

基于德拜理论的液柱参数彩虹反演算法研究

宋飞虎 许传龙 王式民

(东南大学热能工程研究所, 江苏 南京 210096)

摘要 彩虹技术是一种可同时测量液柱折射率和粒径的实时、非接触方法。建立了定量描述彩虹信号的低频分量与德拜理论($p=2$)模拟信号重合程度的目标函数,在此基础上提出一种基于德拜理论($p=2$)的液柱参数彩虹技术反演算法。反演算法以经验公式的计算值为初始值,根据目标函数不断寻优获得优化结果,并通过米氏散射理论进一步优化得到反演结果。在折射率变化范围为 $1.32\sim 1.56$ 、半径变化范围为 $50\sim 500\ \mu\text{m}$ 时,进行数值模拟和实验研究。结果表明,半径的相对误差在 8% 以内,折射率误差绝对值小于 5×10^{-4} ,半径的测量下限为 $60\ \mu\text{m}$ 。

关键词 测量;彩虹测粒技术;折射率;半径;德拜理论

中图分类号 TK934 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.1212006

Reversion Algorithm for Liquid Column Parameters with Rainbow Refractometry Based on Debye Theory

Song Feihu Xu Chuanlong Wang Shimin

(Thermal Energy Engineering Research Institute, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China)

Abstract Rainbow refractometry is a non-intrusive technology for determining the refractive index and diameter of liquid column simultaneously. An objective function is designed to quantify the deviation between the low frequency component of the captured rainbow and the simulated rainbow with Debye theory ($p=2$). Further, a novel inversion algorithm for liquid column based on Debye theory ($p=2$) and the objective function is proposed. Experiments are carried out to evaluate the performance of the algorithm. Results show that the relative error of the radius is less than 8% , the absolute error of the refractive index is less than 5×10^{-4} and the detection limit of the radius is as low as $60\ \mu\text{m}$ with in the radius range of $50\sim 500\ \mu\text{m}$ and the refractive index range of $1.32\sim 1.56$.

Key words measurement; rainbow refractometry; refractive index; radius; Debye theory

OCIS codes 120.5820; 200.4560; 230.0040; 290.1350; 290.5820

1 引言

光学检测技术由于具有非侵入、实时性好、时间空间分辨率高和测量精度高等优点,被广泛地应用于对象参数的在线测量^[1~5]。彩虹是一种常见的光散射现象,近年来人们尝试将彩虹技术应用于液体参数测量^[6,7]。彩虹技术可以根据特定角度范围内的光强分布同时测量直径和折射率,并通过折射率计算出一些与之相关的物理量(如温度、浓度等)^[8~12]。单色激光垂直照射液柱时,入射光在液柱内经历一次内反射后出射,折射角最小值称为一

阶几何彩虹角。彩虹技术通过探测一阶几何彩虹角附近的散射光强分布,同时测量液柱的直径和折射率。相对于其他角域的散射光,一阶彩虹具有以下优点:结构稳定,当液柱参数在一定范围内变化时,散射光光强分布只会发生平移和拉伸,而不会改变形状;光强较高,入射光线在经历多次内反射后出射光强逐渐衰减,一阶彩虹较高的强度可以避免因使用高功率光源而造成的热效应和非线性极化效应^[13];信息量较大,从一阶彩虹图像中能明显地看到明暗相间的条纹以及叠加在其上的高频结构;光

收稿日期: 2011-06-27; 收到修改稿日期: 2011-07-08

基金项目: 江苏省青蓝工程项目资助(1103000126)和东南大学优秀青年教师教学科研资助计划(3203001202)资助课题。

作者简介: 宋飞虎(1986—),男,博士研究生,主要从事多相流测量方面的研究。E-mail: sssongfh@sina.com

导师简介: 许传龙(1978—),男,副研究员,博士生导师,主要从事多相流测量和燃烧诊断等方面的研究。

E-mail: chuanlongxu@seu.edu.cn(通信联系人)

路简单,易于与几何光学等成熟理论相结合。由于一阶彩虹的独特优势,目前该技术已被广泛地研究与应用。Roth 等^[11]在前向(30°附近)和后向(140°附近)散射区分别布置两个电荷耦合器件(CCD)拍摄散射光,并通过艾里理论由前向散射光计算半径,由一阶彩虹计算折射率。Van Beeck 等^[12]简化了测量系统,仅在一阶彩虹区域布置一个 CCD,通过光强峰值的角位置和彩虹的低频复虹结构由经验公式分别计算液柱的折射率和半径。吴振森等^[14]综合分析一阶彩虹的低频复虹结构和高频的叠加波结构,通过频谱分析和米氏散射理论建立经验公式,提出了基于彩虹角谱的测量方法。但这些彩虹测量方法主要基于经验公式,通用性较差(无法在粒径、折射率大范围变化的前提下准确测量)、抗噪能力低、各参数间的强耦合易造成误差的累积传递^[15]。

