

# 用泽尼克多项式消除三维轮廓术中的条纹载频

吴志云 张启灿

(四川大学电子信息学院光电科学技术系, 四川 成都 610065)

**摘要** 在基于条纹投影的三维轮廓术中, 投影条纹不可避免地会引入载频分量。同时实际成像系统又存在畸变等光学像差, 导致载频分量不再是线性分布, 只有准确消除载频成分后, 才能还原待测物体的三维形貌。提出了一种运用泽尼克多项式拟合消除载频的方法, 用参考平面区域数据点的相位值和泽尼克多项式值, 拟合得到整幅图像的载频相位分布, 从整体的相位中减去载频相位, 获得由物体高度调制的相位分布。对理想变形条纹和有畸变变形条纹的载频消除过程分别进行了模拟实验, 并与现有方法的结果进行了对比, 验证了该方法的有效性。实物实验也表明该方法可以有效地消除载频, 减小重建误差, 且其算法简单, 只需单帧图像即可消除载频, 有望在动态三维面形测量中得到应用。

**关键词** 三维面形测量; 载频消除; 泽尼克多项式; 条纹分析

**中图分类号** O438 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS201131.0412011

## Carrier Removal Method in Fringe Projection Profilometry Using Zernike Polynomials

Wu Zhiyun Zhang Qican

(Department of Opto-Electronics, School of Electronics and Information Engineering, Sichuan University,  
Chengdu, Sichuan 610065, China)

**Abstract** In three-dimensional (3D) profilometry based on fringe projection, projected fringe patterns will introduce carrier phases into the overall phase distribution. In an actual imaging system, optical aberration will result in nonlinear carrier, so the nonlinear carrier must be removed accurately to get the phase distribution modulated by the object. A new carrier removal method using Zernike polynomials fitting is proposed. The carrier phases can be obtained by Zernike polynomials fitting using data points on reference area. By subtracting the carrier phases from the overall phase distribution, the object height-related phases can be obtained. Simulation experiments are performed to evaluate the performance of the method for two deformed fringe patterns with and without image aberration. The experimental results show that the method can effectively remove the carrier, and reduce the reconstruction error. And this method has simple algorithm, needs only one image and can be used in the applications which require least time consumption.

**Key words** three-dimensional measurement; carrier removal; Zernike polynomials; fringe analysis

**OCIS codes** 120.0120; 120.6650; 100.0100; 100.2650

### 1 引 言

基于条纹投影的三维测量轮廓术<sup>[1,2]</sup>是将载频条纹投影到待测三维物体表面, 得到被三维物体面形分布调制的变形条纹光场, 通过相位提取算法, 如傅里叶变换轮廓术 (FTP)<sup>[1]</sup>、相位测量轮廓术

(PMP)<sup>[2]</sup>等将截断相位提取出来, 经过相位展开恢复连续的相位分布。此时的相位分布中包含载频条纹的相位和由物体高度调制的相位。要正确恢复物体的三维轮廓, 就要消除载频相位的影响。

Takeda 等<sup>[1,3]</sup>提出了频谱移中法和减参考平面

**收稿日期:** 2010-10-18; **收到修改稿日期:** 2010-11-27

**基金项目:** 国家自然科学基金(60807006)资助课题。

**作者简介:** 吴志云(1986—), 女, 硕士研究生, 主要从事三维测量方面的研究。E-mail: wzy892@foxmail.com

**导师简介:** 张启灿(1974—), 男, 博士, 副教授, 主要从事光学三维传感、动态过程三维测量和相位展开等方面的研究。

E-mail: zqc@scu.edu.cn(通信联系人)

