

(2)式中各项为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{f-z} \exp\left[\frac{jk(x^2+y^2)}{2(f-z)}\right] \left[\frac{-k^2 x^2}{(f-z)^2} v + \frac{jk}{f-z} v + \frac{2jk}{f-z} \frac{f}{f-z} x \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{f^2}{(f-z)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} \right], \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{f-z} \exp\left[\frac{jk(x^2+y^2)}{2(f-z)}\right] \left[\frac{-k^2 y^2}{(f-z)^2} v + \frac{jk}{f-z} v + \frac{2jk}{f-z} \frac{f}{f-z} y \frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{f^2}{(f-z)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} \right], \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{f-z} \exp\left[\frac{jk(x^2+y^2)}{2(f-z)}\right] \left[\frac{1}{f-z} v + \frac{jk(x^2+y^2)}{2(f-z)^2} v + \frac{fx}{(f-z)^2} \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{fy}{(f-z)^2} \frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{f^2}{(f-z)^2} \frac{\partial v}{\partial z'} \right]. \quad (10)$$

将以上求导结果代入(2)式,同类项合并,得到 $v(x', y', z')$ 在变换坐标 (x', y', z) 空间中满足的条件:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} - 2jk \frac{\partial v}{\partial z'} = 0. \quad (11)$$

因此, $v(x', y', z')$ 可以用同样的傅里叶变换来解,只是要在新坐标系空间中求解。对应于实际空间中波函数 u 的轴向传播距离 L , 在转换的新坐标系空间中 v 的轴向传播距离为 $L' = \frac{f}{(f-L)}L$, 此处 L' 为负值,计算中用衍射逆运算实现。在光轴不同位置 z 处,新坐标系中的 (x', y') 相应于实际的 (x, y) 空间展开的比例系数不同,也就是说,比例系数是与 z 有关的变化的值。因此,沿 z 轴会聚传播光束 u 的问题被转化为在新坐标系下的等效准直平行光束 v 的传播问题。

第二步:直接应用非扩展坐标的 FFT 方法求解,以 $u_L(x, y)$ 为输入波函数,计算传播距离为 $d-L$ 的焦点附近光场分布,计算过程采用角谱衍射公式作为频域传递函数。

详细计算步骤:

1) 将 $z=0$ 代入(4)~(7)式得到透镜后表面波函数 u_1 为

$$u_1(x, y, 0) = f^{-1} \exp[j(\pi/f\lambda)(x^2 + y^2)] \times v_1\left[x', y', \frac{f}{(f-L)}L\right]. \quad (12)$$

将(12)式与(4)式对照得到 $z=0$, 即 $z' = \frac{f}{L}L$ 处有

$$v_1\left[x', y', \frac{f}{(f-L)}L\right] = u_0(x, y, 0)f,$$

式中 u_0 为激光器输出光波函数。

2) 在 (x', y', z') 新坐标系下,以 v_1 为输入屏,由衍射逆运算的 FFT 计算 $z' = 0$ 处的衍射屏上的

$v_L(x', y', 0)$, 衍射计算传输距离为 $-\frac{f}{(f-L)}L$ 。

3) 将 $v_L(x', y', 0)$ 代入(4)式,得到 (x, y, z) 空间的光场分布 $u_L(x, y, L)$ 。

4) 在 (x, y, z) 坐标系下,以 $u_L(x, y, L)$ 为输入场,应用 FFT 方法直接求解衍射传播距离为 $d-L$, 得到焦点附近的光场分布。

坐标变换的实质是空间尺度的几何缩放,缩放比例沿着 z 轴渐变,在焦点处横向空间尺度为 0,这显然没有考虑实际的衍射极限。根据薄透镜的傅里叶变换特性,计算焦平面处光场分布,也可以直接使用 FFT 计算,焦平面的光场分布正比于入射光波的傅里叶变换。对于焦平面附近的光场分布,本文提出的分两步的计算方法,既利用了坐标变换的优势,又避免坐标空间几何缩放与衍射极限之间的矛盾。

4 以平面波光束为例计算远场聚焦光斑比较

假设聚焦系统的输入波函数为强度均匀分布的平面波,波长 1064 nm,透镜焦距 200 cm,光斑直径为 2.3 cm。如果不采用分两步坐标变换方法,而是直接计算聚焦光场分布,聚焦系统输入波函数经过透镜复振幅变换,在透镜后表面处振幅分布不变,相位分布发生随机振荡,无法进行下一步空间衍射积分的 FFT 计算。透镜后表面光场分布如图 2 所示,相位发生随机震荡是因为激光波长短,透镜焦距小,取样率不够的综合结果。

如果将聚焦透镜焦距变大为 2000 cm,勉强可以计算,但是得到的聚焦光场不够详细,描述聚焦光场分布的取样点数非常少,特别是在输入波函数失调、畸变的情况下,这样的计算结果完全不能清楚地