针对上述问题,本文提出一种基于米氏散射理论和德拜理论数学模型的液柱参数彩虹反演优化算法。该算法以经验公式计算的折射率和半径为初始值,由德拜理论($p=2$)根据初始值模拟光强分布,由测量值和理论值的重合程度建立目标函数,以减小目标函数值为目的不断对初始值进行优化。并以毛细管出口处的液柱为研究对象对反演算法进行了实验验证。

2 测量理论

2.1 彩虹技术原理

单色激光发出的平行光垂直照射均匀液柱,经历一次内反射的出射光与外表面反射光、多次内反射的出射光、表面波等相互干涉形成一阶彩虹。图 1 为截面处的光路示意图,图中 I_{out} 为出射光线, I_{in} 为入射光线, α 为入射角, β 为折射角, θ 为散射角, R 为截面半径距, m 为液体折射率。

根据几何光学理论得

$$\theta = \pi - 4\beta + 2\alpha = \pi - 4\arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{m}\right) + 2\alpha, \quad (1)$$

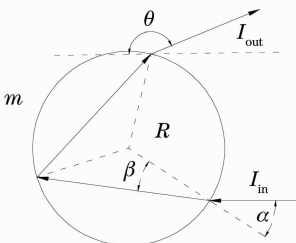


图 1 液柱截面光路示意图

Fig. 1 Optical path at the cross section of the liquid column

由(1)式可知散射角存在最小值,在此角度附近出射光线较为密集,通常称此最小散射角为一阶几何彩虹角:

$$\theta_{rg} = \pi - 4\arcsin\sqrt{\frac{4-m^2}{3m^2}} + 2\arcsin\sqrt{\frac{4-m^2}{3}}, \quad (2)$$

由(2)式可以通过几何彩虹角求解液体的折射率,然而彩虹光强分布的主峰角位置与几何彩虹角有一定的偏离,导致几何彩虹角无法通过测量获得。

几何光学仅能独立地分析各条散射光线,而无法描述它们之间的相互作用。艾里理论结合菲涅耳衍射理论与彩虹问题,提出一种分析几何彩虹角附近散射光虚拟波前的波动光学模型。由于其计算量小,理论模型简单,曾被广泛地应用于彩虹技术反演算法^[16,17]。自麦克斯韦电磁波理论诞生之后,洛伦茨-米氏散射理论可以对液柱散射问题严格地数学求解,从而精确模拟连续平面波照射下的彩虹光强分布^[18]。图 2 为基于米氏散射理论和艾里理论模拟的一阶彩虹,其中液柱的折射率为 1.3326,半径为 250 μm ,入射光波长为 532 nm。从图中可以看出艾里理论模拟的彩虹各峰的间隔较小,两条曲线各峰的幅值近似相等,主峰角位置有较小偏差。图 3 为图 2 对应的频谱,可以看出彩虹信号中存在多种明显的不同频率的振荡,依次为低频的复虹结构,由各内反射光线的干涉而产生,主要表现为各峰的趋势轮廓;叠加在复虹结构上的、由内反射光和外表面反射光干涉而产生的高频叠加波结构以及由于衍射光和内反射、外反射干涉形成的更高频率的结构,在频谱图上分别对应于后两个峰。而艾里理论仅能模拟彩虹信号的复虹结构,且其角频率小于米氏散射理论模拟的彩虹峰值。当液柱半径和折射率发生变

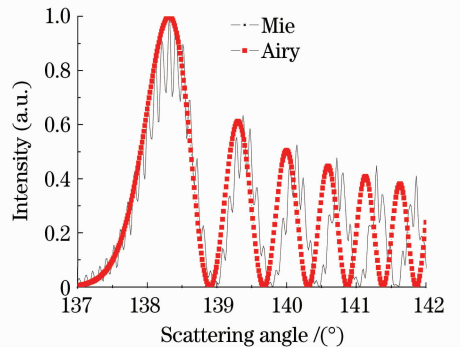


图 2 基于米氏散射理论和艾里理论模拟的一阶彩虹分布($m=1.3326, R=250 \mu\text{m}, \lambda=532 \text{ nm}$)

Fig. 2 First-order rainbow simulated by Mie scattering theory and the Airy theory ($m=1.3326, R=250 \mu\text{m}, \lambda=532 \text{ nm}$)

化,一阶彩虹的角位置和形状也会随之改变,通过 CCD 拍摄散射光分布,可以实现折射率和半径的反演,再由折射率与温度、浓度等之间的数学关系实现其他参数的测量。

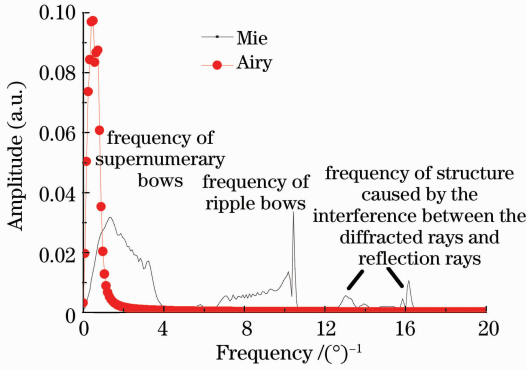


图3 对应于图2模拟的彩虹的频谱

Fig. 3 Frequency spectrum of rainbow corresponding to Fig. 2

2.2 光散射的德拜理论描述

德拜理论可以将米氏散射理论的散射系数进行分解,从而提取彩虹信号中经 $p-1$ 次内反射的出射光线干涉形成的分量,单独研究其对散射光的贡献^[19]。德拜散射系数 a_n, b_n 的数学表达式为

$$a_n = b_n = \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - R_n^{212} - \sum_{p=1}^{\infty} T_n^{21} (R_n^{121})^{p-1} T_n^{12} \right] \right\}, \quad (3)$$