法。频谱移中法是将滤出的基频分量在频域中进行平移,根据傅里叶变换的性质,这相当于在空域中减去一定的相位,从而消除载频。减参考平面法是对测量范围内一个标准平面上的结构光场做一次单独的测量作为参考平面,并且对其进行与变形条纹一样的处理,求得载频函数的相位分布,从整体的相位中减去参考平面的相位,恢复出物体高度调制的相位。Li等<sup>[4]</sup>提出平均斜率法,求展开相位的一阶导数,看做载频频率的近似值,在整体相位中减去载频相位来消除载频的影响。Chen等<sup>[5]</sup>提出最小二乘法,将载频函数用级数展开的形式来近似,并通过最小二乘的方法求得各级数展开项的系数,从而求出载频相位分布,从整体相位中减去拟合的载频相位,消除其影响。

现有的载频消除方法均有一定的适用范围和局限性:频谱移中法仅适用于线性载频,当载频条纹由于光学系统的像差等影响,不是良好的线性分布时将无法达到完全消除载频的效果,并且频谱移中法消除载频需要人为地确定频谱的位移量。减参考平面法必须对投影条纹单独进行一次测量,增加了测量的时间开销,不适用于动态测量<sup>[6]</sup>。平均斜率法仅适用于消除单一方向上的线性载频。最小二乘法的级数项相互之间并非线性无关,求解系数的过程中可能构造出病态的法方程组,且必须满足载频相位函数级数收敛条件,限制了其应用范围。

本文提出用泽尼克多项式拟合消除载频的方法。泽尼克多项式由于其各项与赛德像差的各项相对应<sup>[7~9]</sup>,可以有选择地处理各像差系数,在光学领域的数据处理中有非常大的优势,且归一化后其各项是线性无关的函数系<sup>[10]</sup>,系数的求解较为简单,已经广泛应用于光学波前拟合、光学设计、干涉检测等方面<sup>[10~12]</sup>。在条纹投影轮廓术中,拍摄图像受到成像系统像差的影响,不再是理想的条纹,提取出来的展开相位同样受到像差的影响,产生畸变,不再是单一的线性分布。因此,用泽尼克多项式来逼近载频相位的空间分布,拟合精度较高。实验结果表明用泽尼克多项式拟合载频分布,进而很好地消除它对测量的影响,减小测量重建误差,且只需要单帧图像即可消除载频,在动态测量方面有显著的优势。

## 2 泽尼克多项式拟合消除载频的原理

以FTP为例,阐述泽尼克多项式拟合消除载频的方法在三维面形测量中的应用。FTP的工作原理为:将光栅结构光场投影到被测物体表面,在被测

物体高度的调制下,光栅发生形变,变形结构光场中携带三维面形的高度分布信息。变形结构光表达式为

$$I(x, y) = I_0(x, y) + I_M(x, y) \cos[2\pi fx + \phi(x, y)], \quad (1)$$

式中  $x, y$  是空间位置坐标,  $I(x, y)$  为该点的实际光强,  $I_0(x, y), I_M(x, y)$  分别为该点的背景光强和调制光强,  $f$  为光栅基频,  $\phi(x, y)$  为在该点处物体高度的调制下所引起的相位变化。经过傅里叶变换、频域滤波、傅里叶逆变换和相位展开等步骤获得变形结构光场的相位信息为

$$\Psi(x, y) = 2\pi fx + \phi(x, y), \quad (2)$$

此时的相位信息  $\Psi(x, y)$  包含由物体高度调制的相位分布  $\phi(x, y)$  和投影条纹本身的相位分布(即载频相位分量)  $2\pi fx$ 。

泽尼克多项式拟合消除载频的指导思想是将展开后的连续载频相位  $\phi_c(x, y)$  表示为  $n$  项泽尼克多项式的线性组合

$$\phi_c(x, y) = a_0 u_0(x, y) + a_1 u_1(x, y) + \dots + a_i u_i(x, y) + \dots + a_{n-1} u_{n-1}(x, y), \quad (3)$$

式中  $u_i(x, y)$  表示第  $i+1$  项泽尼克多项式,  $a_i$  表示第  $i+1$  项多项式的系数。

由于泽尼克多项式的以下特性<sup>[13]</sup>,使得用泽尼克多项式拟合得到的载频更接近其实际分布:

1) 泽尼克多项式在单位圆上正交,其正交特性使得拟合多项式系数相互独立,避免了系数之间的相互影响。

2) 泽尼克多项式自身所特有的旋转对称性,使之在光学问题的求解过程中有良好的收敛性。

3) 理想载频条纹的空间分布是线性的,由于成像系统的像差影响,造成载频的非线性分布,而泽尼克多项式各项与光学系统的像差有一定的对应关系,很容易与赛德像差函数建立联系,因此能够更好地逼近载频的空间分布,从而更为准确地消除载频的影响。

泽尼克多项式项数通常是凭经验选取。在原则上,条纹数目一定时,选择尽可能多的项数来拟合相位将得到更高的拟合精度。但是,在实际中发现当把泽尼克多项式的项数提高到一定程度时,拟合的相位函数的一致性遭到严重破坏,其拟合精度反而大大降低<sup>[14]</sup>。泽尼克的前8项分别是空间坐标的一次项、初级像差,已经足以描述在实际成像系统中载频的非线性分布。因此选择泽尼克多项式的项数为8项,即  $n=8$ 。

泽尼克多项式系数的求解可以采用最小二乘法和广义逆矩阵法,由于空间坐标归一化后求得的泽尼克多项式是线性无关的函数系,此二种方法拟合

结果没有差别,因此采用较为简单的广义逆矩阵法。将(3)式表示为矩阵的形式:

$$\boldsymbol{\psi}_c(x, y) = [u_0(x, y) \quad u_1(x, y) \quad \cdots \quad u_i(x, y) \quad \cdots \quad u_{n-1}(x, y)] [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_i \quad \cdots \quad a_{n-1}]^T. \quad (4)$$

在整个图像的参考平面区域选取  $N$  个数据点进行拟合,则对于这  $N$  个数据点有

$$\boldsymbol{\psi}_{N \times 1} = \mathbf{U}_{N \times n} \cdot \mathbf{A}_{n \times 1}, \quad (5)$$

式中

$$\boldsymbol{\psi}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdots \\ \psi_i \\ \cdots \\ \psi_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_{N \times n} = \begin{bmatrix} u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1j} & \cdots & u_{1,n-1} \\ u_{20} & u_{21} & \cdots & u_{2j} & \cdots & u_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{i0} & u_{i1} & \cdots & u_{ij} & \cdots & u_{i,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{N0} & u_{N1} & \cdots & u_{Nj} & \cdots & u_{N,n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_i \\ \cdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中  $\psi_i$  表示第  $i$  个数据点的相位值,  $u_{i,j}$  表示第  $i$  个数据点的第  $j$  项泽尼克多项式的值,  $a_i$  表示第  $i$  项泽尼克多项式的系数。

由(5)式可得,泽尼克多项式的系数可以表示为

$$\mathbf{A}_{n \times 1} = (\mathbf{U}_{N \times n})^+ \cdot \boldsymbol{\psi}_{N \times 1}, \quad (7)$$

式中  $(\mathbf{U}_{N \times n})^+$  为  $\mathbf{U}_{N \times n}$  的广义逆矩阵,其定义为

$$(\mathbf{U}_{N \times n})^+ = (\mathbf{U}_{N \times n}^T \mathbf{U}_{N \times n})^{-1} \mathbf{U}_{N \times n}^T. \quad (8)$$

