

欠采样包裹相位图的恢复方法

范琦^{1,2} 杨鸿儒¹ 黎高平¹ 袁良¹ 姜昌录¹ 郭羽¹

(¹ 西安应用光学研究所光学计量实验室, 陕西 西安 710065)
(² 空军工程大学理学院, 陕西 西安 710051)

摘要 针对非球面光学元件面形检测中的欠采样问题,提出了一种欠采样包裹相位图的恢复方法。首先,将原始欠采样包裹相位图在水平和竖直两个方向进行一个像素的错位相减,得到两个包裹相位差图。其次,对这两个包裹相位差图进行解包裹运算,得到两个解包裹相位差图。最后,应用傅里叶变换和最小二乘法恢复出连续的相位分布。模拟结果表明该方法可以高精度地对欠采样包裹相位图进行恢复重建。该方法与现有干涉仪相结合,有望实现非球面光学元件面形的检测。

关键词 傅里叶光学;欠采样;包裹相位;剪切干涉;傅里叶变换;最小二乘法

中图分类号 O438 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.0310002

Method for Phase Recovery from a Single Undersampled Wrapped Phase Map

Fan Qi^{1,2} Yang Hongru¹ Li Gaoping¹ Yuan Liang¹ Jiang Changlu¹ Guo Yu¹

(¹ Optical Metrology Laboratory, Xi'an Institute of Applied Optics, Xi'an, Shaanxi 710065, China)
(² School of Science, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract Aiming at the problem of undersampling in the aspheric testing, a method for phase recovery from a single undersampled wrapped phase map is presented. Firstly, two wrapped phase differences are gained by subtracting the original undersampled wrapped phase with its two sheared copies along two orthogonal directions while the sheared value is 1 pixel. Secondly, the unwrapping is performed for the two wrapped phase differences. Finally, the searched phase is obtained by using the Fourier transform and least square algorithm. The simulation results show that the method can retrieve the wave-front with high accuracy. Using the method, the aspheric surface can be tested by current interferometers.

Key words Fourier optics; undersampling; wrapped phase; shearing interferometry; Fourier transform; least square

OCIS codes 100.5088; 120.5050; 120.4630; 120.6650; 100.5070

1 引 言

非球面光学元件的面形检测是近几年光学检测领域的研究热点和难点。制约非球面光学元件面形检测发展的主要因素是非球面光学元件的面形多种多样,没有统一标准的非球面样板可用于非球面光学元件面形的干涉计量检测。由此带来的问题是,在对非球面光学元件的面形进行干涉检测时,由于参考光波通常采用的是标准平面光波或标准球面光波,使得形成的干涉条纹过密,而不能被现有的图像

获取器件(如 CCD 摄像机)正常采样,即不满足奈奎斯特采样定理,出现欠采样现象。欠采样现象的出现使得从干涉条纹恢复出正确的相位信息变得困难。现有常用的解决方法为补偿法和拼接法。补偿法就是通过合理的光学设计,然后加工出补偿器,并利用补偿器将标准的平面光波或球面光波变为理想的非球面光波照射被检非球面元件,反射光波作为检测光波与标准平面光波或球面光波进行干涉。用作补偿器的可以是透镜组^[1,2],也可以是计算全息

收稿日期: 2010-09-07; **收到修改稿日期**: 2010-10-25

基金项目: 陕西省自然科学基金(2010JM8012)资助课题。

作者简介: 范琦(1972—),男,博士,主要从事光学计量和光信息处理等方面的研究。E-mail: af-fanqi@126.com

图^[3,4]。补偿法有两方面的不足:1)对辅助元件的加工精度要求很高,否则会引入较大的系统误差;2)由于非球面不同于球面,其面形千变万化,因此每一种辅助元件只适用于对某一类非球面的检测,从而使检测成本和检测周期增加。拼接法就是将待检非球面元件划分为不同的子区域,对各子区域分别进行测量,然后再将各测量结果拼接起来^[5,6]。拼接法的不足在于系统复杂、数据处理困难,不能进行现场动态检测。