式中下标 n 表示无穷级数的索引; R_n^{212} 和 R_n^{121} 表示光线在不同介质分界面的反射系数; T_n^{21} 和 T_n^{12} 表示光线在不同介质分界面的透射系数;等号右边的第一项描述衍射光和表面波;第二项描述外表面反射光;第三项描述经历 $p-1$ 次内反射的光线。可以看出德拜理论的散射系数可以描述外反射光、衍射光和 $p-1$ 次内反射光线中的某一项相干形成的散射光,或是多种光线相互作用形成的散射光。若将(3)式的每一项叠加且第三项 p 从 1 累加到一个足够大的值,则表示衍射光、外反射光和经历各次内反射的透射光相干形成的散射光,这与米氏散射理论的描述一致,此时德拜散射系数等于米氏散射系数。彩虹的复虹结构是由 $p=2$ 描述的光线干涉形成,其德拜散射系数为 $T_n^{21} R_n^{121} T_n^{12}$ 。图 4 为基于米氏散射理论与德拜理论($p=2$)模拟的彩虹。其中由米氏散射理论模拟的彩虹,其低频分量的截止频率为复虹结构的频率(下文中的低通截止频率均为复虹结构的频率)。可以看出三条曲线复虹结构的各峰的角位置均近似相等,因此与艾里理论模拟的复虹结

构相比,德拜理论($p=2$)模拟的一阶彩虹的复虹结构更接近实际情况。

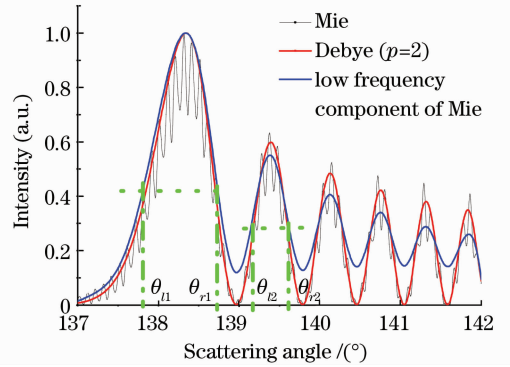


图4 基于米氏散射理论与德拜理论($p=2$)模拟的一阶彩虹($m=1.3326, R=250 \mu\text{m}, \lambda=532 \text{ nm}$)

Fig. 4 Comparison of low frequency component of the rainbow simulated by Mie scattering theory and by Debye theory ($p=2$) ($m=1.3326, R=250 \mu\text{m}, \lambda=532 \text{ nm}$)

2.3 目标函数的建立

米氏散射理论能精确地模拟液柱的光散射,根据设定的折射率 m 和半径 R 可以计算一阶彩虹光强分布。若模拟和测量的彩虹光强分布有较好的重合度,则可认为被测液柱的折射率和半径近似等于设定值。为定量地描述散射光模拟值和测量值的差异,建立目标函数

$$f(m, R) = \sum_{k=1}^h [I_{\text{mea}}(k) - I_{\text{sim}}(k)]^2, \quad (4)$$

式中 f 为目标函数值, I_{mea} 为 CCD 测量的散射光强, I_{sim} 为散射光强模拟值, k 为所选择的离散点的序号, h 为所选择的离散点数。若式中 I_{sim} 由米氏散射理论模拟,则称(4)式为基于米氏散射理论的目标函数;若式中 I_{sim} 由德拜理论($p=2$)模拟,且 I_{mea} 为彩虹信号的低频分量,则称(4)式为基于德拜理论的目标函数。米氏散射理论模拟的彩虹具有多个极值,这一结构将导致目标函数的变化规律较为复杂。德拜理论($p=2$)模拟的一阶彩虹结构简单,与米氏散射理论模拟值的重合度较好,故基于德拜理论($p=2$)的目标函数值能近似地描述彩虹测量值与米氏散射理论模拟值的接近程度,且变化规律简单、明显。考虑到米氏散射理论和德拜理论的计算量较大,为了提高反演算法效率,一般选择散射光光强分布曲线上少数特征点来计算目标函数值。由图 4 可以看出米氏散射理论与德拜理论($p=2$)模拟的一阶彩虹的复虹结构第一峰有微小的偏移,而其余峰的重合度较好。考虑到当存在噪声影响时前两个峰的信

