

# Offner 成像光谱仪建模及像差分析

刘光宏<sup>1</sup> 吴 刚<sup>1</sup> 凌 青<sup>1</sup> 王秋平<sup>2</sup> 杜学维<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 中国科学技术大学自动化系, 安徽 合肥 230027  
<sup>2</sup> 中国科学技术大学国家同步辐射实验室, 安徽 合肥 230029)

**摘要** 利用光线追迹方法得到系统的数值模型, 然后运用级数展开方法, 建立起系统的 3 阶解析模型, 亦即 3 阶像差理论。该模型给出系统像差系数和计算系统点列图的解析表达式, 可适应于包含变间距凸面光栅的系统, 并具有良好的扩展性。通过追迹示例 Offner 系统中 10000 条不同波长、不同高度的光线, 结果表明运用解析模型可以快速而准确地生成系统的点列图。利用解析的像差系数分析了系统中彗差、球差和像散等主要像差的几何特征, 加深对系统成像特性的理解, 为 Offner 系统优化设计提供理论指导。

**关键词** 光学设计; Offner 成像光谱仪; 光线追迹; 像差分析

**中图分类号** O435.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.0322001

## Modelling of Offner Imaging Spectrometers and Aberration Analysis

Liu Guanghong<sup>1</sup> Wu Gang<sup>1</sup> Ling Qing<sup>1</sup> Wang Qiuping<sup>2</sup> Du Xuewei<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230027, China  
<sup>2</sup> National Synchrotron Radiation Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230029, China)

**Abstract** The ray-tracing method is applied to get the numerical model of the system, and then a series expansion method is used to establish a three-order analytical model. The analytical model provides analytical expressions of aberration coefficients and spot diagrams, adapts to the system containing a varied line spacing convex grating, and has strong scalability. The complete imaging performance can be quickly evaluated by the analytical expressions of spot diagrams. By tracking 10000 rays with different wavelengths and heights in an Offner example system, the results show that analytical model can quickly reproduce the spot diagrams with a high degree of accuracy. With these formulas coma, spherical aberration, astigmatism and distortion are discussed in detail. The analytical model provides theoretical guidance for the optimal design of Offner imaging spectrometers.

**Key words** optical design; Offner imaging spectrometer; ray tracing; aberration analysis

**OCIS codes** 220.1010; 300.6190; 080.0080; 080.1010

## 1 引 言

成像光谱仪是一种可同时采集目标光谱特征和空间图像的光学设备, 具有图谱合一性。可用于精确测绘、目标识别和确认、过程监控、临床诊断成像、环境评估和管理等任务, 已广泛用于卫星遥感、地质、海洋、农业、医药、生产制造和军事等领域<sup>[1~7]</sup>。

三元件同心结构的 Offner 成像光谱仪结构简单、体积小以及成像性能好, 已经取得了相当广泛的

应用<sup>[8~11]</sup>。现有设计方法主要为数值光线追迹法<sup>[12~15]</sup>和基于单光栅像差理论的解析设计方法<sup>[16,17]</sup>。数值光线追迹法可以有效评估多元件光学系统的成像性能, 但不能显式表达系统像差与系统参数之间的关系, 设计过程耗时且不能保证结果最优。基于单光栅像差理论的解析方法在保证罗兰圆配置的条件下, 使子午和弧矢聚焦曲线在某一波长处相交或相切, 来消除中心波长处的像散。该方

**收稿日期**: 2010-05-10; **收到修改稿日期**: 2010-10-26

**基金项目**: 国家 863 计划(2010AA10Z201)和中国科学技术大学研究生创新基金(KD2007055)资助课题。

**作者简介**: 刘光宏(1984—), 男, 博士研究生, 主要从事光学系统建模与优化设计等方面的研究。

E-mail: lghong@mail.ustc.edu.cn

**导师简介**: 吴 刚(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事先进控制与优化等方面的研究。E-mail: wug@ustc.edu.cn

法忽略了系统中其他类型像差,且不能用于设计包含消像差光栅的 Offner 系统。因此有必要提出一种针对三元件 Offner 系统的像差理论,来指导 Offner 系统的优化设计。

现有的多元件光学系统像差理论主要为波像差(WFA)理论、基于 Lie 变换的理论和解析点列图(SD)理论。1983 年 M. P. Chrisp<sup>[18]</sup> 提出的波像差理论是第一个针对多元件光学系统的像差理论,后经吕丽军<sup>[19]</sup> 发展使之适应平面对称的多元件光学系统。考虑到光学系统是典型的非线性哈密顿系统,可以用非线性动力学中的 Lie 代数方法分析, K. Goto 等<sup>[20]</sup> 把这种分析方法引入光栅光学系统。由于公式推导的符号计算量大, C. Palmer 等<sup>[21]</sup> 提出了一种简化的算法。为了适应高分辨率分析的需要, T. Namioka 等<sup>[22,23]</sup> 建立了解析点列图理论,开始只能处理单个光栅,后来发展出适合平面对称双光学元件和平面光源的三阶像差理论。SD 理论具有完全三阶精度,适合于高级光学元件,符合同步辐射光学仪器发展的需要。

本文以 SD 理论为基础,从几何光线的角度,采用光线追迹的方法来建立系统的解析模型,提供点列图和像差系数的解析表达式,分析系统中主要像差的特性。这将有助于对 Offner 成像光谱仪的设计及其成像本质的进一步理解,为设计符合要求的系统提供理论上的指导。

## 2 Offner 系统光学结构

Offner 成像光谱仪结构如图 1 所示,包括一个线光源 S,两个球面反射镜 M<sub>1</sub> 和 M<sub>2</sub>,一个凸面光栅 G,一个像平面 Σ。其中 M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub> 和 G 拥有同一个球心 C,即为三同心光学系统。M<sub>1</sub>, G, M<sub>2</sub> 的半径分别为 R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, R<sub>3</sub>, 顶点分别为 O<sub>1</sub>, O, O<sub>2</sub>。M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, G 在顶点处的法线与 S 的中点 A<sub>0</sub> 共平面 Π, 光栅 G 的刻线方向垂直于平面 Π。入射主光线(波长为 λ) A<sub>0</sub>O<sub>1</sub> 经 M<sub>1</sub> 反射到达 O 点, 主光线 O<sub>1</sub>O 经 G 衍射后的 m<sub>2</sub> 级光到达 O<sub>2</sub> 点, 衍射主光线 O O<sub>2</sub> 经 M<sub>2</sub> 的反射光线交平面 Σ 于 B<sub>0</sub> 点, 像平面 Σ 垂直于光线 O<sub>2</sub>B<sub>0</sub>。距离 r<sub>1</sub> = <A<sub>0</sub>O<sub>1</sub>>, r<sub>2</sub> = <O<sub>1</sub>O>, r<sub>3</sub> = <O O<sub>2</sub>>, r<sub>4</sub> = <O<sub>2</sub>B<sub>0</sub>> 以及主光线 A<sub>0</sub>O<sub>1</sub>, O<sub>1</sub>O, O O<sub>2</sub> 的入射角 α<sub>1</sub>, α<sub>2</sub>, α<sub>3</sub>, 及光栅 G 的衍射角 β<sub>2</sub>, 称为结构参数。