除上述两种方法外,也可应用数据处理的方法解决干涉图的欠采样问题。1987年,John E. Greivenkamp^[7]为了解决非球面光学元件面形检测中的欠采样问题,在相移干涉技术的基础上提出了亚奈奎斯特干涉技术,通过假设被检面形的一阶和二阶等导数连续,进而从欠采样包裹相位图中恢复出正确的三维(3D)连续相位信息,美国ESDI公司已在此技术的基础上开发出实用的非球面检测仪器;1994年,M. Servin等^[8]采用数字补偿的方法正确解调出欠采样干涉条纹图中的相位;2003年,Jesus Munoz等^[9]研究了从单个欠采样干涉条纹图中正确恢复出相位信息的方法。本文从横向剪切干涉和数字全息干涉的思想出发,研究欠采样包裹相位图的恢复问题,希望在此研究的基础上,结合现有干涉仪实现大偏离量和大陡度非球面光学元件面形的检测。

2 原 理

由实验得到的干涉条纹可以通过相移或者傅里

叶变换的方法进行分析,获得检测光波的相位信息。由于在上述两种方法中都要采用取反正切的方式获取相位信息,因此所得的相位值处在 $[-\pi, \pi]$ 区间,称之为包裹相位图。要得到检测光波正确的连续相位分布必须对包裹相位图进行解包裹操作^[10~14]。但当包裹相位图相邻像素之间的相位差大于 π 时,将出现欠采样现象。欠采样现象发生的原因主要是由现有CCD的有限空间带宽积造成,并且当CCD的空间带宽积越小时,欠采样现象就越容易发生或者说欠采样现象就越严重。发生欠采样时的包裹相位图称为欠采样包裹相位图。应用传统的解包裹算法将不能从此欠采样包裹相位图中恢复出正确的连续相位分布,即不能重建出检测光波的波前,将不能完成非球面的面形检测。

横向剪切干涉技术可以通过同一光波与它一个小错位后的光波之间的干涉,实现对大偏离量和大陡度波面的检测。有关横向剪切干涉技术的研究已有许多文献报道^[15~18]。本文将此技术用于欠采样包裹相位图欠采样现象的去除。横向剪切干涉能有效去除欠采样现象的原因在于它利用波前相位与其自身小的错位之间的偏差往往很小的特点,然后通过对偏差进行处理,进而实现欠采样包裹相位图的回复。假设由欠采样干涉条纹图得到的检测波前的欠采样包裹相位为 $\phi_w(x, y)$,按照横向剪切的思想,将 $\phi_w(x, y)$ 在 x 方向进行错位量为 s 的平移得到 $\phi_w(x+s, y)$ 。由 $\phi_w(x, y)$ 和 $\phi_w(x+s, y)$ 可得到检测波前在 x 方向的包裹相位差分布 $\Delta\varphi_{wx}(x, y)$,由下式给出:

$$\Delta\varphi_{wx}(x, y) = \begin{cases} \phi_w(x+s, y) - \phi_w(x, y) & \phi_w(x+s, y) - \phi_w(x, y) \geq 0 \\ \phi_w(x+s, y) - \phi_w(x, y) + 2\pi & \phi_w(x+s, y) - \phi_w(x, y) < 0 \end{cases}, \quad (1)$$

按照同样的操作方式,可以得到检测波前在 y 方向的包裹相位差分布 $\Delta\varphi_{wy}(x, y)$,由下式给出:

$$\Delta\varphi_{wy}(x, y) = \begin{cases} \phi_w(x, y+s) - \phi_w(x, y) & \phi_w(x, y+s) - \phi_w(x, y) \geq 0 \\ \phi_w(x, y+s) - \phi_w(x, y) + 2\pi & \phi_w(x, y+s) - \phi_w(x, y) < 0 \end{cases}. \quad (2)$$

从数字全息二次曝光干涉的角度出发,(1),(2)式中的 $\phi_w(x, y)$, $\phi_w(x+s, y)$ 以及 $\phi_w(x, y+s)$ 可以看作作为同一物场在不同状态下的数字全息图的重建包裹相位, $\Delta\varphi_{wx}(x, y)$ 和 $\Delta\varphi_{wy}(x, y)$ 则反映物场在两种状态下的相位变化量。由(1),(2)式的取值可以得出, $\Delta\varphi_{wx}(x, y)$ 和 $\Delta\varphi_{wy}(x, y)$ 的取值范围为 $[0, 2\pi]$ 。如果检测光波在水平和垂直方向上的相位差超过 2π ,则 $\Delta\varphi_{wx}(x, y)$ 和 $\Delta\varphi_{wy}(x, y)$ 仍为包裹相位。