噪比较高,且为了兼顾计算量,选取目标函数特征点角位置的规则为

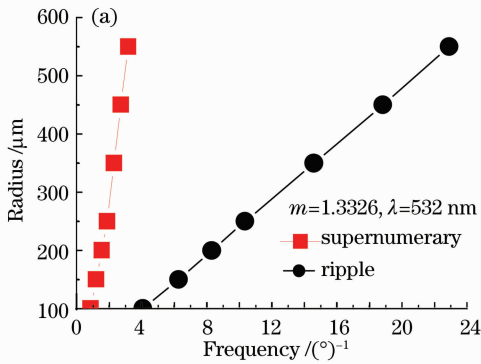
$$\theta(k) = (\theta_{r1} - \theta_{l1})/14 + \theta_{l1}, \quad k = 0, 2, \dots, 14 \quad (5)$$

$$\theta(k) = (\theta_{r2} - \theta_{l2})/8 + \theta_{l2}, \quad k = 0, 2, \dots, 8 \quad (6)$$

其中(5)式描述选取复虹结构第一个峰上离散点的规则,(6)式描述选取复虹结构第二个峰上离散点的规则, θ_{r1} 为复虹结构第一峰向右第一个幅值等于波峰40%的离散点的角位置, θ_{r2} 为复虹结构第二峰右侧相应点的角位置, θ_{l1} 为复虹结构第一峰左侧相应点的角位置, θ_{l2} 为复虹结构第二峰峰左侧相应点的角位置,如图4所示。

3 反演算法

为了从 CCD 拍摄到的彩虹光强分布中获取测量对象的折射率和半径,提出了基于经验公式、德拜理论、米氏散射理论以及目标函数的反演算法。反演算法可以分为三个部分:由经验公式确定折射率和半径初始值;在德拜理论($p=2$)和目标函数在初始值的基础上对折射率和半径寻优得到优化结果;



最后在寻优结果周围的小范围内,由米氏散射理论和目标函数进一步确定精确解。

3.1 经验公式确定初值

由于艾里理论与实际散射光的偏差较大,通过米氏散射理论建立经验公式,获取寻优初始值。图5(a)为米氏散射理论模拟的复虹结构和叠加波结构频率与粒径的关系,其中折射率为1.3326,入射光波长为532 nm。从图中可以看出,两种结构频率与粒径都有较好的线性关系,但是复虹结构对应直线的斜率较大。由于噪声造成的频谱峰值偏移将会导致较大的半径误差,因此通过叠加波结构频率与液柱半径的关系建立经验公式。图5(b)为不同折射率下叠加波结构频率与半径的关系,可以看出折射率也会影响叠加波结构频率,但与半径相比折射率的影响较小,图中两条曲线在550 μm处的相对误差为3%。根据图5(a)中叠加波结构对应各点,建立频率与半径的一次函数拟合关系式

$$R = 23.89F + 1.427, \quad (7)$$

式中 R 为半径, F 为叠加波结构频率。

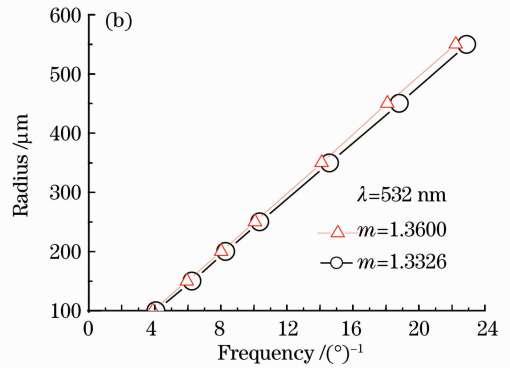


图5 米氏散射模拟彩虹的频谱中特征频率与半径的关系。(a)不同结构频率与半径关系;(b)不同折射率下叠加波结构频率与半径关系

Fig. 5 Relation between characteristic frequency and radius of the rainbow simulated with Mie scattering theory. (a) Frequency of two different bows versus radius; (b) frequency of the ripple bows versus radius with different refractive index

根据几何光学,由(2)式可以根据几何彩虹角迭代求解折射率,然而直接将主峰角位置代入(2)式计算得到的折射率与真实值有一定误差。图6为 $m=1.3326$ 和 $m=1.36$ 下,折射率真实值与(2)式迭代结果的比值。图中两条曲线都呈现非线性地递增,且两者在150 μm以下区间重合度较差,由此说明几何彩虹角与实际主峰角位置的偏差受折射率和粒径的共同影响。根据图6中 $m=1.3326$ 各点,通过四次多项式拟合得到修正系数,计算折射率的初始值。

$$m = m_{rg} (-6.875 \times 10^{-13} R^4 + 1.02 \times 10^{-9} R^3 - 5.503 \times 10^{-7} R^2 + 1.3088 \times 10^{-4} R + 0.9862), \quad (8)$$