描述畸变对远场聚焦光斑光场分布的影响情况,如图 3 所示。

如果采用分两步坐标扩展的方法,不仅可以避

免相位随机震荡,还可以得到详细的聚焦光斑光场分布,如图 4 所示。

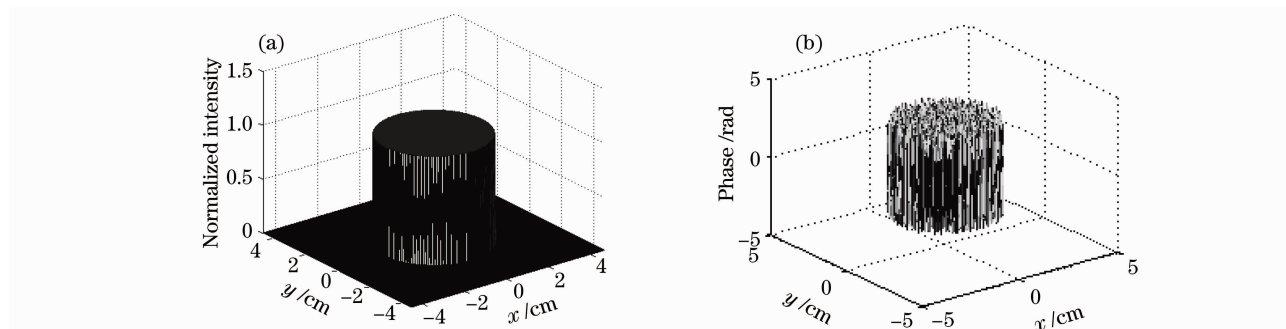


图 2 透镜后表面(a)振幅和(b)相位分布

Fig. 2 Distribution of (a) amplitude and (b) phase on back surface of lens

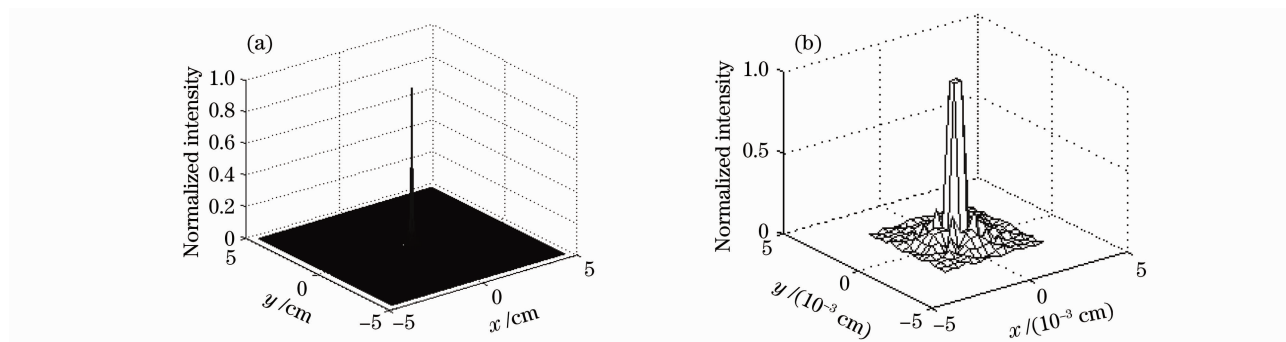


图 3 (a)真实坐标 FFT 计算聚焦光斑和(b)放大观察聚焦光斑

Fig. 3 (a) Focal spot calculated by FFT on real coordinate and (b) view magnified

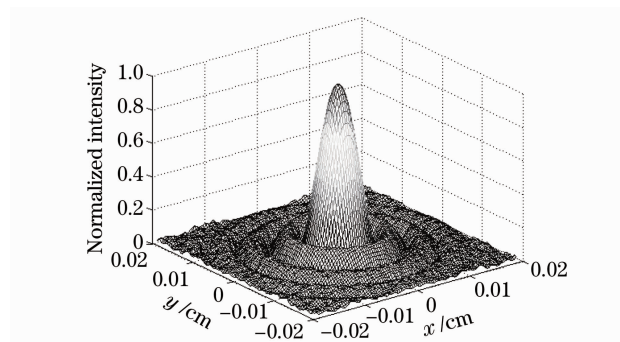


图 4 坐标变换快速傅里叶变换法分两步计算聚焦光斑

Fig. 4 Focal spot calculated by two step coordinate transform FFT method

图 4 为采用分两步坐标变换方法计算得到的聚焦光斑光场分布,能够详细描述聚焦光斑光场分布,有利于进行光束质量分析,有利于进行波前畸变和激光腔失调等对光束质量影响的分析。图 4 中计算的是强度均匀分布理想平面波的聚焦特性, $L=188\text{ cm}$,计算得到的中心亮纹半径为 0.005 cm ,与公式 $a=1.22f\lambda/D$ 计算的艾里斑大小相等,说明了该计算方法的正确性。图 5 可以看出在距离透镜 $z=L$ 处,由 $v(x',y',0)$ 还原 (x,y,z) 坐标空间波函数 $u_L(x,y,L)$,