在 M<sub>1</sub> 和 M<sub>2</sub> 上分别引入直角坐标系 x<sub>1</sub>y<sub>1</sub>z<sub>1</sub> 和 x<sub>3</sub>y<sub>3</sub>z<sub>3</sub>, 原点位于 O<sub>1</sub> 和 O<sub>2</sub>。x<sub>1</sub> 轴为 O<sub>1</sub> 点处 M<sub>1</sub> 的法线, x<sub>3</sub> 轴为 O<sub>2</sub> 点处 M<sub>2</sub> 的法线。y<sub>1</sub> 和 y<sub>3</sub> 轴均位于平面 Π 内。当主光线 A<sub>0</sub>O<sub>1</sub>(或 O O<sub>2</sub>) 位于坐标系

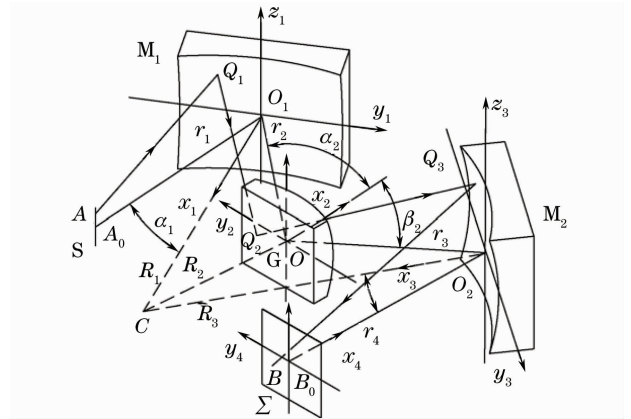


图 1 Offner 成像光谱仪结构示意图

Fig. 1 Schematic diagram of Offner imaging spectrometer  
x<sub>1</sub>y<sub>1</sub>z<sub>1</sub>(或 x<sub>3</sub>y<sub>3</sub>z<sub>3</sub>) 内的 x<sub>1</sub>y<sub>1</sub>(或 x<sub>3</sub>y<sub>3</sub>) 平面第一象限时, α<sub>1</sub>(或 α<sub>3</sub>) 的符号为正; 当位于第四象限时, 符号为负。

在光栅 G 上引入直角坐标系 x<sub>2</sub>y<sub>2</sub>z<sub>2</sub>, 原点为 O 点, x<sub>2</sub> 轴是 O 点处的光栅法线, y<sub>2</sub> 轴位于平面 Π 内。在像平面 Σ 内引入直角坐标系 x<sub>4</sub>y<sub>4</sub>z<sub>4</sub>, 原点为 B<sub>0</sub> 点, x<sub>4</sub> 轴是 B<sub>0</sub> 点处 Σ 的平面法线, y<sub>4</sub> 轴也位于平面 Π 内。当主光线 O<sub>1</sub>O 和 O O<sub>2</sub> 位于坐标系 x<sub>2</sub>y<sub>2</sub>z<sub>2</sub> 内的 x<sub>2</sub>y<sub>2</sub> 平面第一象限时, α<sub>2</sub> 和 β<sub>2</sub> 的符号为正; 当位于第四象限时, 符号为负。

设波长为 λ 的光线从 A(x<sub>A</sub>, y<sub>A</sub>, z) 点出发, 经 Q<sub>1</sub>(ξ<sub>1</sub>, ω<sub>1</sub>, l<sub>1</sub>) 点反射到达点 Q<sub>2</sub>(ξ<sub>2</sub>, ω<sub>2</sub>, l<sub>2</sub>), 经 G 衍射, m<sub>2</sub> 级的衍射光到达点 Q<sub>3</sub>(ξ<sub>3</sub>, ω<sub>3</sub>, l<sub>3</sub>), 经 M<sub>2</sub> 的反射光线与平面 Σ 交于点 B(0, Y, Z), 形成平面 Σ 中的一个点, 其中 x<sub>A</sub> = r<sub>1</sub> cos α<sub>1</sub>, y<sub>A</sub> = r<sub>1</sub> sin α<sub>1</sub>。

## 3 光线追迹数值模型

### 3.1 基本公式

凸面光栅 G 的条纹函数 n<sub>2</sub>(ω<sub>2</sub>, l<sub>2</sub>) 定义为从原点 O 到当前位置的条纹数目, 可用幂级数表达<sup>[24]</sup>:

$$n_2 \sigma_2 = \omega_2 + n_{20} \omega_2^2 + n_{02} l_2^2 + n_{30} \omega_2^3 + n_{12} \omega_2 l_2^2 + n_{04} l_2^4 + n_{40} \omega_2^4 + n_{22} \omega_2^2 l_2^2 + \dots, \quad (1)$$

式中 σ<sub>2</sub> 为有效光栅常数, n<sub>ij</sub> 是光栅参数。当第 g 条条纹的中心点(0, ω<sub>g</sub>, 0) 位于坐标系 x<sub>2</sub>y<sub>2</sub>z<sub>2</sub> 内的 x<sub>2</sub>y<sub>2</sub> 平面第一象限时, g 为正; 当位于第四象限时, g 为负。

M<sub>1</sub>, G 和 M<sub>2</sub> 的面型方程分别为

$$\xi_1 = R_1 - \sqrt{R_1^2 - \omega_1^2 - l_1^2}, \quad (2)$$

$$\xi_2 = -R_2 + \sqrt{R_2^2 - \omega_2^2 - l_2^2}, \quad (3)$$

$$\xi_3 = R_3 - \sqrt{R_3^2 - \omega_3^2 - l_3^2}. \quad (4)$$

根据光栅方程, 入射角 α<sub>2</sub> 和衍射角 β<sub>2</sub> 满足

$$\sigma_2(\sin \alpha_2 + \sin \beta_2) = m_2 \lambda, \quad (5)$$

根据  $M_1, M_2, G$  的同心性, 在图 1 中, 对  $\triangle O_1 OC$ ,  $\triangle O_2 OC$  应用正弦定理, 可得

$$R_2 / \sin \alpha_1 = R_1 / \sin \alpha_2, \quad R_2 / \sin \alpha_3 = -R_3 / \sin \beta_2, \quad (6)$$

$$\begin{cases} r_2 = R_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) / \sin \alpha_1 \\ r_3 = R_2 \sin(-\beta_2 - \alpha_3) / \sin \alpha_3 \end{cases} \quad (7)$$