式中 m 为修正结果, m_{rg} 为(2)式的迭代结果, R 为(7)式计算的半径。

3.2 基于德拜理论($p=2$)和目标函数的寻优

通过经验公式可以得到折射率和半径的初始值 m_0, R_0 。然而由于噪声、经验公式适用范围小等原因,初始值存在较大误差,需要进一步优化。反演算法从初始值开始,根据目标函数值开始寻优。寻优过程首先从 $m = m_0$ 截面开始,在当前点(m_0, R_j)的基

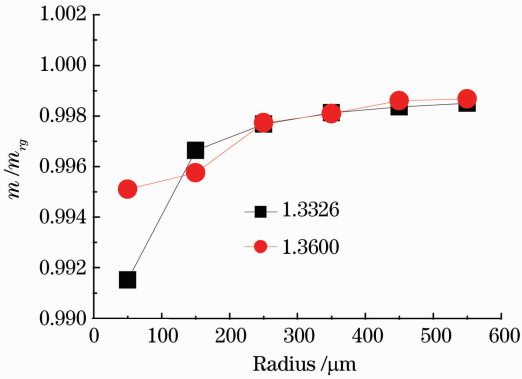


图 6 折射率真实值与迭代结果之比和半径的关系
Fig. 6 Ratio of the true refractive index to the iterative value versus radius

基础上适当调整半径,得到下一点 (m_0, R_{j+1}) ,通过判断前一点的目标函数值 $f(m_0, R_{j-1})$ 、当前点的 $f(m_0, R_j)$ 以及下一点的 $f(m_0, R_{j+1})$ 可以判断目标函数值是否逐渐减小,以确定寻优路线,找出该截面的最优值。然后调整折射率,寻找 $m = m_i$ 截面的最优值 (m_i, R_k) ,通过与前一截面的最小目标函数值比较可以确定折射率的寻优方向。反复进行以上过程,最终可以获得全局最优值。

图 7 为折射率和半径真实值附近区域内,基于米氏散射理论的目标函数值的变化,其中 I_{mea} 由米氏散射理论模拟($R = 80 \mu\text{m}, m = 1.333$)。可以发现,真实值对应的目标函数值为全局最小值,在真实值附近区域内复杂的“毛刺”结构造成目标函数值存在多个局部极小值。产生这一现象的原因因为米氏散射理论模拟的一阶彩虹的叠加波结构具有多个局部极值。从中看出 $m = 1.333$ 截面上曲线的单调性较差,无法根据其中某几点的目标函数值准确地判断寻优方向,若当前点 $f(1.333, 80.5) = 0.6228$,而偏移后的下一点 $f(1.333, 81.5) = 0.1010$,这样算法就会向半径大于 $80.5 \mu\text{m}$ 的方向寻优。使用全局

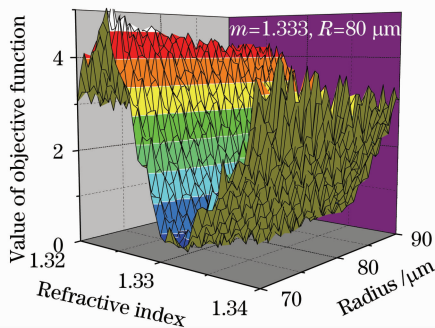


图 7 基于米氏散射理论的算法目标函数值的变化
Fig. 7 Values of objective function based on Mie scattering theory

遍历或是遗传算法等,可避免这一错误的发生,但将增加反演算法的计算量。

图 8 为折射率和半径真实值附近区域内,基于德拜理论($p = 2$)的目标函数值的变化规律,其中 I_{mea} 为米氏散射理论模拟($R = 80 \mu\text{m}, m = 1.333$)的低频分量。图 9(a)为图 8 中 $m = 1.333$ 截面上的曲线,图 9(b)为图 8 中 $R = 80 \mu\text{m}$ 截面上的曲线。可以发现图 8 所示的曲面在真实值附近小范围内近似为一个椭圆抛物面,在任意 $z = z_0$ 截面,与 R 轴平行的长轴远大于与 m 轴平行的短轴。在曲线最低点的各个方向上均有较好的单调性,按照上文所述寻

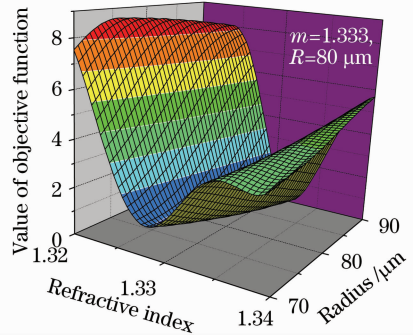


图 8 基于德拜理论($p = 2$)的算法目标函数值的变化
Fig. 8 Values of objective function based on Debye theory ($p = 2$)

