

自旋 - 1/2 近似下双势阱中纠缠制备和特性研究

陈 菁¹ 郭彦青² 史旭光¹

(¹ 北京林业大学理学院, 北京 100083; ² 大连海事大学物理系, 辽宁 大连 116026)

摘要 作为量子理论的基础研究, 在宏观系统中制备多粒子纠缠态一直是重要的课题, 运用自旋 - 1/2 近似的方法, 研究束缚在双势阱中的两成份玻色-爱因斯坦(Bose-Einstein)凝聚体系的纠缠态生成问题。这种近似在稳定隧穿条件和奇数粒子条件下可证明是合理的, 分别分析了有效哈密顿量和整体哈密顿量作用下的系统状态演化过程, 最终得到纠缠度较大、持续时间较长的纠缠态, 给出了最大纠缠出现的具体时刻, 并讨论了系统参量对于纠缠度的影响。把即便是对于单成份凝聚体都很难解决的多体问题转化成了二体二能级的问题, 不但大大简化了问题处理的难度, 而且同样给出方便有效的纠缠度量。

关键词 量子光学; 量子纠缠制备; 自旋 - 1/2 近似; 双势阱; 纠缠度量

中图分类号 O431.2 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS201131.0427001

Study on Preparation and Characteristics of Quantum Entanglement in Double Wells Using a Spin - 1/2 Approximation

Chen Jing¹ Guo Yanqing² Shi Xuguang¹

(¹ College of Science, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China
² Department of Physics, Dalian Maritime University, Dalian, Liaoning 116026, China)

Abstract As the foundation of quantum theory, the preparation of many-particle entangled states in macroscopic systems is one of the major goals. A spin - 1/2 approximation method is proposed to study the quantum entanglement of two-component Bose-Einstein condensates (BEC) trapped in double wells. This approximation is demonstrated to be valid under the stationary tunneling condition and for odd particle numbers of each component. The evolutionary process of system states are both analyzed under effective Hamiltonian and whole Hamiltonian. Strong and long time sustained entanglement with respect to tunneling rate and the exact time can be achieved. It is discussed that the effect of the system characteristics on the entangle degree. A multibody problem which is difficult even for single component BEC can be transformed to a bipartite two-state one by this theory, similarly, the entanglement measure can be achieved more effectively.

Key words quantum optics; preparing of entangled states; spin - 1/2 approximation; double wells; entanglement measure

OCIS codes 270.0270; 270.5585; 270.5580

1 引 言

1924 年, 爱因斯坦在理论上预言, 当温度足够低时理想玻色子会出现玻色-爱因斯坦(Bose-Einstein)凝聚。1995 年, 美国科学家在实验室观察到了中性碱金属原子的玻色-爱因斯坦凝聚态(BEC)^[1]。玻色-爱因斯坦凝聚的实验实现为研究宏观冷原子的量子性质提供了新的可能, 近几年成

为最受关注的研究课题之一。量子信息理论研究最感兴趣的是凝聚原子潜在的量子相干性。BEC 系统特有的宏观性质为描述与相干性质密切相关的一些量子现象提供了一个理想的载体。尽管 BEC 问题能用平均场理论来很好地阐述, 但是对于相干性方面的确切描述仍然需要在量子绘景下得到。在常见的量子双模近似下, 最基础的物理模型就是双势

收稿日期: 2010-07-14; 收到修改稿日期: 2010-12-06

基金项目: 北京林业大学新进教师科研启动基金(BLX2007004)资助课题。

作者简介: 陈 菁(1980—), 女, 博士, 讲师, 主要从事量子信息学和量子光学等方面的研究。

E-mail: chenjingjing369@sina.com

阱 BEC。双势阱是量子体系中经常出现的一种势模型。如果两个原子的核电荷数相等,即等核双原子分子,那么这个势场是一个对称的双势阱^[2]。

除了研究量子纠缠基本的物理性质,纠缠态的制备和控制也是量子信息过程中基本的研究课题。结合凝聚物质系统,近几年来纠缠性质的研究主要聚焦在一对通道耦合的玻色-爱因斯坦凝聚体上,最简单的模型就是玻色子被束缚在双模中,即各自占有一个模式,而这种模式又是用 BEC 作为载体的^[3,4]。实验的进展方面,比如巨观凝聚系统的量子隧穿效应在一系列光学晶格中被成功演示^[5,6],对于中子的超流体而言,BEC 的水蒸气粒子在阱中能够很好地得到控制,在光栅中 BEC 的量子隧穿也可以被很好地限制等。

在玻色凝聚体中,隧穿效应的一个显著特征是源于原子间相互作用的非线性动力学。有研究表明对于束缚在双势阱中的单成份凝聚体,原子间相互作用的自束缚机制对于隧穿率起明显地禁止作用^[7-9]。本文研究在一种有效的近似假设下,束缚在双势阱中的 N 个两成份粒子的纠缠问题。

2 模型介绍

双势阱系统模型如图 1 所示。初始状态下,粒子 A 和 B 分居在左、右两阱中。二次量子化后处于外势 $V(\mathbf{r})$ 中的 N 个弱相互作用玻色子系统的哈密顿(Hamilton)量为