### 3.2 光线追迹数值建模

给定 Offner 成像光谱仪结构后, 光线追迹用于

确定入射光线  $AQ_1$  经  $M_1, G, M_2$  后与像平面  $\Sigma$  交点  $B$  的位置。为了统一表达, 把球面镜  $M_1, M_2$  当作条纹数和衍射级次均为 0 的特殊光栅。

对球面镜  $M_1$ , 光程函数为

$$F_1 = |AQ_1| + |Q_1 Q_2| + n_1 m_1 \lambda, \quad (8)$$

式中  $n_1 = m_1 = 0$ 。

记  $Q_1(\xi_1, \omega_1, l_1)$  在坐标系  $x_2 y_2 z_2$  中坐标为  $Q'_1(\xi'_1, \omega'_1, l'_1)$ , 则  $|AQ_1|$  和  $|Q_1 Q_2|$  可以表示为

$$|AQ_1| = [(\xi_1 - x_A)^2 + (\omega_1 - y_A)^2 + (l_1 - z)^2]^{1/2}, \quad (9)$$

$$|Q_1 Q_2| = [(\xi_2 - \xi'_1)^2 + (\omega_2 - \omega'_1)^2 + (l_2 - l'_1)^2]^{1/2}, \quad (10)$$

式中  $Q'_1(\xi'_1, \omega'_1, l'_1)$  可以通过坐标变换从  $Q_1(\xi_1, \omega_1, l_1)$  得到

$$\begin{cases} \xi'_1 = -\xi_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) - \omega_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + r_2 \cos \alpha_2 \\ \omega'_1 = -\xi_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \omega_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + r_2 \sin \alpha_2 \\ l'_1 = l_1 \end{cases} \quad (11)$$

定义  $(L_1, M_1, N_1), (L'_1, M'_1, N'_1)$  分别为光线  $AQ_1, Q_1 Q_2$  在坐标系  $x_1 y_1 z_1$  中的方向余弦, 则在坐标系  $x_1 y_1 z_1$  中对光程函数  $F_1$  利用费马原理, 可得<sup>[23]</sup>

$$\begin{cases} L'_1 = L_1 + t_1 \\ M'_1 = M_1 + m_1 \lambda \left( \frac{\partial n_1}{\partial \omega_1} \right) - t_1 \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial \omega_1} \right), \\ N'_1 = N_1 + m_1 \lambda \left( \frac{\partial n_1}{\partial l_1} \right) - t_1 \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial l_1} \right) \end{cases} \quad (12)$$

式中

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{e_1} (p_1 + \sqrt{p_1^2 - e_1 q_1}), \quad e_1 = 1 + \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial \omega_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial l_1} \right)^2 \\ p_1 = -L_1 + \left( M_1 + m_1 \lambda \frac{\partial n_1}{\partial \omega_1} \right) \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial \omega_1} \right) + \left( N_1 + m_1 \lambda \frac{\partial n_1}{\partial l_1} \right) \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial l_1} \right) \\ q_1 = 2m_1 \lambda \left( M_1 \frac{\partial n_1}{\partial \omega_1} + N_1 \frac{\partial n_1}{\partial l_1} \right) + (m_1 \lambda)^2 \left[ \left( \frac{\partial n_1}{\partial \omega_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial n_1}{\partial l_1} \right)^2 \right] \\ L_1 = \frac{\xi_1 - x_a}{|AQ_1|}, \quad M_1 = \frac{\omega_1 - y_a}{|AQ_1|}, \quad N_1 = \frac{l_1 - z}{|AQ_1|} \end{cases} \quad (13)$$

对  $(L'_1, M'_1, N'_1)$  做简单的坐标变换, 可得反射光线  $Q_1 Q_2$  在  $x_2 y_2 z_2$  坐标系内的方向余弦  $(L_2, M_2, N_2)$

$$\begin{cases} L_2 = -L'_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) - M'_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \\ M_2 = -L'_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + M'_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \\ N_2 = N'_1 \end{cases} \quad (14)$$

根据方向余弦的定义

$$\begin{cases} L_2 = (\xi_2 - \xi'_1) / |Q_1 Q_2| \\ M_2 = (\omega_2 - \omega'_1) / |Q_1 Q_2|, \\ N_2 = (l_2 - l'_1) / |Q_1 Q_2| \end{cases} \quad (15)$$

可得

$$\frac{\xi_2 - \xi'_1}{L_2} = \frac{\omega_2 - \omega'_1}{M_2} = \frac{l_2 - l'_1}{N_2}, \quad (16)$$

结合光栅  $G$  的面型方程(3), 求解得  $Q_2(\xi_2, \omega_2, l_2)$  的值。

衍射光线  $Q_2 Q_3$  在  $x_2 y_2 z_2$  坐标系内的方向余弦  $(L'_2, M'_2, N'_2)$ , 及其经球面镜  $M_2$  的反射光线  $Q_3 B$  在  $x_3 y_3 z_3$  坐标系内的方向余弦  $(L'_3, M'_3, N'_3)$  可以将(12)式和(13)式中的下标 1 分别替换为 2 和 3 得到。

记点  $B$  在坐标系  $x_3 y_3 z_3$  的坐标为  $B'(x_B, y_B, z_B)$ , 根据方向余弦定义

$$L'_3 = \frac{x_B - \xi_3}{|Q_3 B'|}, \quad M'_3 = \frac{y_B - \omega_3}{|Q_3 B'|}, \quad N'_3 = \frac{z_B - l_3}{|Q_3 B'|}, \quad (17)$$

因此:

$$\frac{x_B - \xi_3}{L'_3} = \frac{y_B - \omega_3}{M'_3} = \frac{z_B - l_3}{N'_3} = K, \quad (18)$$

在坐标系  $x_3 y_3 z_3$  中, 像平面  $\Sigma$  可以表达为

$$x' \cos \alpha_3 - y' \sin \alpha_3 = r_4, \quad (19)$$

结合(18)式和(19)式, 解得

$$K = \frac{r_4 + \omega_3 \sin \alpha_3 - \xi_3 \cos \alpha_3}{L'_3 \cos \alpha_3 - M'_3 \sin \alpha_3}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} x_B &= \xi_3 + L'_3 K, & y_B &= \omega_3 + M'_3 K, \\ z_B &= l_3 + N'_3 K, \end{aligned} \quad (21)$$