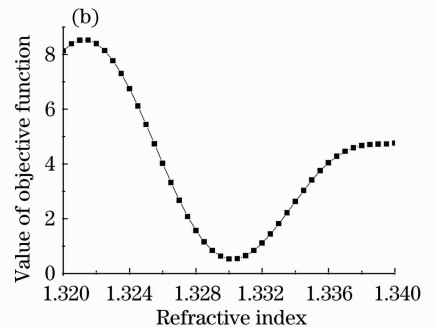
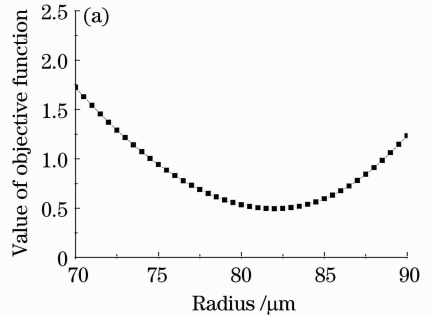


图 9 两个特征截面。(a) $m = 1.333$; (b) $R = 80 \mu\text{m}$
Fig. 9 Two typical cross sections of the surface.
(a) $m = 1.333$; (b) $R = 80 \mu\text{m}$

优过程能快速准确地确定全局最优解。从图 9(b), 可见折射率小于 1.321 范围内还有一个局部极小点, 为了避免寻优过程在该区域因偏移量较小而无法跳出, 并最终落在错误的极小点, 偏移量将从较大的初始设定值逐步减小。偏移量的下限决定寻优的精度和耗时。从图 9(a)中可以看出, 基于德拜理论($p=2$)的目标函数的全局最小值并不对应真实参数, 其主要是因为米氏散射理论与德拜理论($p=2$)模拟的一阶彩虹的复虹结构并非严格重合。

3.3 寻优结果的进一步优化

寻优过程能快速得到估计的结果(m_p, R_q), 为了获取最终的精确解, 基于米氏散射理论的目标函数被用来对寻优结果进一步优化。由于基于米氏散射理论的目标函数值无明显变化规律, 很难确定优化路线。因此反演算法在寻优结果的周围选取一系列离散点, 遍历各点的基于米氏散射理论的目标函数值, 将最小目标函数的对应点作为最终结果。离散点越多遍历的范围越大, 则包含真实值的可能性越大, 但是计算量也会相应增加, 因此需兼顾精度和计算量, 合理选择离散点的数量。

3.4 反演算法的数值验证

通过数值计算来验证反演算法的可行性。首先给出折射率和半径, 由米氏散射理论模拟一阶彩虹。根据光强分布可以通过反演算法获得测量结果, 并与真实值比较得出相对误差。图 10 为反演算法的计算过程, 给定 $R=120 \mu\text{m}, m=1.46$ 。图中给出了算法 3 个步骤的计算结果: 1) 经验公式获得的计算结果; 2) 基于德拜理论的目标函数的寻优过程, 图中箭头指示了寻优路线; 3) 基于米氏散射理论的目标函数的优化结果。经验公式计算的半径和折射率分别为 $102.91 \mu\text{m}$ 和 1.4589。这是因为半径的经验公式是根据折射率在 1.3326 附近范围内米氏散射理论计算结果给出的, 当折射率变化较大时, 该经验公式的计算误差增大。此时折射率的误差相对较小。相对于经验公式结果, 寻优结果($R=116.69 \mu\text{m}, m=1.4596$)具有更小的误差。寻优结果附近取一系列离散点, 计算各离散点的基于米氏散射理论的目标函数值, 可以进一步优化寻优结果, 从而获得最终的测量结果($R=118.69 \mu\text{m}, m=1.4598$)。测量结果存在误差的主要原因为: 离散点数仅为 49 个, 真实值对应的离散点未被取到。在 CPU 为 E7400、内存 2 G 的个人计算机上, 反演算法第二步和第三步的耗时分别为 2.52 s 和 3.02 s。由于反演算法第三步的遍历过程无规律可循, 判断的离散点多于第二

步, 其耗时也相应增大。若将散点数增加到 169 个, 此时测量结果为 $R=119.69 \mu\text{m}, m=1.4599$, 然而耗时 10.67 s, 算法的实时性变差。

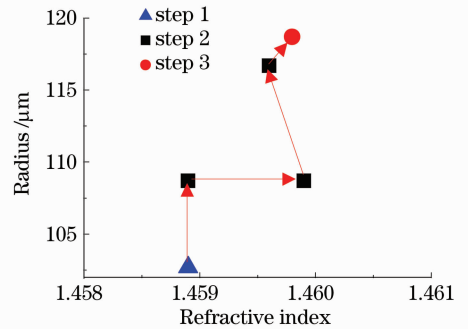


图 10 算法寻优路线示意图

Fig. 10 Schematic diagram of optimization path of the algorithm

图 11 为在一系列设定值下的反演结果, 其中半径为 $100 \mu\text{m}$ 、折射率从 1.32 以 0.02 为间隔递增至 1.56。图中给出了反演算法各步的结果, 以便于比较经验公式与优化过程的表现。图 11(a)为各步的折射率结果, 由于各个真实值之间相差 0.02, 而误差的绝对值在 10^{-3} 量级。若直接给出折射率反演结果, 则无法清晰地观察结果的好坏, 故图中所示为折射率反演值与真实值之差。从中可以看出经验公