在(1),(2)式中,平移量 s 通常取为1 pixel的尺寸,则 $\phi_w(x, y)$ 到 $\phi_w(x+s, y)$ 以及 $\phi_w(x, y)$ 到 $\phi_w(x, y+s)$ 的变化一般很小,即 $\Delta\varphi_{wx}(x, y)$ 及 $\Delta\varphi_{wy}(x, y)$ 的相邻像素之间的差将小于 π 。因此对 $\Delta\varphi_{wx}(x, y)$ 和 $\Delta\varphi_{wy}(x, y)$ 分别进行解包裹操作,可以正确恢复出实际检测波前相位 $\phi(x, y)$ 在 x 和 y 方向的相位差分布 $\Delta\varphi_x(x, y)$ 和 $\Delta\varphi_y(x, y)$,它们与实际检测波前相位 $\phi(x, y)$ 之间的关系分别由以下两式给出:

$$\Delta\phi_x(x,y) = \phi(x+s,y) - \phi(x,y), \quad (3)$$

$$\Delta\phi_y(x,y) = \phi(x,y+s) - \phi(x,y), \quad (4)$$

对(3),(4)式两边分别进行一维傅里叶变换,并应用傅里叶变换的位移定理,可得

$$F_x[\phi(x,y)] = \frac{F_x[\Delta\phi_x(x,y)]}{\exp(i2\pi f_x s) - 1}, \quad (5)$$

$$F_y[\phi(x,y)] = \frac{F_y[\Delta\phi_y(x,y)]}{\exp(i2\pi f_y s) - 1}, \quad (6)$$

在(5),(6)式中, $F_x[\]$ 和 $F_y[\]$ 分别表示沿 x 和 y 方向的一维傅里叶变换, f_x 和 f_y 分别表示 x 和 y 方向的空间频率。对(5),(6)式的右边分别进行一维傅里叶逆变换,可得到检测波前相位 $\phi(x,y)$ 在 x 和 y 方向的一维估计

$$\phi_x(x,y) = F_x^{-1} \left\{ \frac{F_x[\Delta\phi_x(x,y)]}{\exp(i2\pi f_x s) - 1} \right\}, \quad (7)$$

$$\phi_y(x,y) = F_y^{-1} \left\{ \frac{F_y[\Delta\phi_y(x,y)]}{\exp(i2\pi f_y s) - 1} \right\}, \quad (8)$$

在(7),(8)式中, $F_x^{-1}[\]$ 和 $F_y^{-1}[\]$ 分别表示沿 x 和 y 方向的一维傅里叶逆变换。应用最小二乘法可得检测波前相位 $\phi(x,y)$ 与 $\phi_x(x,y)$ 和 $\phi_y(x,y)$ 之间的关系:

$$\phi(x,y) = \frac{[\phi_x(x,y) + d_x(x)] + [\phi_y(x,y) + d_y(y)]}{2}, \quad (9)$$

式中 d_x 和 d_y 分别为一维估计 $\phi_x(x,y)$ 和 $\phi_y(x,y)$

与 $\phi(x,y)$ 在 x 和 y 方向的相位偏差,可由最小二乘法得出^[15,16]。但当欠采样包裹相位图的欠采样严重时,由 $\Delta\phi_{wx}(x,y)$ 和 $\Delta\phi_{wy}(x,y)$ 将不能正确得到 $\Delta\phi_x(x,y)$ 和 $\Delta\phi_y(x,y)$, 此时横向剪切干涉将不能解决欠采样问题。

3 模拟实验

在模拟实验中为了增加欠采样的程度,取像素数为 $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$, 像素尺寸为 $100 \mu\text{m} \times 100 \mu\text{m}$ 。图 1(a)为顶点曲率半径 $R=0.893902 \text{ m}$, 二次曲面常数 $K=0.963059$ 的扁球面的欠采样包裹相位图,其连续相位为

$$\phi(m,n) = \frac{2\pi}{0.6328 \times 10^{-9}} \times \frac{c[(m \times 10^{-4})^2 + (n \times 10^{-4})^2]}{1 + \{1 - (K+1)c^2[(m \times 10^{-4})^2 + (n \times 10^{-4})^2]\}^{1/2}}, \quad (10)$$

$(m,n = -128, -127, \dots, 126, 127)$

式中 $c=1/R$ 。图 1(b)为(10)式给出的理想三维相位分布图,图 1(c)为对图 1(a)采用逐行判断相位跳跃点并加或减 2π 整数倍的解包裹运算后的解包裹相位图。对照图 1(b),(c)可以看出,对欠采样包裹相位图进行常规的解包裹运算,将不能得到其正确的连续相位分布。