对  $B'(x_B, y_B, z_B)$  做简单的坐标变换, 可得点  $B$  在坐标系  $x_4 y_4 z_4$  中的坐标  $B(0, Y, Z)$ :

$$\begin{aligned} Y &= \xi_3 \sin \alpha_3 + \omega_3 \cos \alpha_3 + K(L'_3 \sin \alpha_3 + M'_3 \cos \alpha_3), \\ Z &= z_B. \end{aligned} \quad (22)$$

以上公式给出了入射光线  $AQ_1$  经中间元件  $M_1, G, M_2$  后, 与像平面  $\Sigma$  交点  $B$  的数值解, 可用于精确评估 Offner 成像光谱仪的成像性能。

#### 4 解析模型

光线追迹数值模型给出了用于确定物点  $A$  在  $\Sigma$  平面上像点  $B$  的数值方法, 但不能提供像差系数和点列图的解析表达式, 用于光谱仪的优化设计。此外, 当追迹大量光线时, 需要重复执行多次, 非常耗

时。为克服数值模型的缺点, 通过对数值模型运用级数展开, 得到 Offner 成像光谱仪的 3 阶解析模型, 亦即 3 阶像差理论。

结合(2)式和(13)式, 运用级数展开, 将(12)式中的  $L'_1, M'_1, N'_1$  展开为  $\omega_1, l_1$  和  $z$  的 3 阶级数表达式。将其代入(14)式中, 得到  $L_2, M_2, N_2$  的级数表达式。

$Q_2(\xi_2, \omega_2, l_2)$  的数值解可以从解(3)式和(16)式得到, 但要从(3)式和(6)式直接得到其符号解比较困难。此处, 先假设  $\omega_2, l_2$  可表示为如下的三阶级数展开:

$$\begin{cases} \omega_2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{3-i} \sum_{k=0}^{3-i-j} A_{ijk} \omega_1^i l_1^j z^k \\ l_2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{3-i} \sum_{k=0}^{3-i-j} B_{ijk} \omega_1^i l_1^j z^k \end{cases}, \quad (23)$$

将(23)式代入(15)式并将其展开, 计算出  $L_2, M_2, N_2$  另外一种级数展开表达式。通过比较两种 ( $L_2, M_2, N_2$ ) 展开式的对应项系数, 计算出  $A_{ijk}$  和  $B_{ijk}$  的表达式。其中  $A_{ijk}$  和  $B_{ijk}$  是系统参数的函数。

最后,  $\omega_2$  和  $l_2$  的解析表式为

$$\begin{cases} \omega_2 = A_{100} \omega_1 + A_{200} \omega_1^2 + A_{020} l_1^2 + A_{011} l_1 z + A_{002} z^2 + A_{300} \omega_1^3 + A_{120} \omega_1 l_1^2 + A_{111} \omega_1 l_1 z + A_{102} \omega_1 z^2 \\ l_2 = B_{010} l_1 + B_{001} z + B_{110} \omega_1 l_1 + B_{101} \omega_1 z + B_{210} \omega_1^2 l_1 + B_{201} \omega_1^2 z + B_{030} l_1^3 + B_{021} l_1^2 z + B_{012} l_1 z^2 + B_{003} z^3 \end{cases}, \quad (24)$$

类似地,  $Q_3(\xi_3, \omega_3, l_3)$  中的  $\omega_3$  和  $l_3$  解析表达式为

$$\begin{cases} \omega_3 = C_{100} \omega_1 + C_{200} \omega_1^2 + C_{020} l_1^2 + C_{011} l_1 z + C_{002} z^2 + C_{300} \omega_1^3 + C_{120} \omega_1 l_1^2 + C_{111} \omega_1 l_1 z + C_{102} \omega_1 z^2 \\ l_3 = D_{010} l_1 + D_{001} z + D_{110} \omega_1 l_1 + D_{101} \omega_1 z + D_{210} \omega_1^2 l_1 + D_{201} \omega_1^2 z + D_{030} l_1^3 + D_{021} l_1^2 z + D_{012} l_1 z^2 + D_{003} z^3 \end{cases}, \quad (25)$$

式中  $C_{ijk}$  和  $D_{ijk}$  是  $A_{ijk}, B_{ijk}$  和系统参数的函数。

最后, 通过对(20)~(22)式连续运用级数展开, 得到像平面  $\Sigma$  上点  $B(0, Y, Z)$  的解析表达式为

$$\begin{cases} Y = E_{100} \omega_1 + E_{200} \omega_1^2 + E_{020} l_1^2 + E_{011} l_1 z + E_{002} z^2 + E_{300} \omega_1^3 + E_{120} \omega_1 l_1^2 + E_{111} \omega_1 l_1 z + E_{102} \omega_1 z^2 \\ Z = F_{010} l_1 + F_{001} z + F_{110} \omega_1 l_1 + F_{101} \omega_1 z + F_{210} \omega_1^2 l_1 + F_{201} \omega_1^2 z + F_{030} l_1^3 + F_{021} l_1^2 z + F_{012} l_1 z^2 + F_{003} z^3 \end{cases}, \quad (26)$$

(26)式是 Offner 成像光谱仪的解析模型, 也是用于生成系统点列图的解析表达式, 其中模型参数  $E_{ijk}$  和  $F_{ijk}$  是系统的像差系数, 是  $C_{ijk}, D_{ijk}$  和系统参数的函数。

虽然上述模型是针对 Offner 成像光谱仪提出的, 但可通过扩展来适应下列情形:

- 1) 三元件平面对称光学系统, 可包括椭球面、

圆柱面、球面和平面光栅或镜子;

- 2) 包含平面扩展光源的 Offner 成像光谱仪, 通过分别替换  $\alpha_1$  和  $r_1$  为  $\alpha_1 + \Delta\alpha_1$  和  $r_1 + \Delta r_1$ , 并满足  $(r_1 + \Delta r_1) \cos(\Delta\alpha_1) = r_1$ 。

#### 5 解析模型评估

考虑(5)~(7)式中的等式约束, 当元件  $G$  为等

间距光栅时,只需要确定  $R_1, R_2, R_3, r_1, r_4, \alpha_2$ , 光栅常数  $\sigma_2$  和衍射级次  $m_2$  这 8 个参数就可以确定整个结构。为验证解析模型的准确性以及性能,采用国家同步辐射实验室设计的 Offner 成像光谱仪系统<sup>[17]</sup>,光栅常数为 0.01 mm,衍射级次为 -1,中心波长为 700 nm,结构设计参数如表 1 所示。球面镜  $M_1$  和  $M_2$  的口径为 70 mm×70 mm,光栅 G 的口径为 30 mm×30 mm。实验环境为: Intel(R) T5450 1.66 GHz CPU, 2 GB 内存, Windows XP, Matlab (R2008a)。