求得系数  $\mathbf{A}_{n \times 1}$  后,将整幅图像上所有点的载频相位  $\psi_c(x, y)$  可由(3)式求得。由此物体高度调制的相位分布  $\phi(x, y)$  为

$$\phi(x, y) = \boldsymbol{\Psi}(x, y) - \psi_c(x, y). \quad (9)$$

最后运用相位-高度的映射关系,正确恢复出被测物体的三维面形信息。

## 3 实 验

### 3.1 模拟实验

为验证本文方法的有效性,在远心光路照明和不考虑成像系统畸变的情况下,以 FTP 为例模拟载频消除的过程。物体高度分布如图 1(a)所示,变形条纹图如图 1(b)所示。模拟的图像大小为  $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$ ,投影条纹的频率为  $f=1/16$ ,采用投影和成像夹角  $\theta$  有  $\arctan \theta=0.4$ ,即  $\theta=21.8^\circ$ 。

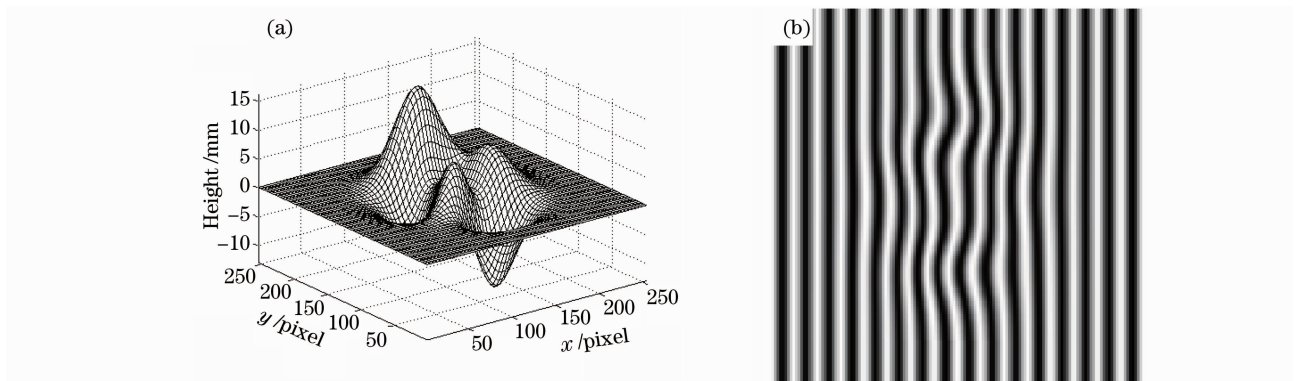


图 1 模拟实验。(a)模拟物体,(b)物体调制后的变形条纹

Fig. 1 Simulation experiment. (a) simulated object, (b) deformed fringe pattern

图 2(a)是未消除载频的展开相位分布,可以看出,此时的相位在由物体高度调制的基础上还有一个斜面(即载频相位)的存在,用参考平面区域数据点的相位值,拟合得到整幅图像的载频相位,如图 2(b)所示,用图 2(a)中整体的相位分布减去

图 2(b)中的载频相位,即可得到由物体面形调制的相位分布,如图 2(c)所示。图 2(d)是用泽尼克多项式拟合消除载频,恢复物体高度的误差分布。可以看出用泽尼克多项式拟合可以有效地消除载频的影响,正确恢复物体的高度。