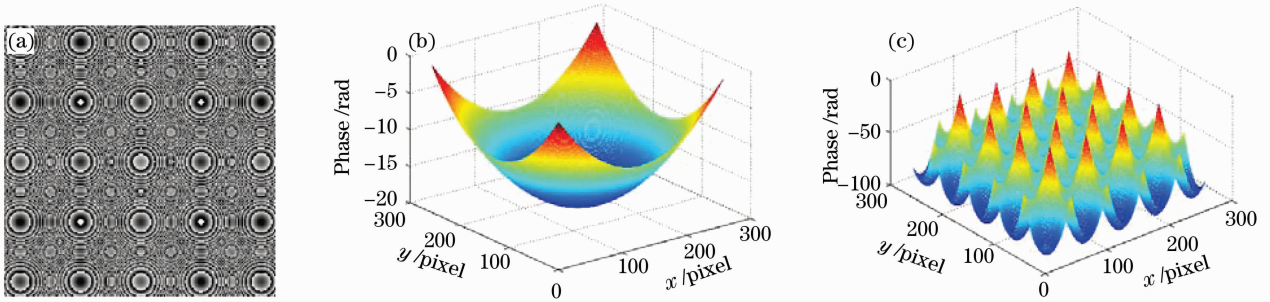


图 1 (a)模拟的欠采样包裹相位图,(b)理想三维相位图,(c)解包裹相位图

Fig. 1 (a) Simulated undersampled wrapped phase map, (b) ideal 3D phase map, (c) unwrapped phase map

下面采用提出的方法对图 1(a)所示的欠采样包裹相位图进行恢复。将图 1(a)所示的欠采样包裹相位图在水平和垂直方向分别进行 1 pixel 的错位,得到 2 个新的欠采样包裹相位图,按照(1),(2)式使它们分别与原欠采样包裹相位图相减,得到 2 个相位差分布 $\Delta\phi_{wx}(x,y)$ 和 $\Delta\phi_{wy}(x,y)$, 如图 2(a),(b)所示。由于进行了 1 pixel 的错位,因此所得的相位差分布 $\Delta\phi_{wx}(x,y)$ 和 $\Delta\phi_{wy}(x,y)$ 与原欠采样包裹相位相比,分别少了 1 列和 1 行数据。按照周期延拓的规则,图 2(a)所示的相位差分布

$\Delta\phi_{wx}(x,y)$ 的最后 1 列数据为原始欠采样包裹相位图的第 1 列与最后 1 列的差,图 2(b)所示的相位差分布 $\Delta\phi_{wy}(x,y)$ 的最后 1 行数据为原始欠采样包裹相位图的第 1 行与最后 1 行的差。由于错位量为 1 pixel,因此所得的两个方向上的相位差图将不再欠采样,但可能仍为包裹相位图。应用常规解包裹算法分别对图 2(a),(b)进行解包裹运算,得到 2 个解包裹相位差分布 $\Delta\phi_x(x,y)$ 和 $\Delta\phi_y(x,y)$, 如图 2(c),(d)所示。由图 2(c),(d)可以看出,解包裹后的相位差分布为连续的相位分布。

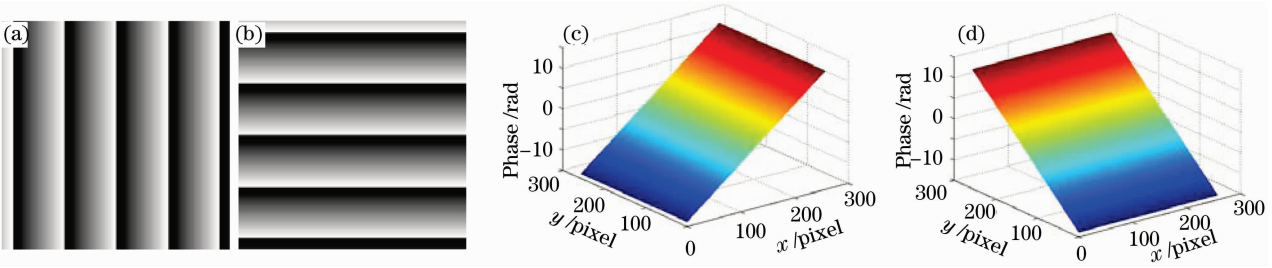


图 2 (a) 水平方向的包裹相位差图, (b) 竖直方向的包裹相位差图, (c) 水平方向的解包裹相位差图, (d) 竖直方向的解包裹相位差图

Fig. 2 (a) Wrapped phase difference in horizontal direction, (b) wrapped phase difference in vertical direction, (c) unwrapped phase difference in horizontal direction, (d) unwrapped phase difference in vertical direction