表 1 成像光谱仪设计参数

Table 1 Design parameters of imaging spectrometer

$R_1/\text{mm}$	$R_2/\text{mm}$	$R_3/\text{mm}$	$r_1/\text{mm}$	$r_4/\text{mm}$	$\alpha_2/(\text{^\circ})$
220	112.2	216.85	213.8	212.3	27.55

图 2 为对波长为 700 nm 的 10000 条入射光线

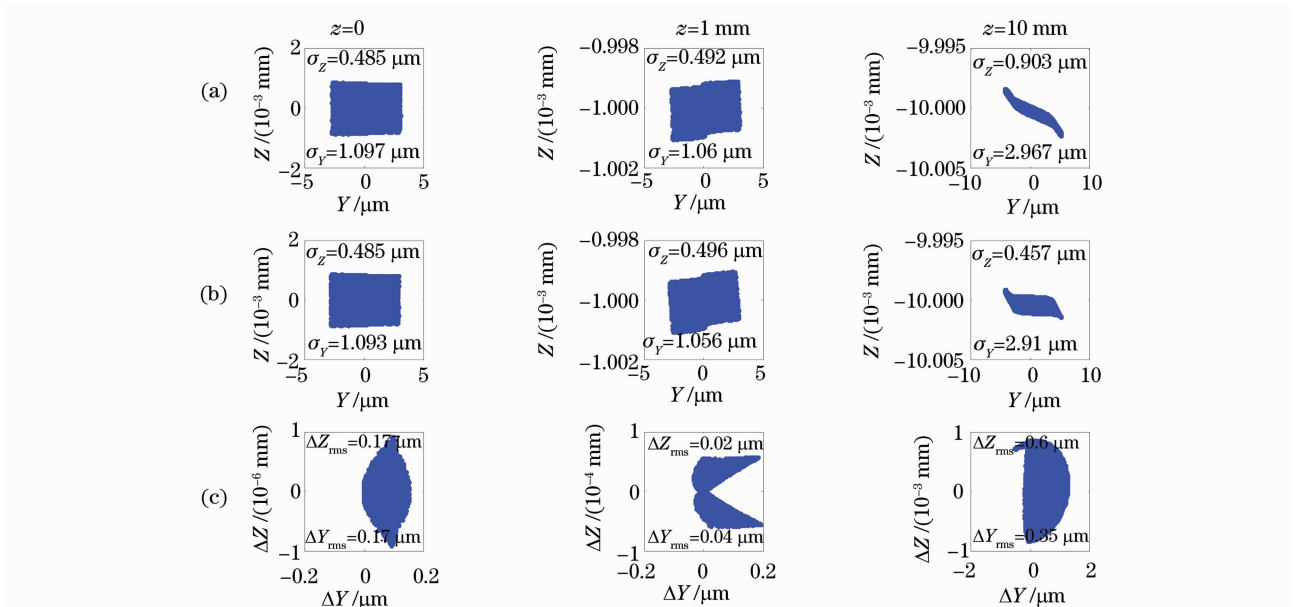


图 2 点光源高度为 0, 1 和 10 mm, 波长为 700 nm 的光线追迹结果和解析模型误差。(a)解析模型, (b)数值模型, (c)解析模型误差

Fig. 2 Ray-tracing results and analytical-model errors with  $\lambda=700$  nm and  $z=0, 1$  and 10 mm. (a) analytical model, (b) numerical model, (c) analytical-model errors

图 3 为使用 10000 条不同波长的光线对高度为 10 mm 的点光源追迹结果。图 3(a), (b) 为解析模型和数值模型对波长为 400, 650 和 1000 nm 的光线追迹结果, 图 3(c) 为解析模型误差。可见, 在波长 400~1000 nm 范围内, 模型误差的均方根均小于  $1 \mu\text{m}$ , 证明了 3 阶解析模型的正确性。

此外, 用解析模型追迹系统中 10000 条光线用时约 60 s, 而用数值模型追迹 10000 条光线时, 需要重复执行 10000 次数值追迹程序, 用时约 6000 s。可见, 解析模型极大地提高了生成系统点列图的速度,

使用数值模型和解析模型的追迹结果。对给定的点光源 A, 在  $M_1$  的口径范围内随机选择一点  $Q_1$ , 产生入射光线  $AQ_1$ 。由于  $M_1, G, M_2$  口径不是非常匹配, 一部分被  $M_1$  反射的光线超出了 G 的口径, 以及部分被 G 衍射的光线超出  $M_2$  的口径, 导致像平面上只有约 8500 个像点。图 2(a) 和图 2(b) 是对点光源高度为 0, 1 和 10 mm 的光线分别用解析模型和数值模型的追迹结果, 其中  $\sigma_Y$  和  $\sigma_Z$  表示追迹结果在 Y 和 Z 方向上的标准差。图 2(c) 为解析模型误差, 由级数展开中截断误差引起的,  $\Delta Y = Y[(22) \text{式}] - Y[(26) \text{式}], \Delta Z = Z[(22) \text{式}] - Z[(26) \text{式}]$ , 其中  $\Delta Y_{\text{rms}}$  和  $\Delta Z_{\text{rms}}$  表示模型误差在  $\Delta Y$  和  $\Delta Z$  方向上的均方根值。当点光源高度为 0 和 1 mm 时, 两种模型产生的点列图形状几乎相同; 当点光源高度增加到 10 mm 时, 模型误差的均方根仍然小于  $1 \mu\text{m}$ 。

度, 可快速且较准确地评估系统的成像性能。

## 6 系统像差分析

本节利用解析模型提供的像差系数表达式, 分析系统中彗差, 球差和像散等主要像差的几何特性。

### 6.1 彗差

Offner 系统的彗差如下:

$$Y_{\text{coma}} = E_{200} \omega_1^2 + E_{111} \omega_1 l_1 z, \quad (27)$$

$$Z_{\text{coma}} = F_{110} \omega_1 l_1 + F_{201} \omega_1^2 z + F_{021} l_1^2 z, \quad (28)$$