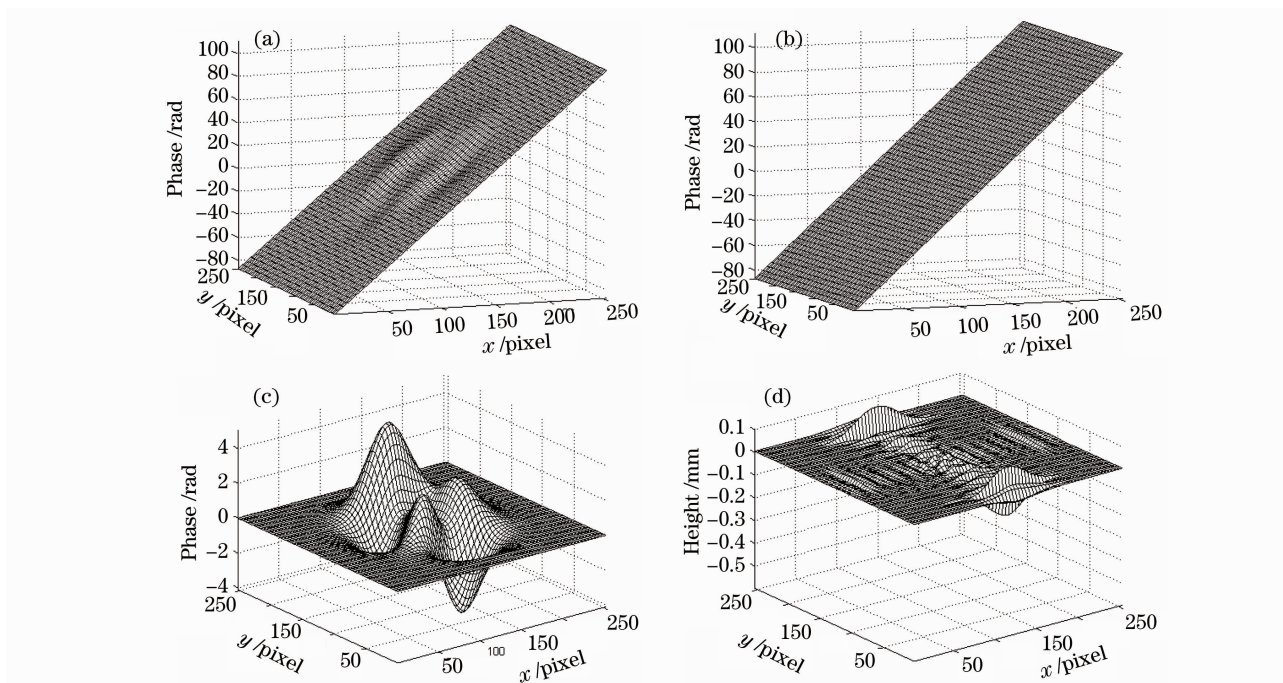


图 2 载频消除过程。(a)消除载频前的相位分布,(b)拟合的载频相位,(c)消除载频后的物体相位,(d)泽尼克多项式拟合消除载频的误差

Fig. 2 Process of carrier removal. (a) unwrapped phase distribution before carrier removal, (b) carrier phases obtained by the proposed method, (c) object phase after carrier removal, (d) error of the restored object using Zernike polynomials fitting method

### 3.2 在初始相位中考虑畸变因素的模拟实验

在实际实验的拍摄过程中,不可避免地会引入畸变等光学像差,为了逼近实际实验的效果,本部分实

验模拟成像系统的畸变,在模拟实验的初始相位中加入畸变量。根据实际实验标定的结果<sup>[15]</sup>,设定一阶径向畸变系数  $k_1 = -0.1$ ,二阶径向畸变系数  $k_2 =$