由于计算横向空间缩小,采样率相对变得密集,此时波函数 u_L 就不会出现相位随机震荡的问题了,所以第二步计算中,从位置 $z=L$ 处到焦平面 $z=f$ 处的传播就可以直接利用 (x,y,z) 坐标空间的 FFT 计算。

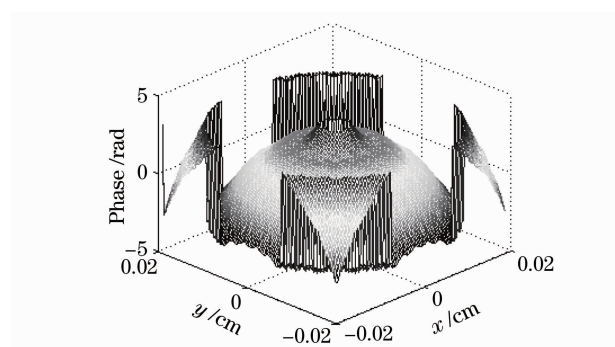


图 5 距透镜 L 处的光场相位分布

Fig. 5 Light-field phase distribution at the distance L from the lens

5 结 论

本文提出分两步 FFT 计算汇聚光束。第一步采用坐标变换的方法将计算的空间尺度缩小,成功

地克服了 FFT 要求计算空间格点间隔一致的限制, 又避免了短波长, 短焦距聚焦系统出现的相位随机跃变的问题。

采用分两步计算的概念, 是因为坐标变换的比例关系没有考虑衍射极限, 按照坐标变换的比例关系, 若要直接计算在透镜后焦点附近的光场分布, 扩展空间将为无穷大, 衍射逆运算的计算距离为无穷大, 计算无法实现。所以选择先计算透镜与焦平面之间的某一位置 L 处的光场分布, 再计算聚焦光场分布。计算中 L 的选取既要使聚焦光斑有足够的取样精度, 又要使衍射逆运算的计算距离不至于太大。

采用本文提出的方法, 以均匀平面波为例, 计算了聚焦光束, 并进行了比较, 以实例说明了该方法的优势, 用本文的方法得到详细的聚焦光场分布。

参 考 文 献

- 1 Zhang Junyong, Lu Xingqiang, Lin Zunqi *et al.*. Analysis of structure parameters for anamorphic fractional Fourier transforms system [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(7): 1717~1720
张军勇, 卢兴强, 林尊琪等. 变形分数傅里叶变换系统的结构参数分析[J]. *中国激光*, 2010, **37**(7): 1717~1720
- 2 Han Chao, Wei Sui, Liu Kaifeng. Coding of tiling algorithm hologram of fractional Fourier and dynamic display [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(12): 3299~3303
韩超, 韦穗, 刘凯峰. 分数傅里叶分块算法全息图的编码与动态显示[J]. *光学学报*, 2009, **29**(12): 3299~3303
- 3 Edward A. Sziklas, A. E. Siegman. Mode calculations in unstable resonators with flowing saturable gain. 2: fast Fourier transform method [J]. *Appl. Opt.*, 1975, **14**(8): 1874~1889
- 4 Li Junchang. *Laser Diffraction and Thermal Acting Calculation* [M]. Beijing: Science Press, 2002
李俊昌. 激光的衍射与热作用计算[M]. 北京: 科学出版社, 2002
- 5 Li Junchang. FFT Computation of angular spectrum diffraction formula and its application in wave front reconstruction of digital holography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(5): 1163~1167
李俊昌. 角谱衍射公式的快速傅里叶变换计算及在数字全息波面重建中的应用[J]. *光学学报*, 2009, **29**(5): 1163~1167
- 6 Duan Haifeng, Yang Zeping, Zhang Yudong. Wave-front reconstruction algorithm of Shack-Hartmann sensor based on FFT algorithm[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(2): 240~244
段海峰, 杨泽平, 张雨东. 快速傅里叶算法在哈特曼-夏克传感器波前重构算法中的应用[J]. *光学学报*, 2003, **23**(2): 240~244
- 7 Ye Yidong, Peng Yong, Chen Tianjiang *et al.*. Numerical simulating of cube corner retroreflector[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(4): 485~490
叶一东, 彭勇, 陈天江等. 角锥后向反射器的数值模拟研究[J]. *光学学报*, 2003, **23**(4): 485~490