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

式中 $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ 和 $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$ 是玻色子的湮灭和产生场算符, m 是粒子质量,相互作用参量 $g = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m}$ (a_s 是 s-波散射波长)。以往对于双阱 BEC 系统或双体凝聚

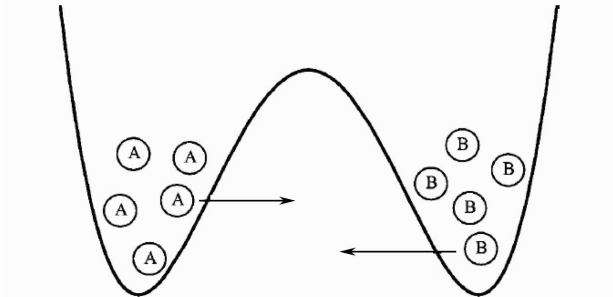


图 1 有两种成份凝聚体束缚其中的双势阱系统
Fig. 1 Double-well system with two-component condensate trapped

态系统的研究证明,双模近似法^[10]是一种已经广泛应用在双势阱凝聚体系的方法,低能量的多体哈密顿量即(1)式可以用此方法简化,在这种近似方法下,系统模型的哈密顿量(设约化的普朗克常数 $\hbar = 1$)为^[11]

$$\hat{H} = \frac{\Omega_A}{2} (a_L^\dagger a_R + a_R^\dagger a_L) + \frac{\Omega_B}{2} (b_L^\dagger b_R + b_R^\dagger b_L) + \kappa (a_L^\dagger a_L b_L^\dagger b_L + a_R^\dagger a_R b_R^\dagger b_R) + \frac{\kappa_A}{2} [(a_L^\dagger a_L)^2 + (a_R^\dagger a_R)^2] + \frac{\kappa_B}{2} [(b_L^\dagger b_L)^2 + (b_R^\dagger b_R)^2], \quad (2)$$

式中下标 L 和 R 分别表示粒子处于左右阱的两种模式,又因为此系统有两种粒子,所以哈密顿量中共有四种算符:式中分别用 $a_j^\dagger, a_j, b_j^\dagger, b_j$ ($j = L, R$) 表示粒子 A 和粒子 B 在两个势阱中的产生和湮灭算符。参量 Ω_i, κ_i ($i = A, B$) 和 κ 分别描述隧穿率,粒子 A 或 B 的自相互作用强度和 A, B 粒子间的相互作用强度。参量 Ω_i 与粒子数 N_i 呈线性关系,在二次量子化过程中表明 $\Omega_i = \epsilon_{L,Ri} + gT_{Li}(N_i - 1)$, $\epsilon_{L,Ri}, T_{Li}$ 都是二次量子化后的参数,具体表示为

$$\epsilon_{L,Ri} = \int d\mathbf{r} \phi_{Li}(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \phi_{Ri}(\mathbf{r}),$$

$$T_{Li} = \int d\mathbf{r} \phi_{Li}^3(\mathbf{r}) \phi_{Ri}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

式中 ϕ_{Li} 和 ϕ_{Ri} 对应于成份 i 的单粒子薛定谔(Schrödinger)波函数, $\epsilon_{L,Ri}$ 正比于外场单粒子的转置频率,表征了单粒子的隧穿程度, T_{Li} 则表示隧穿过程中的相互作用能量。为了简化双模哈密顿量,对单粒子能量和隧穿过程参量进行单参量近似。

在一个相对称的双体 BEC 模型中,粒子 A 和 B 的参量是相互等价的,即 $\Omega_A = \Omega_B$ 和 $\kappa_A = \kappa_B$ 。如果选择具有超精细结构态的凝聚态粒子,例如 $|F = 1, m = -1\rangle$ 和 $|F = 2, M = 1\rangle$ 的⁸⁷Rb(其中 F 为自旋角动量量子数, m 为磁量子数),以上条件就可以近似成立。凝聚体中的两种成份具有相同的质量和磁矩,满足 $\Omega_A = \Omega_B$ 。它们成份间的散射波长十分接近,所以有 $\kappa_A \approx \kappa_B$ ^[12]。

3 经典数值分析

BEC 模型是理想的模型,一方面由于其粒子数目庞大可以通过经典方法对系统进行分析,另一方面又可以应用量子方法针对量子叠加态的性质进行研究。总之,不论是从数目的巨观方面还是从叠加性的微观方面,模拟过程均可以在此模型中较好地展开。

对双势阱 BEC 系统,描述平均场动力学的经典哈密顿量已经被人们所熟知,假设其中存在足够多的粒子(粒子数为 N),按照平均场假设,粒子 A 或 B 在势阱中的湮灭算符 \hat{a}_j 可以由复数 $\sqrt{n_j}\exp(i\theta_j)$ 来代替(其中 j 为两种模式 L 和 R, n_j 为两种模式 L 和 R 中的粒子数, θ_j 为粒子在两种模式中的相位),对于粒子 A 和 B 分别作替换: $\hat{a}_j \rightarrow \sqrt{n_{Aj}}\exp(i\theta_{Aj})$, $\hat{b}_j \rightarrow \sqrt{n_{Bj}}\exp(i\theta_{Bj})$ 并定义粒子数差及相位差 $n = (n_L - n_R)/2$, $\theta = \theta_L - \theta_R$, 即

$$\begin{aligned} n_{AL} + n_{AR} &= N_A \\ n_{BL} + n_{BR} &= N_B \\ n_A &= \frac{n_{AL} - n_{AR}}{2} \\ n_B &= \frac{n_{BL} - n_{BR}}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