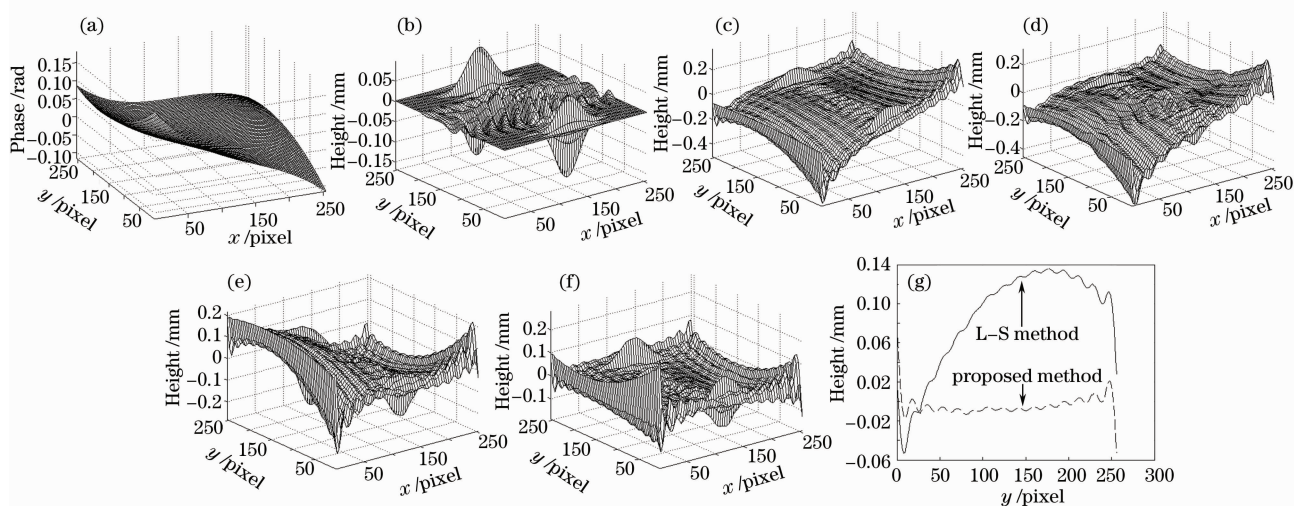


图 3 考虑畸变因素时消除载频的误差对比。(a)考虑畸变因素时的畸变量,(b)减参考平面法的误差,(c)频谱移中法的误差,(d)平均斜率法的误差,(e)最小二乘法的误差,(f)泽尼克多项式拟合的误差,(g)取图 3(e)和图 3(f)第 50 列的数据进行对比

Fig. 3 Comparison of some carrier removal methods. (a) simulated image distortion distribution, (b) result of reference subtraction method, (c) result of spectrum-shift method, (d) result of average slope method, (e) result of least-squares method, (f) result of Zernike polynomials fitting method, (g) error comparison of the 50th column from figure 3(e) and figure 3(f)



-0.65, 一阶切向畸变系数  $p_1 = -0.0029$ , 二阶切向畸变系数  $p_2 = 0.00092$ 。

图 3(a)为加入的畸变量,图 3(b)~(f)分别为现有的载频消除方法与本文提出的方法恢复物体高度的误差分布。将用本文提出的方法消除载频进而恢复物体高度的误差与最小二乘法的误差做对比,取误差分布的第 50 列数据进行对比,如图 3(g)所示。表 1 为各种方法恢复物体高度的误差数据。从表 1 的数据中可以看出,当拍摄的图像中有畸变存

在时,减参考平面法具有最小的误差。但由于其需要对参考平面做一次额外的测量,增加了时间开销,应用范围受到限制,无法应用于动态测量领域。本文提出的方法恢复物体高度的平均相对误差和均方根误差(RMS)均小于频谱移中法、平均斜率法和最小二乘法的误差。因此,在实际应用中,由于成像系统的像差使得载频呈非线性分布时,本文提出的方法能更为准确地消除载频的影响,恢复物体的高度。

表 1 考虑畸变因素时几种方法恢复物体高度的误差对比

Table 1 Error comparison of different methods with distortion

	Reference subtraction method	Spectrum-shift method	Average slope method	Least-squares method	Proposed method
Average relative error / %	0.028	0.210	0.220	0.220	0.084
RMS /mm	0.0179	0.0904	0.0827	0.0794	0.0363