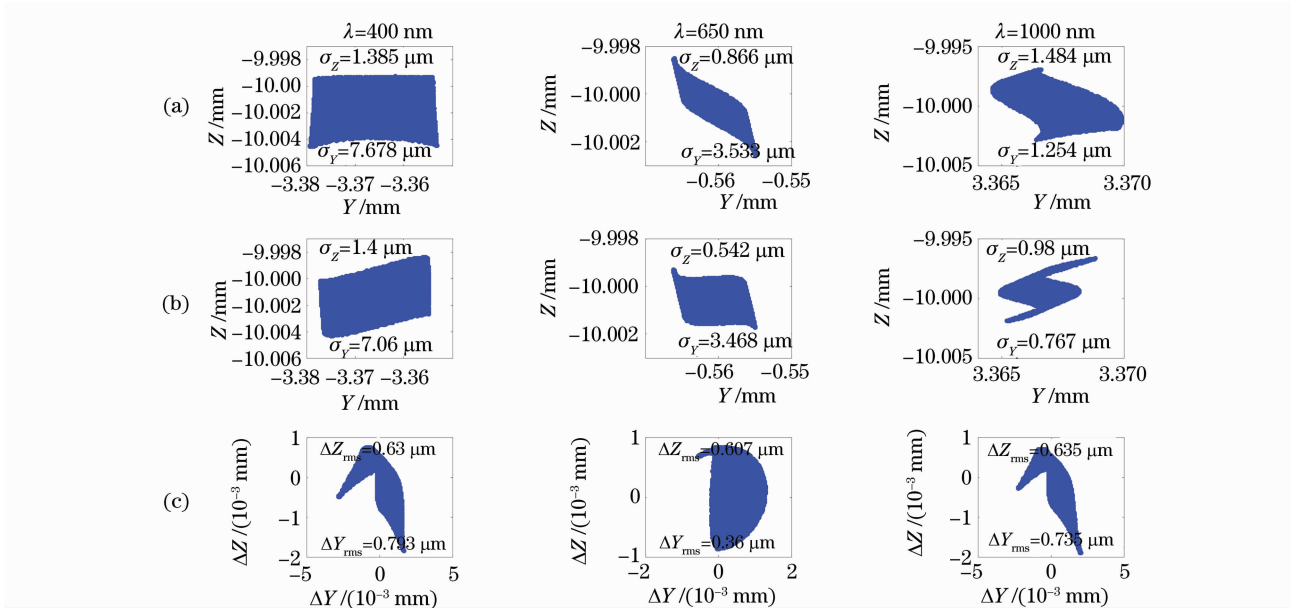


图 3 点光源高度为 10 mm, 波长为 400, 650 和 1000 nm 的光线追迹结果和解析模型误差。(a)解析模型, (b)数值模型, (c)解析模型误差

Fig. 3 Ray-tracing results and analytical-model errors with  $z=10$  mm and  $\lambda=400, 650$  and  $1000$  nm. (a)analytical model, (b)numerical model, (c)analytical-model errors

在  $x_1 y_1 z_1$  坐标系的  $y_1 z_1$  平面上引入极坐标, 原点为  $O_1$ ,  $w_1$  和  $l_1$  记为

$$w_1 = r \cos \theta, \quad l_1 = r \sin \theta, \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (29)$$

(27)式和(28)式转换为

$$\frac{2Y_{\text{coma}}}{r^2} - E_{200} = E_{200} \cos 2\theta + zE_{111} \sin 2\theta, \quad (30)$$

$$\frac{2Z_{\text{coma}}}{r^2} - z(F_{201} + F_{021}) = z(F_{201} - F_{021}) \cos 2\theta + F_{110} \sin 2\theta, \quad (31)$$

结合  $\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ , 从(30)式和(31)式中消去  $\cos 2\theta$  和  $\sin 2\theta$  得

$$\begin{cases} a \left[ \frac{2Y_{\text{coma}}}{r^2} - E_{200} \right]^2 + c \left[ \frac{2Z_{\text{coma}}}{r^2} - z(F_{201} + F_{021}) \right]^2 \\ - 2b \left[ \frac{2Y_{\text{coma}}}{r^2} - E_{200} \right] \left[ \frac{2Z_{\text{coma}}}{r^2} - z(F_{201} + F_{021}) \right] = h^2 \end{cases}, \quad (32)$$

式中

$$\begin{cases} a = z^2 (F_{201} - F_{021})^2 + F_{110}^2 \\ c = E_{200}^2 + z^2 E_{111}^2 \\ b = zE_{200} (F_{201} + F_{021}) + zE_{111} F_{110} \\ h = E_{200} F_{110} - z^2 E_{111} (F_{201} - F_{021}) \end{cases}, \quad (33)$$

由于  $b^2 - ac < 0$ , 且  $a, c > 0$ , 所以(32)式为一个椭圆的表达式, 半轴与坐标轴的夹角为  $\arctan \frac{2b}{c-a}$ 。

当  $z=10$  mm,  $r$  取 10, 20, 30 和 35 mm 时示例 Offner 系统的彗差曲线如图 4(a)所示,  $r$  值越大, 对应的彗差值也越大。当  $z=10$  mm 时, 示例系统的彗差如图 4(b)所示。

## 6.2 球差

Offner 系统球差由下式描述:

$$Y_{\text{sph}} = E_{300} w_1^3 + E_{120} w_1 l_2^2, \quad (34)$$

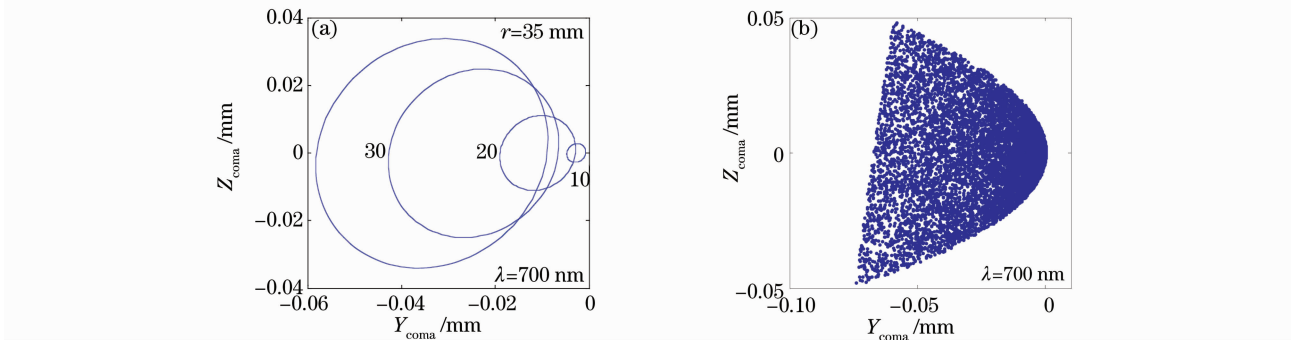


图 4 系统彗差。(a)  $r$  取不同值时彗差曲线, (b) 整个系统彗差

Fig. 4 Coma of the system. (a) coma curves with different value of  $r$ , (b) overall coma of example system

$$Z_{\text{sph}} = F_{030} l_1^3 + F_{210} \omega_1^2 l_1, \quad (35)$$

引入极坐标后,  $Y_{\text{sph}}$  和  $Z_{\text{sph}}$  可表达为

$$Y_{\text{sph}} = r^3 \cos \theta (E_{300} \cos^2 \theta + E_{120} \sin^2 \theta), \quad (36)$$

$$Z_{\text{sph}} = r^3 \sin \theta (F_{030} \sin^2 \theta + F_{210} \cos^2 \theta), \quad (37)$$