系统的经典哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_{cl} &= \frac{\Omega}{2} [\sqrt{N_A^2 - (2n_A)^2} \cos \theta_A + \\ &\quad \sqrt{N_B^2 - (2n_B)^2} \cos \theta_B] + \frac{\kappa}{2} N_A N_B + \frac{\kappa_A}{4} N_A^2 + \\ &\quad \frac{\kappa_B}{4} N_B^2 + \kappa_A n_A^2 + \kappa_B n_B^2 + 2\kappa n_A n_B, \end{aligned} \quad (5)$$

其演化方程为

$$\dot{n}_A = \frac{\Omega}{2} \sqrt{N_A^2 - (2n_A)^2} \sin \theta_A, \quad (6)$$

$$\dot{n}_B = \frac{\Omega}{2} \sqrt{N_B^2 - (2n_B)^2} \sin \theta_B. \quad (7)$$

图 2 为 A 成份粒子数差 n_A 随时间和隧穿率 Ω 的函数关系图(可以证明 B 成份粒子数差 n_B 随时间和隧穿率 Ω 的函数关系图与 A 成份的类似),分析可以得到两个阱中每个成份的粒子数差都呈现出一种周期变化,周期的由粒子数决定,粒子数越

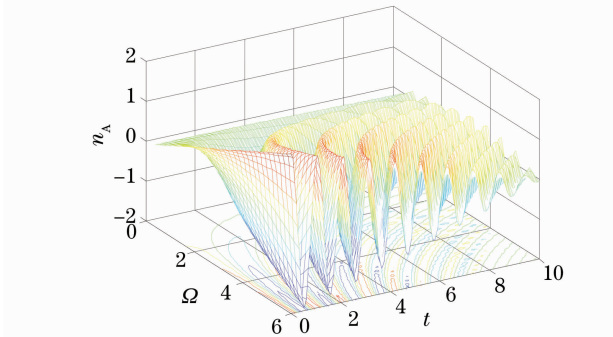


图 2 A 成份粒子数差 n_A 随时间和隧穿率 Ω 的函数关系图

Fig. 2 Population difference for component A as a function of the tunneling rate Ω and time t

多,周期越小,值得强调的是:A 类粒子两阱间的粒子数差随时间递减,也就是粒子数差的峰值会越来越小(对于 B 类粒子有相同的情况)。因此推断两阱间粒子数在特定时间内将趋于平衡。从物理角度上分析,因为每个成份都有 $N+1$ 个正交福克(Fock)态,粒子数一定是不连续的,也就是说,若粒子数 N 是偶数,则在每个阱中各自会有 $N/2$ 个粒子,若 N 是奇数,那么两阱间的粒子数差为 $\pm 1/2$ 。不论初始时每个阱中粒子数是多少,随着时间的演化,隧穿效应与粒子间斥力的作用最终会使两阱间的粒子数差趋于最小值 0 或 $1/2$ 。

4 自旋-1/2 近似假设下纠缠态的制备和度量

Schwinger 根据谐振子建立了一套角动量代数法以解决生成和湮没的两种(上和下)算符^[13]。现构造角动量为

$$\begin{aligned} J_+ &= J_x + iJ_y = a^\dagger a_- \\ J_- &= J_x - iJ_y = a^\dagger a_+, \\ J_z &= \frac{1}{2}(a^\dagger a_+ - a^\dagger a_-) \end{aligned} \quad (8)$$

以上构造的角动量同样满足标准角动量对易关系: $[J_l, J_m] = i\epsilon_{lmn} J_n$ 。把系统中的双势阱看作是一个二态系统,即把左右两势阱当作二能级系统的两个能级,同样引入角动量算符来描述本系统哈密顿量,即对束缚在一个双势阱中的两成份凝聚体系定义:

$$\begin{aligned} S_i^+ &= \Lambda_L^\dagger \Lambda_R \quad S_i^- = \Lambda_L \Lambda_R^\dagger \\ S_i^z &= \frac{1}{2}(\Lambda_L^\dagger \Lambda_L - \Lambda_R^\dagger \Lambda_R), \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $i=A, B, \Lambda = a, b$ (为粒子 A 或 B 的湮没算符)。 S_A^+, S_A^- 也满足角动量的对易关系: $[S_A^+, S_A^-] = 2S_A^z$ 。通过以上定义,把粒子在左和右阱视为两种态 ($|L\rangle$ 和 $|R\rangle$)。对于有 N 个粒子的系统,联合自旋为

$$S_z = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2},$$

所以粒子数为 N_i 的成份 i 将可能有 N_i 个“激发态”,如图 3 所示,此时 S_z 与粒子数差(POD)相等。假设最初每个成份的粒子数为奇数,时间演化后两阱间粒子数差是 $\pm 1/2$,那么每个成份的联合自旋也就是 $\pm 1/2$,这种假设使每个成份绝热地消除了“高能态”,此时把每个成份当作赝自旋期望值为 $\pm 1/2$ 的赝粒子看待。