### 3.3 实际实验

对实际拍摄的图像用泽尼克多项式拟合消除载频的结果如图 4 所示。

由图 4 可以看出,应用泽尼克多项式拟合的方法可以很好地消除载频,恢复物体的相位,进而得到物体的三维轮廓。

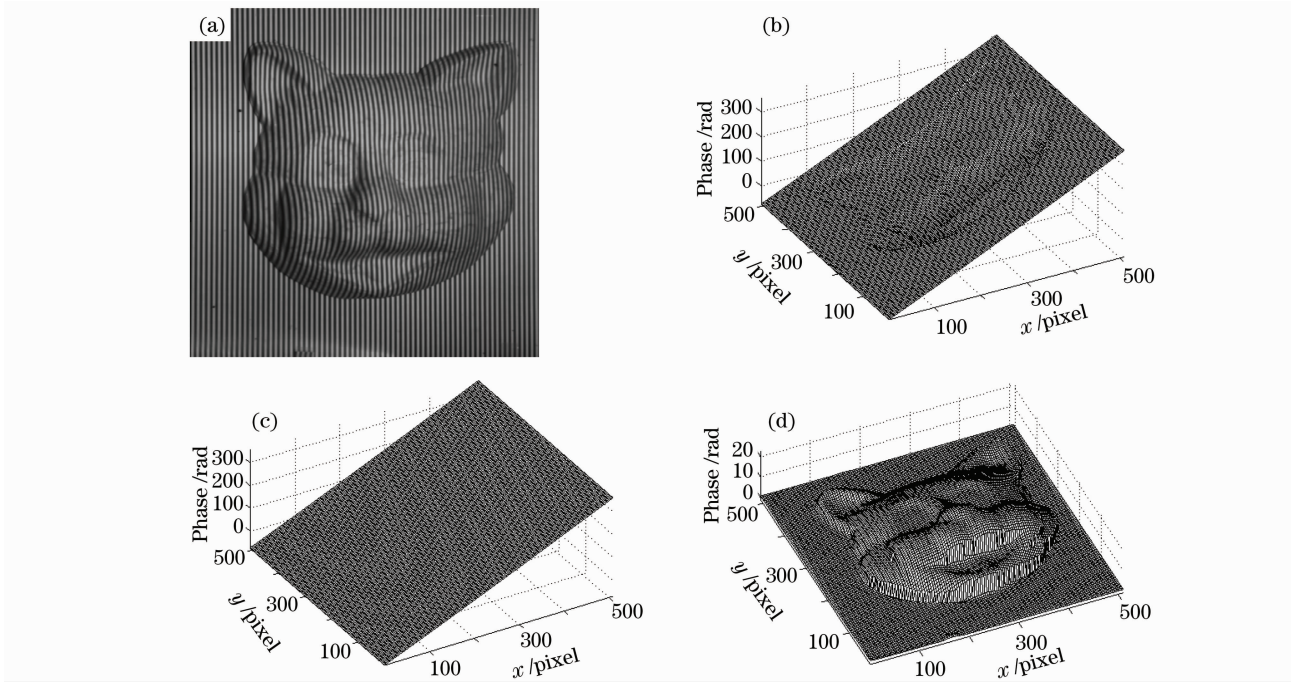


图 4 实际拍摄图像消除载频对比。(a)实际拍摄图像,(b)消除载频之前相位分布,(c)拟合的载频平面,(d)泽尼克多项式拟合法得到的物体相位分布

Fig. 4 Carrier removal of a cat model. (a) deformed fringe pattern with cat model, (b) unwrapped phase distribution before carrier removal, (c) carrier phases by Zernike polynomials fitting, (d) phase distribution after carrier removal by proposed method

## 4 结 论

针对条纹投影轮廓术中载频消除的问题,提出了一种运用泽尼克多项式拟合消除载频的方法。给

出了该方法理论计算过程,分别对理想变形条纹和加入畸变后的变形条纹进行载频消除的模拟实验。实验结果表明本方法消除载频的误差较小,当存在

畸变等光学像差的情况时相对于频谱移中法、平均斜率法、最小二乘法均具有显著的优势。并且泽尼克多项式拟合消除载频的方法是选取变形条纹图中被测物体外平面区域的数据,拟合得到整场的载频相位,只需要拍摄单帧图像,避免了减参考平面法需要对参考平面做单独测量所带来的时间开销,适用于动态测量。因此,本文提出的载频消除方法,只需单帧图像,误差较小、算法简单,对于动态测量和光学系统中存在畸变等像差的影响时尤其适用。