可见, 球差曲线由球差系数  $E_{300}$ ,  $E_{120}$ ,  $F_{030}$  和  $F_{210}$  决

定, 当  $E_{300} = E_{120} = F_{030} = F_{210}$  时, 球差曲线形成一个圆。当  $r=30, 20$  和  $10$  mm 时, 示例系统的球差曲线如图 5(a) 所示。整个示例 Offner 系统的球差曲线如图 5(b) 所示。

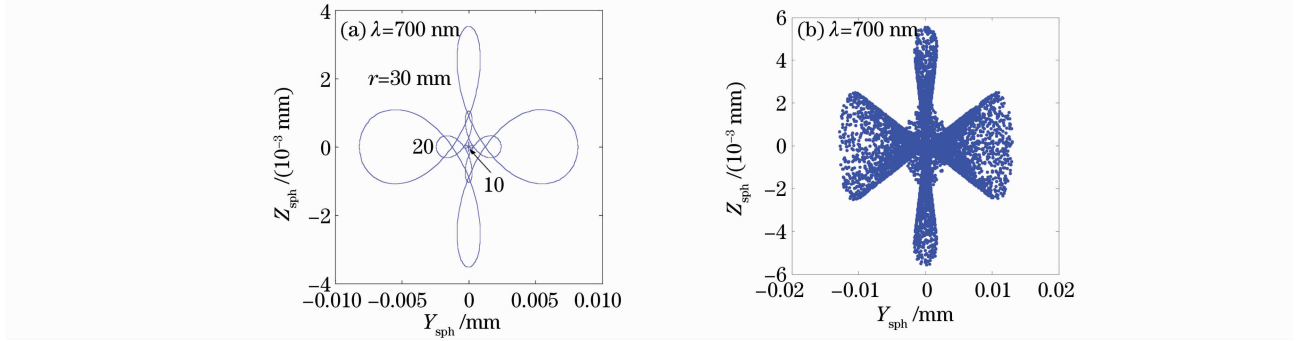


图 5 系统球差。(a)  $r$  取不同值时球差曲线, (b) 整个系统球差

Fig. 5 Spherical aberration of the system. (a) spherical aberration curves with different values of  $r$ , (b) overall spherical aberration of example system

### 6.3 像散

子午面上的像散如下:

$$Y_{\text{ast}} = E_{020} l_1^2 + E_{011} l_1 z + E_{002} z^2, \quad Z_{\text{ast}} = F_{010} l_1 + F_{001} z, \quad (38)$$

消去  $l_1$ , 得到像散曲线的方程

$$Y_{\text{ast}} = E_{020} [Z_{\text{ast}}/F_{010} + (E_{011}/2E_{020} - F_{001}/F_{010})z]^2 + (E_{002} - E_{011}^2/4E_{020})z^2, \quad (39)$$

可见, 像散曲线为抛物线, 当  $z=10, 5$  和  $1$  mm, 子午面上的像散曲线如图 6 所示。

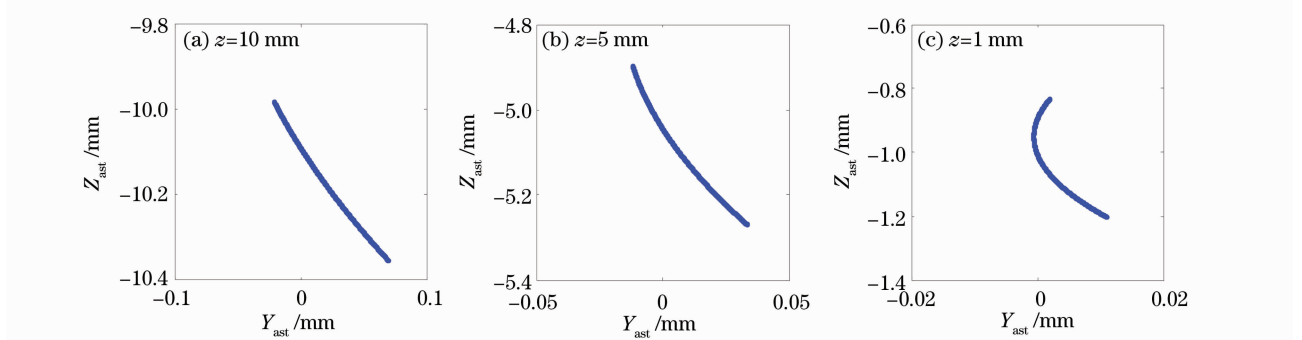


图 6 不同  $z$  值时子午面上的像散曲线

Fig. 6 Astigmatic curves with different values of  $z$  in the tangential focal plane

### 6.4 畸变

畸变是主光线的像差, 可以描述为

$$Y_{\text{dist}} = E_{002} z^2, \quad (40)$$

$$Z_{\text{dist}} = F_{001} z + F_{003} z^3, \quad (41)$$

消去  $z$ , 得

$$Z_{\text{dist}}^2 = \frac{F_{001}^2}{E_{002}} Y_{\text{dist}} + \frac{2F_{001}F_{003}}{E_{002}^2} Y_{\text{dist}}^2 + \frac{F_{003}^2}{E_{002}^2} Y_{\text{dist}}^3, \quad (42)$$