赝自旋的升(降)算符为 $S^+ (S^-)$,可以用狄拉

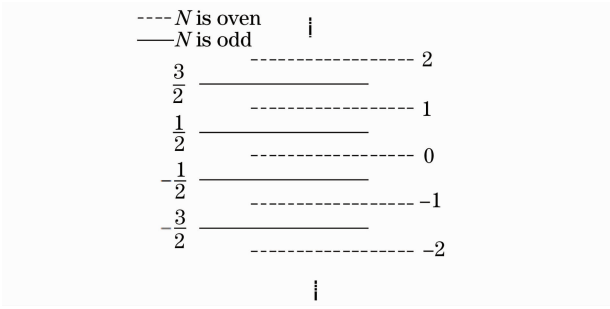


图 3 赝自旋算符 S_z 的分布

Fig. 3 Distribution of pseudo-spin operator S_z

克(Dirac)符号来表示:

$$\begin{aligned} S_A^+ &\rightarrow |L\rangle_A \langle R| \\ S_A^- &\rightarrow |R\rangle_A \langle L| \\ S_B^+ &\rightarrow |L\rangle_B \langle R| \\ S_B^- &\rightarrow |R\rangle_B \langle L| \end{aligned} \quad (10)$$

为了简便说明纠缠的产生,先对系统的有效哈密顿量来进行操作求出系统的态函数,经过分析,系统的有效哈密顿量为^[11]

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} = & -\frac{\Omega^2}{2\kappa} (a_L^+ a_R b_L b_R^+ + a_L a_R^+ b_L^+ b_R) \\ & + a_L^+ a_L a_R^+ a_R + b_L^+ b_L b_R^+ b_R, \end{aligned} \quad (11)$$

将(11)式与(9)式联立,当

$$\begin{aligned} a_L^+ a_L &= \frac{1}{2} I_A + S_A^z, & a_R^+ a_R &= \frac{1}{2} I_A - S_A^z, \\ b_L^+ b_L &= \frac{1}{2} I_B + S_B^z, \\ b_R^+ b_R &= \frac{1}{2} I_B - S_B^z, & \xi &= -\frac{\Omega^2}{2\kappa} \end{aligned}$$

系统的有效哈密顿量化简为

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= \xi (S_A^+ S_B^- + S_A^- S_B^+) = \\ & \xi (|L\rangle_A \langle R| \otimes |R\rangle_B \langle L| + |R\rangle_A \langle L| \otimes |L\rangle_B \langle R|), \end{aligned} \quad (12)$$

式中“ \otimes ”表示态矢量直积,设系统的态函数为 $|\Psi(t)\rangle = \exp(-iHt)|\Psi(0)\rangle = U|\Psi(0)\rangle$, 并设初始时刻,A 粒子在左阱,B 粒子在右阱,则 $|\Psi(0)\rangle = |L\rangle_A \otimes |R\rangle_B$, 又因为

$$\begin{aligned} U &= \exp(-iHt) = 1 - iHt - \frac{H^2 t^2}{2!} + \frac{iH^3 t^3}{3} + \\ & \frac{H^4 t^4}{4!} + \dots \\ H^2 &= \xi^2 (|L\rangle_A \langle L| \otimes |R\rangle_B \langle R| + \\ & |R\rangle_A \langle R| \otimes |L\rangle_B \langle L|) \\ H^3 &= \xi^3 (|L\rangle_A \langle R| \otimes |R\rangle_B \langle L| + \\ & |R\rangle_A \langle L| \otimes |L\rangle_B \langle R|) \\ & \vdots, \end{aligned} \quad (13)$$

所以得到

$$|\Psi(t)\rangle = \cos \xi t |L\rangle_A \otimes |R\rangle_B - i \sin \xi t |R\rangle_A \otimes |L\rangle_B, \quad (14)$$

系统的密度算符为

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|,$$

并用 $|L\rangle_A \otimes |L\rangle_B$, $|L\rangle_A \otimes |R\rangle_B$, $|R\rangle_A \otimes |L\rangle_B$, $|R\rangle_A \otimes |R\rangle_B$ 基展开。

对于纠缠度的度量有形成纠缠度、提纯纠缠度和相对熵纠缠度等纠缠度量标准,但这些度量标准计算起来往往比较麻烦,对二体二能级系统的纠缠度量,一些简单的度量标准如 Wootters concurrence 已经被广泛应用^[14], 定义为

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (15)$$

式中 $\max\{\cdot\}$ 为取最大值计算, λ_i 是厄米算符 $\rho \tilde{\rho}$ 本征值的平方根,其中 $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y)$, 并按降序排列连减,若结果大于零,则表示系统有纠缠,反之表示没有纠缠。Wootters concurrence 提供了度量纠缠的明确表达式,从而对制备出的纠缠度进行了量化。经过计算,可以得到 $C_w = |\sin 2\xi t|$, 结果表明纠缠已经产生,并且呈现三角函数类型的周期性变化。