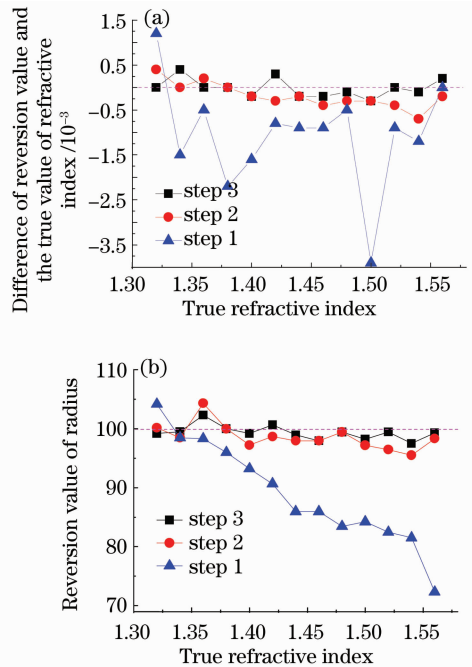


图 11 $R=100 \mu\text{m}$ 不同折射率设定值下的反演结果。

(a) 折射率反演值与真实值之差; (b) 半径反演结果

Fig. 11 Inversion parameters with the radius of $100 \mu\text{m}$. (a) Errors of refractive index results; (b) inverted radius

式求解结果具有较大的误差,最大为 -4×10^{-3} 。其原因为半径等于 $100 \mu\text{m}$ 时,折射率真实值对折射率经验公式的影响较大,如图6所示。而第二步的寻优结果可以将误差的绝对值控制在 7×10^{-4} 之内,第三步的优化过程能进一步提高精度,反演误差的绝对值在 5×10^{-4} 以内。从图11(b)中可以看出:随着折射率真实值的增加,经验公式求解结果的误差逐渐增大,当折射率大于1.36时,半径误差绝对值均大于 $5 \mu\text{m}$,折射率为1.56时,半径的误差绝对值为 $28 \mu\text{m}$ 。其原因为:半径的经验计算公式同时受到折射率和半径真实值的影响,折射率在1.3326附近时,经验公式有较好的表现,随着折射率的增大,经验公式适用性越来越差。但第二步的寻优结果的相对误差在5%以内,第三步进一步提高到3%以内。

图12为在一系列设定值下的反演结果,其中折射率为1.36、半径从 $50 \mu\text{m}$ 递增到 $500 \mu\text{m}$ 。图12(a)为各步的折射率反演值。从中可以看出当半径大于 $150 \mu\text{m}$ 时,经验公式求解结果的误差在 8×10^{-4} 以内,当半径从 $150 \mu\text{m}$ 减小时,折射率真实值对折射率经验公式的影响逐渐增大,半径为 $50 \mu\text{m}$ 时,误差达到 3.5×10^{-3} ,这一结果与图6所示一致。折射率经

验公式是根据折射率为1.3326时的模拟值而建立,与折射率真实值1.36接近,因此相对于图11(b)所示,图12(b)中的半径的误差较小,最大误差仅有5%。当半径大于 $60 \mu\text{m}$ 时,图12中折射率寻优结果的误差绝对值在 5×10^{-4} 以内,折射率最终结果的误差绝对值在 3×10^{-4} 以内;半径寻优结果的相对误差在5%以内,半径最终结果的误差在3%以内。然而当半径小于 $60 \mu\text{m}$ 时,反演算法第二步与第三步的误差开始增大。图13分别给出了米氏散射理论模拟彩虹的低频分量以及由德拜理论($p=2$)模拟的复虹结构。比较图13和图4可以发现:当半径较小时米氏散射理论模拟的一阶彩虹低频分量与德拜理论($p=2$)模拟值的偏差较大。图13中低频分量对应的曲线,主峰位置向左移、前两个峰的间距增大,若通过德拜理论($p=2$)来模拟该曲线,则折射率和半径的取值均低于真实值,故图12(a),(b)中第二步与第三步结果的第一点都小于真实值。然而第一峰的偏移方向以及峰值间距的变化并非单调的,图12(a),(b)中第二步与第三步结果的第二点都比真实值偏大,因此很难对小粒径时的反演误差进行修正。