应用(7),(8)式对图 2(c),(d)所示的相位差分布进行一维傅里叶分析,可得理想波面在 x 和 y 方向的一维估计 $\phi_x(x, y)$ 和 $\phi_y(x, y)$,如图 3(a),(b)所示.由获得的两个一维估计 $\phi_x(x, y)$ 和 $\phi_y(x, y)$,采用最小二乘算法可得图 1(a)所示的欠采样包裹

相位图的连续相位分布,如图 4 所示.为了分析提出方法的恢复精度,将图 4 所示的恢复连续相位图与图 1(b)所示的理想连续相位图相减,得到的误差分布如图 5 所示.

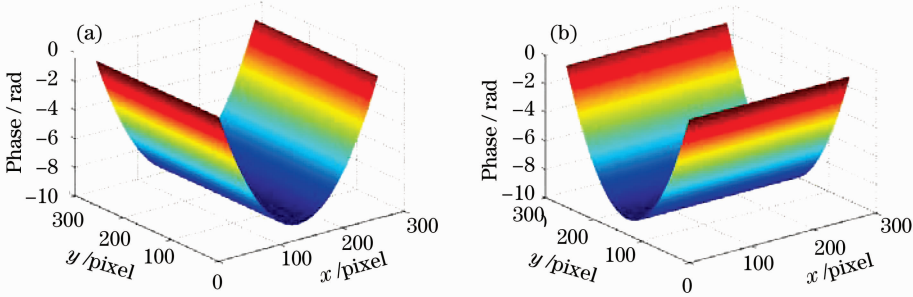


图 3 (a) 水平方向的一维估计 $\phi_x(x, y)$, (b) 竖直方向的一维估计 $\phi_y(x, y)$

Fig. 3 (a) $\phi_x(x, y)$: estimated phase in horizontal direction, (b) $\phi_y(x, y)$: estimated phase in vertical direction

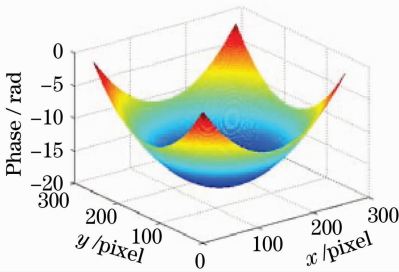


图 4 恢复出的相位

Fig. 4 Retrieved phase

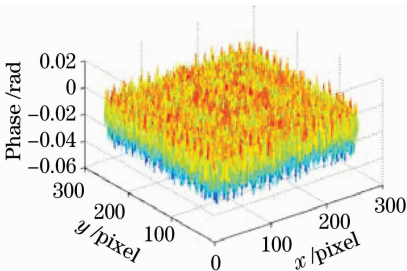


图 5 恢复相位与理想相位之间的误差图

Fig. 5 Error map between retrieved phase and ideal phase

由图 5 可得,提出的方法能够高精度地恢复出欠采样包裹相位图的连续相位分布,其峰谷(PV)值小于 0.06 rad.误差的主要来源是由于错位相减后的偏差有效数据少于原始待测波前数据,文献[13]已给出误差随错位量的增加而增加的结论.

4 结 论

欠采样包裹相位图的恢复方法借助横向剪切干涉和数字全息干涉的思想,通过原始欠采样包裹相位图在水平和竖直两个方向上的错位相减,消除欠采样的影响,从而能正确地恢复出检测光波的波前相位.模拟实验给出了此方法的实际操作过程,结果表明此方法对欠采样包裹相位图有很高的恢复精度.结合这一技术,可在现有干涉仪的基础上对大偏离量和大陡度的非球面光学元件进行检测.噪声的影响是一个比较复杂的问题,本文未对噪声引起的误差进行讨论,有关噪声引起的误差及抑制研究将另文给出.