对于系统的整体哈密顿量式(2),用 $|L\rangle_A \otimes |L\rangle_B$, $|L\rangle_A \otimes |R\rangle_B$, $|R\rangle_A \otimes |L\rangle_B$, $|R\rangle_A \otimes |R\rangle_B$ 基矢展开:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} K_1 & K & K & 0 \\ K & K_2 & 0 & K \\ K & 0 & K_2 & K \\ 0 & K & K & K_1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

式中 $K = \frac{\Omega}{2}$, $K_1 = \kappa + \frac{\kappa_A}{2} + \frac{\kappa_B}{2}$, $K_2 = \frac{\kappa_A}{2} + \frac{\kappa_B}{2}$ 。由此可解出哈密顿量的本征值和本征态:

$$\begin{aligned} E_1 &= K_2, \phi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (|L\rangle_A |R\rangle_B - |R\rangle_A |L\rangle_B); \\ E_{2,3} &= \frac{K_2 + K_1 \pm \Theta}{2}, \\ \phi_{2,3} &= \xi_{2,3} [|L\rangle_A |L\rangle_B \mp \frac{-K_2 + K_1 - \Theta}{4K} \cdot \\ & (|L\rangle_A |R\rangle_B + |R\rangle_A |L\rangle_B) + |R\rangle_A |R\rangle_B]; \\ E_4 &= K_1, \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|L\rangle_A |L\rangle_B - |R\rangle_A |R\rangle_B), \end{aligned} \quad (17)$$

式中 ξ_2 和 ξ_3 是归一化常数,且

$$\Theta = \sqrt{K_2^2 - 2K_1 K_2 + K_1^2 + 16K^2},$$

假设系统最终演化态为

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_i C_i(t) |\phi_i\rangle,$$

其满足薛定谔方程,则

$$\begin{aligned}
 i \sum_i \dot{C}_i(t) |\phi_i\rangle &= \sum_i H C_i(t) |\phi_i\rangle = \sum_i C_i(t) E_i |\phi_i\rangle \\
 \dot{C}_i(t) &= -i C_i(t) E_i \\
 C_i(t) &= C_i(0) \exp(-i E_i t).
 \end{aligned} \quad (18)$$

假设初始时刻,粒子 A 的粒子数差值为 $1/2$,粒子 B 的粒子数差值为 $-1/2$,因此系统的初始态为

$$|\Psi(0)\rangle = |L\rangle_A \otimes |R\rangle_B$$

则

$$\begin{aligned}
 C_1(0) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\
 C_2(0) &= \frac{1}{2\Theta} \sqrt{\frac{(K-1-K_2-\Theta)^2 + 16K^2}{2}}, \\
 C_3(0) &= \frac{1}{2\Theta} \sqrt{\frac{(K-1-K_2+\Theta)^2 + 16K^2}{2}}, \\
 C_4(0) &= 0.
 \end{aligned} \quad (19)$$

所以系统的波函数为

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= C_1(0) \exp(-i E_1 t) |\phi_1\rangle + \\
 &C_2(0) \exp(-i E_2 t) |\phi_2\rangle + C_3(0) \exp(-i E_3 t) |\phi_3\rangle,
 \end{aligned}$$

可用基矢 $|L\rangle_A \otimes |L\rangle_B, |L\rangle_A \otimes |R\rangle_B, |R\rangle_A \otimes |L\rangle_B, |R\rangle_A \otimes |R\rangle_B$ 展开,又系统的密度算符为

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|.$$

采用 concurrence 方法来衡量此时产生的纠缠度的情况,如图 4 所示。可见在没有外界退相干机制干扰的情况下,由于双势阱中各成份波包的交叠,

纠缠已经产生,并且对于时间的演化呈现出一种周期性的起伏状态,也就是说,双模间的纠缠行为是非单调的,而最大纠缠的数值出现在了隧穿时间为 $t \approx \kappa/\Omega^2 (\pi/2 + k\pi)$ 的时刻。根据经验,要考察一个纠缠态的品质好不好,可以从这个纠缠态存在的时间长短来观察。存在时间越久的纠缠态,其可利用率越高。

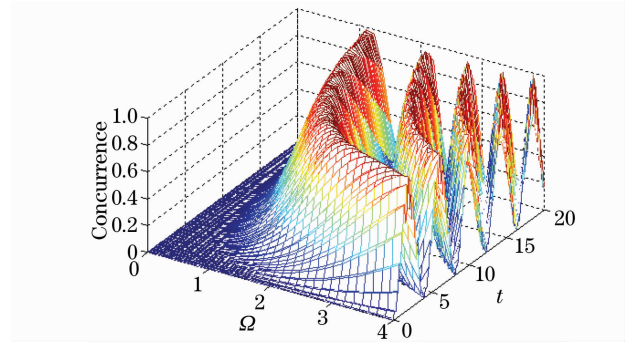


图 4 纠缠度与隧穿率 Ω 和时间 t 的函数关系
Fig. 4 Degree of entanglement as a function of the tunneling rate Ω and time t