在示例 Offner 系统中, 当线光源为  $-10 < z < 10$  mm 时, 畸变形式如图 7 所示。

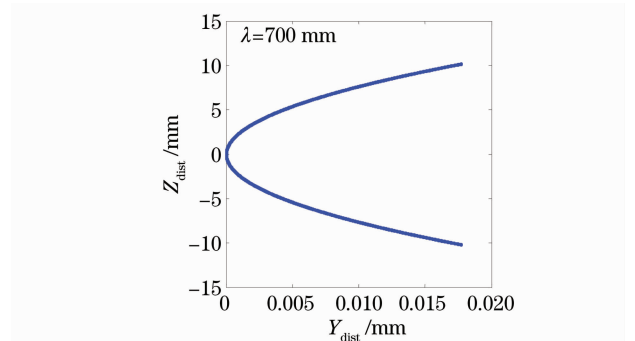


图 7 系统畸变形式

Fig. 7 Distortion pattern of the system

## 7 结 论

首先采用几何光学的光线追迹理论得到了 Offner 成像光谱仪的数值模型,然后用级数展开方法,建立起系统的 3 阶解析模型,亦即系统的 3 阶像差理论。解析模型提供了像差系数和计算点列图的解析表达式,适应包含消像差光栅的 Offner 系统,可用于快速追迹大量光线、系统优化设计和误差分析。通过追迹示例系统中 10000 条不同高度、不同波长的光线,表明解析模型可以快速而准确地生成系统的点列图。利用像差系数解析表达式,分析了系统中彗差、球差、像散等主要像差的几何特征,加深对系统成像特性的理解。

解析模型可以为 Offner 系统设计提供理论指导,使得在设计之初就可以把握系统参数如何影响系统像差。进一步工作为研究基于解析模型的 Offner 系统优化设计方法。

## 参 考 文 献

- 1 J. S. Pearlman, P. S. Barry, C. C. Segal *et al.*. Hyperion, a space-based imaging spectrometer [J]. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 2003, **41**(6): 1160~1173
- 2 A. Coradini, F. Capaccioni, P. Drossart *et al.*. VIRTIS: The imaging spectrometer of the Rosetta mission[J]. *Adv. Space Res.*, 1999, **24**(9): 1095~1104
- 3 Si Fuqi, Xie Pinhua, Liu Yu *et al.*. Determination of plume by hyperspectral imaging differential optical absorption spectroscopy [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(9): 2458~2462  
司福祺, 谢品华, 刘宇等. 超光谱成像差分吸收光谱系统烟羽测量研究[J]. *光学学报*, 2009, **29**(9): 2458~2462
- 4 Ma Dongmei, Ma Caiwen, Luo Cuihua. A compression algorithm of AT-3DSPIHT for LASIS' s hyperspectral image [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(2): 378~381  
马冬梅, 马彩文, 罗翠华. 一种大孔径静态干涉成像光谱仪高光谱图像的 AT-3DSPIHT 压缩算法[J]. *光学学报*, 2010, **30**(2): 378~381
- 5 Chen Quansheng, Zhang Yanhua, Wan Xinmin *et al.*. Study on detection of pork tenderness using hyperspectral imaging technique[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(9): 2602~2607  
陈全胜, 张燕华, 万新民等. 基于高光谱成像技术的猪肉嫩度检测研究[J]. *光学学报*, 2010, **30**(9): 2602~2607
- 6 Liu Xiaogang, Zhao Huijie, Li Na. Feature extraction based on multifractal spectrum for hyperspectral data [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(3): 844~847  
刘小刚, 赵慧洁, 李娜. 基于多重分形谱的高光谱数据特征提取[J]. *光学学报*, 2009, **29**(3): 844~847
- 7 Sun Xian, Wang Hongqi, Zhang Zheng *et al.*. Automatic method for urban roads detection and mapping based on remote sensing images[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(1): 86~92  
孙显, 王宏琦, 张正等. 基于遥感图像的城市道路自动测绘方法研究[J]. *光学学报*, 2009, **29**(1): 86~92
- 8 P. Mouroulis, R. G. Sellar, D. W. Wilson *et al.*. Optical design of a compact imaging spectrometer for planetary mineralogy[J]. *Opt. Engng.*, 2007, **46**(6): 46063001
- 9 S. Murchie, R. Arvidson, P. Bedini *et al.*. Compact reconnaissance imaging spectrometer for Mars (CRISM) on Mars reconnaissance orbiter (MRO) [J]. *J. Geophys. Res.*, 2007, **112**(5): E05S03
- 10 C. Davis, J. Bowles, R. Leathers *et al.*. Ocean PHILLS hyperspectral imager: design, characterization, and calibration [J]. *Opt. Express*, 2002, **10**(4): 210~221
- 11 W. R. Johnson, D. W. Wilson, G. Bearman. All-reflective snapshot hyperspectral imager for ultraviolet and infrared applications[J]. *Opt. Lett.*, 2005, **30**(12): 1464~1466
- 12 M. P. Chrisp. Convex diffraction grating imaging spectrometer [P]. U. S. Patent No. 5,880,834 (1999)
- 13 P. Mouroulis. Low-distortion imaging spectrometer designs utilizing convex gratings[C]. *SPIE*, 1998, **3482**: 594~601
- 14 Zheng Yuquan. Design of compact Offner spectral imaging system[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2005, **13**(6): 650~657  
郑玉权. 小型 Offner 光谱成像系统的设计[J]. *光学精密工程*, 2005, **13**(6): 650~657
- 15 Huang Yuanshen, Ni Zhengji, Zhuang Songlin. Research of the concentric optical system of grating spectrometers [J]. *Optical Instruments*, 2005, **27**(6): 38~42  
黄元申, 倪争技, 庄松林. 光栅成像光谱仪同心光学系统研究[J]. *光学仪器*, 2005, **27**(6): 38~42
- 16 X. Prieto-Blanco, C. Montero-Orille, B. Couce *et al.*. Analytical design of an Offner imaging spectrometer [J]. *Opt. Express*, 2006, **14**(20): 9156~9168
- 17 Tong Yajun, Wu Gang, Zhou Quan *et al.*. Design method of offner-type imaging spectrometer [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(4): 1148~1152  
佟亚军, 吴刚, 周全等. Offner 成像光谱仪的设计方法[J]. *光学学报*, 2010, **30**(4): 1148~1152
- 18 M. P. Chrisp. Aberrations of holographic toroidal grating systems [J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(10): 1508~1518
- 19 L. -J. Lu. Aberration theory of plane-symmetric grating systems [J]. *J. Synchrotron Radiation*, 2008, **15**(4): 399~410
- 20 K. Goto, T. Kurosaki. Canonical formation for the geometrical optics of concave gratings [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(3): 452~465
- 21 C. Palmer, W. McKinney, B. Wheeler. Imaging equations for spectroscopic systems using Lie transformations. Part II—multi-element systems [C]. *SPIE*, 1998, **3450**: 67~77
- 22 T. Namioka, M. Koike, D. Content. Geometric theory of the ellipsoidal grating [J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(31): 7261~7274
- 23 S. Masui, T. Namioka. Geometric aberration theory of double-element optical systems [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1999, **16**(9): 2253~2268
- 24 T. Namioka, M. Koike. Aspheric wave-front recording optics for holographic gratings [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(13): 2180~2186