参 考 文 献

- 1 Y. Takigawa, S. Nakayama, T. Yamamoto *et al.*. Absolute accuracy evaluation of aspherical null testing for EUVL mirrors [C]. *SPIE*, 2005, **5869**: 58690Q-1
- 2 F. Schillke. Critical aspects of testing aspheres in interferometric setups [C]. *SPIE*, 1999, **3739**: 317~324
- 3 S. M. Arnold. Verification and certification of CGH aspheric nulls [C]. *SPIE*, 1995, **2563**: 117~126
- 4 Lu Zhenwu, Liu Hua, Li Fengyou. Aspheric surface testing with CGH on curved surface [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2004, **12**(6): 555~559
卢振武, 刘 华, 李凤有. 利用曲面计算全息图进行非球面检测 [J]. *光学精密工程*, 2004, **12**(6): 555~559
- 5 P. Murphy, J. Fleig, G. Forbes. Subaperture stitching interferometry for testing mild aspheres [C]. *SPIE*, 2006, **6293**: 62930J-1
- 6 Wang Xiaokun, Wang Lihui, Zhang Xuejun. Testing asphere by subaperture stitching interferometric method [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2007, **15**(2): 192~198
王孝坤, 王丽辉, 张学军. 子孔径拼接干涉法检测非球面 [J]. *光学精密工程*, 2007, **15**(2): 192~198
- 7 J. E. Greivenkamp. Sub-nyquist interferometry [J]. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(24): 5245~5258
- 8 M. Servin, D. Malacara, Z. Malacara *et al.*. Sub-nyquist null aspheric testing using a computer stored compensator [J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(19): 4103~4108
- 9 J. Munoz, M. Strojnik, G. Paez. Phase recovery from a single undersampled interferogram [J]. *Appl. Opt.*, 2003, **42**(34): 6846~6852
- 10 Wang Jun, Zhao Jianlin, Fan Qi *et al.*. A novel synthetical method for phase unwrapping [J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(6): 795~799
王 军, 赵建林, 范 琦 等. 相位图去包裹的一种新的综合方法 [J]. *中国激光*, 2006, **33**(6): 795~799
- 11 Shi Yilei, Su Junhong, Yang Lihong *et al.*. Measuring thin-film thickness with phase-shift interferometry [J]. *J. Appl. Opt.*, 2009, **30**(1): 76~79
石一磊, 苏俊宏, 杨利红 等. 基于相位偏移干涉术的薄膜厚度测量方法 [J]. *应用光学*, 2009, **30**(1): 76~79
- 12 Zhu Rihong, Chen lei, Wang Qing *et al.*. Phase-shift interferometry and its application [J]. *J. Appl. Opt.*, 2006, **27**(2): 85~88
朱日宏, 陈 磊, 王 青 等. 相移干涉测量术及其应用 [J]. *应用光学*, 2006, **27**(2): 85~88
- 13 Zhang Yancao, Zhao Jianlin, Fan Qi *et al.*. Application of apodization digital holography in phase measurement [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(6): 1602~1606
张延曹, 赵建林, 范 琦 等. 切趾数字全息术在相位测量中的应用 [J]. *中国激光*, 2010, **37**(6): 1602~1606
- 14 Zhang Yizhuo, Wang Dayong, Zhao Jie *et al.*. Investigation on phase unwrapping algorithms in digital holography [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(12): 3323~3327
张亦卓, 王大勇, 赵 洁 等. 数字全息中实用相位解包裹算法研究 [J]. *光学学报*, 2009, **29**(12): 3323~3327
- 15 Zeng Xin, Ding Jianping, Liang Peiying *et al.*. Wave front reconstruction from shearing interferograms using least square fitting [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(3): 335~340
曾 新, 丁剑平, 梁佩莹 等. 二维剪切干涉波前的最小二乘法重建 [J]. *光学学报*, 2005, **25**(3): 335~340
- 16 P. Liang, J. Ding, Z. Jin *et al.*. Two-dimensional wave-front reconstruction from lateral shearing interferograms [J]. *Opt. Express*, 2006, **14**(2): 625~634
- 17 Qian Xiaofan, Wang Zhanliang, Hu Te *et al.*. Reconstructing the phase of wavefront using digital hologram and the principle of shearing interferometry [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(7): 1821~1826
钱晓凡, 王占亮, 胡 特 等. 用单幅数字全息和剪切干涉原理重构光场相位 [J]. *中国激光*, 2010, **37**(7): 1821~1826
- 18 Luan Zhu, Liu Liren, Liu Dean *et al.*. Double-shearing wavefront testing [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(10): 1417~1420
栾 竹, 刘立人, 刘德安 等. 双剪切波面干涉测量法 [J]. *光学学报*, 2004, **24**(10): 1417~1420