不同参量选择下的纠缠度如图 5 所示,可见当 A,B 类粒子间的相互作用强度 κ 和自相互作用强度 κ_A 或 κ_B 相比拟时纠缠态存在的时间较长,可利用率较高。并且 κ 不适宜远小于 κ_A 或 κ_B ,如图 5(a)所示,否则纠缠度峰值区域也会随时间出现周期性变化,如图 6 所示,图 6(a)中 κ 与 κ_A 或 κ_B 相同时,纠缠的峰值

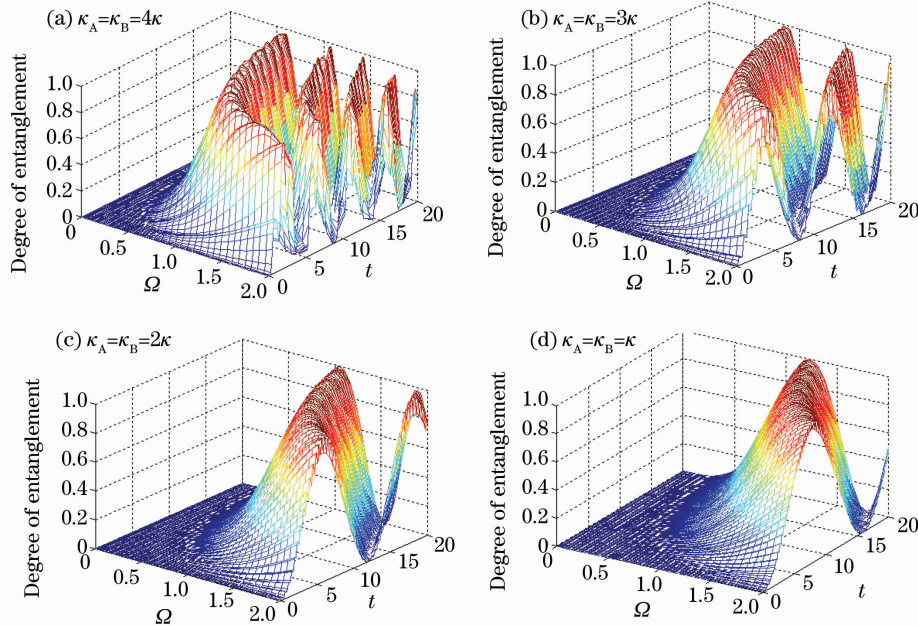


图 5 不同相互作用强度下纠缠度(concurrence)与隧穿率 Ω 和时间 t 的函数关系

Fig. 5 Degree of entanglement (concurrence) as a function of the tunneling rate Ω and time t under different $\kappa_A = \kappa_B$

处曲面较圆滑,且最大值都接近 1,纠缠可利用率高;而图 6(b)中 κ 远小于 κ_A 或 κ_B 时,会发现纠缠的峰值处如倒钟乳石状,纠缠最大值持续时间短且不稳定,即其利用率低,纠缠被削弱。将会使生成纠缠的可利用率更低。对于 $\kappa_A = \kappa_B = \kappa$ 的这种参量选择情况,还可以发现,隧穿率 Ω 的选择也会影响纠缠的质量,引入纠缠度峰值半峰全宽 τ 来作为考察纠缠

品质的指标,如图 7(a)所示当 $\Omega=1$ 时,在最大峰值位置, $\tau \approx 32.369$;而当 $\Omega=1.5$ 时,如图 7(b)所示, $\tau \approx 12.998$ 。更多的数据表明 Ω 值越大, τ 越小,在二次量子化过程中, Ω 的取值与粒子数线性相关,纠缠态的品质依赖于粒子数的选择,这便决定了粒子数不能太多。所以为了得到品质较好的、峰值大且持续时间久的纠缠态,参量的选择尤为重要。

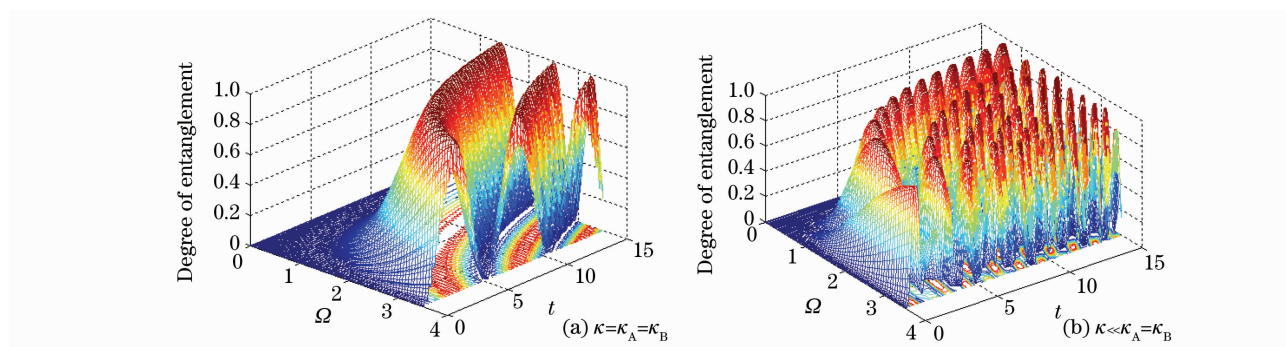


图 6 Ω 取值范围较大时纠缠度与隧穿率 Ω 和时间 t 的函数关系

Fig. 6 Degree of entanglement as a function of the tunneling rate Ω and time t when Ω is in a larger scale