## 参 考 文 献

- Mitsuo Takeda, Kazuhiro Mutoh. Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes [J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(24): 3977~3982
- V. Srinivasan, H. C. Liu, M. Halioua. Automated phase-measuring profilometry of 3-D diffuse objects [J]. *Appl. Opt.*, 1984, **23**(18): 3105~3108
- Mitsuo Takeda, Hideki Ina, Seiji Kobayashi. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(1): 156~160
- Jielin Li, Xianyu Su, Hongjun Su *et al.*. Removal of carrier frequency in phase-shifting techniques [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 1998, **30**(1): 107~115
- Lujie Chen, Cho Jui Tay. Carrier phase component removal: a generalized least-squares approach [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2006, **23**(2): 435~443
- C. Quan, C. J. Tay, L. J. Chen. A study on carrier-removal techniques in fringe projection profilometry [J]. *Optics & Laser Technology*, 2007, **39**(6): 1155~1161
- Hou Xi, Wu Fan, Yang Li *et al.*. Effect of central obscuration interferograms fitted with Zernike circle polynomials on calculating Seidel aberrations [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(1): 54~60  
侯 溪, 伍 凡, 杨 力 等. 中心遮拦干涉图的圆泽尼克拟合对计算赛德尔像差的影响分析[J]. *光学学报*, 2006, **26**(1): 54~60
- Tang Yuke, He Xiaohai, Tao Qingchuan. Research on the point spread function of microscope based on the Zernike polynomials [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(1): 169~175  
唐玉科, 何小海, 陶青川. 基于泽尼克多项式的显微镜点扩展函数研究[J]. *光学学报*, 2009, **29**(1): 169~175
- James C. Wyant. *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. XI [M]. Riverport: Academic Press, 1992
- Zheng Zhenrong, Sun Xutao, Miao Yingying *et al.*. Design of reflective lens with Zernike polynomial free form surfaces [J]. *J. Zhejiang University (Engineering Science)*, 2008, **42**(12): 2202~2206  
郑臻荣, 孙旭涛, 缪盈盈 等. 应用泽尼克多项式自由曲面的成像物镜设计[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2008, **42**(12): 2202~2206
- Jiang Minshan, Zhou Chuanqing, Ren Qiushi. Zernike generation analysis of two deformable mirrors [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(s1): 396~398  
江旻珊, 周传清, 任秋实. 两种可变形反射镜泽尼克系数的生成误差分析[J]. *光学学报*, 2009, **29**(s1): 396~398
- Ye Hongwei, Li Xinyang, Xian Hao *et al.*. Relationship between Zernike wavefront errors and beam quality factor  $\beta$  for optics system [J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(6): 1420~1427  
叶红卫, 李新阳, 鲜 浩 等. 光学系统的 Zernike 像差与光束质量  $\beta$  因子的关系[J]. *中国激光*, 2009, **36**(6): 1420~1427
- Sun Xutao, Zheng Zhenrong, Liu Xu *et al.*. Design of ultra-thin projection system with curved screen based on Zernike free-form surfaces [J]. *J. Zhejiang University (Engineering Science)*, 2009, **43**(8): 1428~1432  
孙旭涛, 郑臻荣, 刘 旭 等. 用 Zernike 自由曲面设计弯曲屏幕超薄投影系统[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2009, **43**(8): 1428~1432
- Mo Weidong. Error and precision evaluation of a system for inspecting surface of optical plane [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(7): 879~883  
莫卫东. 数字平面检测系统误差和精度评价方法的研究[J]. *光学学报*, 2003, **23**(7): 879~883
- Liu Yuankun, Su Xianyu, Wu Qingyang. Multi-camera calibration by FTP technique [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(9): 1734~1737  
刘元坤, 苏显渝, 吴庆阳. 基于傅里叶条纹分析的多摄像机标定方法[J]. *光子学报*, 2007, **36**(9): 1734~1737