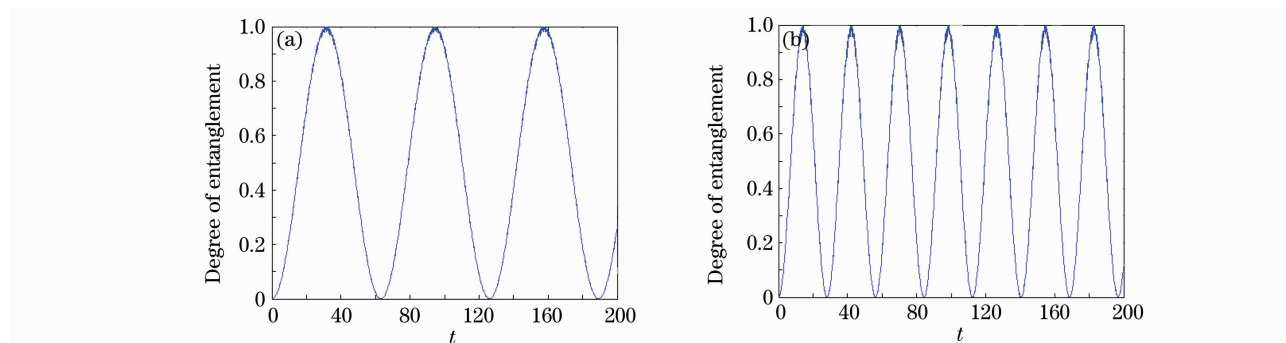


图 7 当(a) $\Omega=1$, (b) $\Omega=1.5$ 时,纠缠度与时间 t 的函数关系

Fig. 7 Degree of entanglement as a function of time t for parameter values (a) $\Omega=1$ and (b) $\Omega=1.5$

在实验中,既可以使用如⁴¹K 和⁸⁷Rb 的两种原子,也可以使用具有超精细结构的同一种原子的两个超精细能级,如⁸⁷Rb 的两个自旋态 $|F=1, m=-1\rangle$ 和 $|F=2, m=-1\rangle$ 作为实现本文方案的备选粒子。此外,在原子和分子冷却技术飞速发展的基础上,双光阱在实验上也得到实现,它的实现在双样品原子的囚禁、冷原子的碰撞、双样品玻色-爱因斯坦凝聚性质以及双原子团间量子纠缠等方面有广阔的应用前景,为实现上述纠缠态提供良好的实验基础^[15~18]。本文方案中关于经典运动方程的推导依赖于大粒子数条件 ($N \gg 1$)。1995 年 Cornell 小组实现的第一个⁸⁷Rb 原子 BEC 中原子数量已经达到 2000 个,1997 年该小组在双阱 BEC 中成功凝聚了 2×10^6 个自旋态为 $|F=1, m=-1\rangle$ 和 $|F=2, m=1\rangle$ 的⁸⁷Rb 原子^[12],因此经典运动方程是有效的。当两种粒子的数量皆为奇数时,隧穿的结果是每一种粒子在两阱中的粒子数

差 $|n_R - n_L| = 1$, 这样把一个双成份多体问题转化成了一个等效的两体二能级的问题,实现这样稳定的粒子数差所需要的时间与隧穿率 Ω 有关, Ω 越大,实现稳定隧穿所需要的时间越短。需要注意的是,在大粒子数条件下,较强的隧穿率 Ω 使得纠缠发生快速振荡,不利于产生稳定量子纠缠,但是在最近的量子计算研究中已经发现,利用满足 Dicke 模式的两团原子(原子数为 N , 通过交换光子发生相互作用)所产生的量子纠缠周期是两个原子时的 $1/\sqrt{N}$,但同时用其所执行的量子逻辑门运算速度有 \sqrt{N} 的加速^[19]。使得系统在退相干时间内能够执行的量子信息操作次数快速增加。这里同样可以判定,较强的隧穿率 Ω 导致的纠缠快速振荡对于提高量子计算速度(如量子态传输和交换等)是有益的。此外,即使在实验中无法实现囚禁原子的准确计数,考虑到 N 非奇即偶,本文方

案的成功机率仍然可以达到 50%。

5 结 论

将两团粒子数为奇数的玻色-爱因斯坦凝聚体近似等效为自旋 1/2 的赝粒子,研究了束缚在双势阱中的两成份玻色-爱因斯坦凝聚体系的纠缠生成问题。其中将经典物理的处理方法与量子的方法相结合,分析了此近似的合理性;把凝聚体中的多体问题转化成了两体二能级问题,大大简化问题处理的难度。隧穿率 Ω 是影响赝粒子纠缠的关键因素, Ω 较小时,纠缠峰值的半峰全宽 τ 较大,容易产生较稳定的量子纠缠, Ω 较大时,两阱中粒子数较快地达到平衡,纠缠产生快速振荡,这有助于提高量子计算(如量子态传输和交换等)速度。A, B 类粒子间相互作用强度 κ 会明显影响纠缠的品质,当 A, B 类粒子间的相互作用强度 κ 和自相互作用强度 κ_A 或 κ_B 相比拟时纠缠态存在的时间较长,可利用率较高。

参 考 文 献

- Zhou Ming, Huang Chunjia. Influence of an atomic Bose-Einstein condensate on squeezing properties of light [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(4): 1096~1100
周明, 黄春佳. 原子玻色——爱因斯坦凝聚体对光场压缩特性的影响[J]. *光学学报*, 2009, **29**(4): 1096~1100
- Liang Xiaxia, Li Jiguang, Dong Chenzhong. Investigation of one-dimension double-potential well [J]. *J. Atomic and Molecular Physics*, 2008, **25**(5): 1039~1044
梁霞霞, 李冀光, 董晨钟. 一维双势阱问题的理论研究[J]. *原子与分子物理学报*, 2008, **25**(5): 1039~1044
- A. P. Hines, R. H. McKenzie, G. J. Milburn. Entanglement of two-mode Bose-Einstein condensates[J]. *Phys. Rev. A*, 2003, **67**(1): 013609-10
- Zou Yan. Entanglement properties in the system of atoms in Bell states interacting with the two-mode odd-even entangled coherent field[J]. *Chin. J. Quant. Electron.*, 2009, **26**(1): 69~75
邹艳. Bell 态原子与双模奇偶纠缠相干光场相互作用的纠缠特性[J]. *量子电子学报*, 2009, **26**(1): 69~75
- B. P. Anderson, M. A. Kasevich. Macroscopic quantum Interference from atomic tunnel arrays [J]. *Science*, 1998, **282**(5394): 1686~1689
- F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort *et al.*. Josephson junction arrays with Bose-Einstein condensates [J]. *Science*, 2001, **293**(5531): 843~846
- A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi *et al.*. Quantum coherent atomic tunneling between two trapped Bose-Einstein condensates [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **79**(25): 4950~4953
- G. J. Milburn, J. Corney, E. M. Wright *et al.*. Quantum dynamics of an atomic Bose-Einstein condensate in a double-well potential[J]. *Phys. Rev. A*, 1997, **55**(6): 4318~4324
- S. Raghavan, A. Smerzi, S. Fantoni *et al.*. Coherent oscillations between two weakly coupled Bose-Einstein condensates: Josephson effects, π oscillations and macroscopic quantum self-trapping [J]. *Phys. Rev. A*, 1999, **59**(1): 620~633
- R. W. Spekkens, J. E. Sipe. Spatial fragmentation of a Bose-Einstein condensate in a double-well potential[J]. *Phys. Rev. A*, 1999, **59**(5): 3868~3877
- H. T. Ng, C. K. Law, P. T. Leung. Quantum-correlated double-well tunneling of two-component Bose-Einstein condensates[J]. *Phys. Rev. A*, 2003, **68**(1): 013604-6
- C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist *et al.*. Production of two overlapping Bose-Einstein condensates by sympathetic cooling [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **78**(4): 586~589
- A. Bandyopadhyay, J. Rai. Uncertainties of Schwinger angular-momentum operators for squeezed radiation in interferometers [J]. *Phys. Rev. A*, 1995, **51**(2): 1597~1603
- Cai Xunming, Fan Menghui. The entanglement of two atoms in a coherent field of time-varying frequency[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(9): 2570~2576
蔡勋明, 范梦慧. 频率变化的相干态光场中两原子纠缠演化[J]. *光学学报*, 2009, **29**(9): 2570~2576
- Li Yali, Wang Zhijian, Gong Tianlin *et al.*. Experiment of controllable double-well optical trap and application of asymmetric double-well optical trap[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(10): 2924~2928
李雅丽, 王志坚, 龚天林等. 可控制光学双阱实验及非对称双阱的应用[J]. *光学学报*, 2009, **29**(10): 2924~2928
- Lu Junfa, Ji Xianming, Yin Jianping. Controllable eight-well optical trap and the two-dimensional optical lattices for cold atoms or molecules [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(7): 1017~1023
陆俊发, 纪宪明, 印建平. 囚禁冷原子或冷分子的可控制光学八阱及其光学晶格[J]. *中国激光*, 2008, **35**(7): 1017~1023
- Lu Junfa, Ji Xianming, Zhou Qi *et al.*. A novel controllable four-well optical trap for cold atoms or molecules and its two-dimensional optical lattices[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(2): 211~218
陆俊发, 纪宪明, 周琦等. 一种新颖的实现冷原子或冷分子囚禁的可控制光学四阱及其二维光学晶格[J]. *光学学报*, 2008, **28**(2): 211~218
- Mu Renwang, Ji Xianming, Yin Jianping. Double-layer optical-trap arrays for trapping cold atoms or molecules[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(3): 822~826
沐仁旺, 纪宪明, 印建平. 实现冷原子或冷分子囚禁的双层光阱阵列[J]. *光学学报*, 2009, **29**(3): 822~826
- Z. Q. Yin, F. L. Li. Multiatom and resonant interaction scheme for quantum state transfer and logical gates between two remote cavities via an optical fiber [J]. *Phys. Rev. A*, 2007, **75**(1): 012324