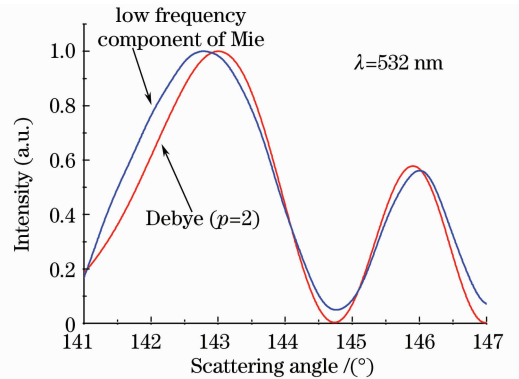
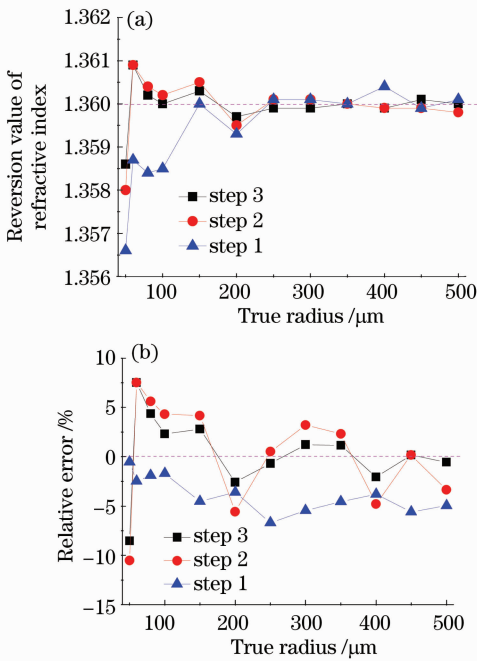


图13 $R=50 \mu\text{m}$, $m=1.36$ 时米氏散射理论模拟的一阶彩虹低频分量与德拜理论($p=2$)的模拟值

Fig. 13 Low frequency component of the first-order rainbow simulated with Mie scattering theory compared with the supernumerary bows simulated with the Debye theory ($p=2$) ($m=1.36, R=50 \mu\text{m}$)

4 实验结果与分析

实验系统如图14所示,主要包括测量对象和光学测量系统两部分。测量对象为毛细管出口处的稳定液柱,毛细管内径为 0.5 mm 和 1 mm 两种规格, $0 \sim 50 \text{ g/L}$ 的 NaCl 溶液可以实现液柱折射率的改变。由于毛细管壁对流体的粘性力,毛细管出口的液柱从上往下直径不断变小,因此将毛细管出口以

图12 $m=1.36$ 不同半径设定值下的反演结果。

(a) 折射率反演值; (b) 半径反演结果的相对误差

Fig. 12 Inversion parameters with the refractive index of 1.36. (a) Inverted refractive index; (b) relative errors of inverted radius

下 1 mm 处的液柱作为实验对象,使液柱直径与毛细管内径尽可能地接近。分别将 1 mm,0.5 mm 作为直径真实值。实验过程中环境温度为 12 ℃,由文献 [20]可知入射光为 532 nm 时,12 ℃ 纯水的折射率为 1.336。光学测量系统包括光学平台、100 mW,532 nm 激光光源、平面镜、凸透镜和 2048 pixel,40 MHz 的 CCD 相机。激光器发出的平行光束经平面镜反射后照射液柱,散射光经透镜会聚后被 CCD 相机接收,通过前后移动凸透镜 2 可以调整 CCD 所在的测量平面的成像效果。图 15 为单色平行光照射液柱产生的一阶彩虹的照片,提取其灰度值可以获得彩虹光强分布曲线,通过标定可将像素点序号转化为对应的散射角度。

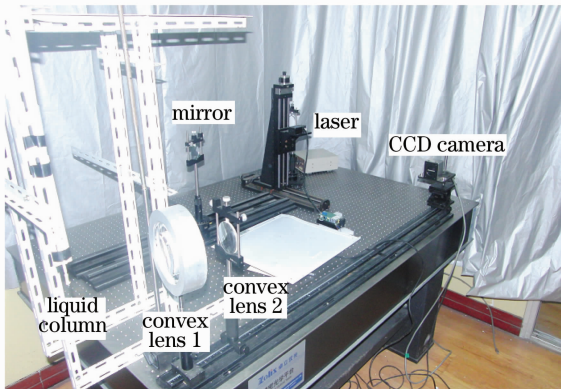


图 14 实验系统
Fig. 14 Experiment system



图 15 CCD 相机拍摄的一阶彩虹
Fig. 15 First-order rainbow captured by CCD camera

图 16 为 CCD 拍摄的 0.5 mm 内径毛细管出口处纯水液柱的一阶彩虹,并提取其低频分量与德拜理论 ($p=2$) 模拟值进行比较,其中 $R=250 \mu\text{m}$, $m=1.336$ 。可以看出模拟曲线与低频分量的各个峰的角位置均近似相等。比较图 4 和图 16 可以发现实际彩虹信号由于系统振动、流体脉动、电路干扰等的存在含有大量的噪声,彩虹叠加波结构的形状有较明显的改变,由此会影响主峰角位置的准确获取,故文中将低频分量峰值角位置代入折射率经验公式。

图 17 为图 16 中实际信号的频谱,并与米氏散射理论模拟值的频谱进行比较。从中可以发现叠加波结构频率周围存在多个极大值,而曲线在其它区

域形变较小。由此说明叠加波结构频率周围存在一个频带较窄的噪声。由 CCD 对 0.5 mm 内径毛细管出口处纯水液柱的散射光强连续十次拍摄,进行重复性实验。

图 18(a)为折射率反演结果,图 18(b)为半径反演结果。从图 18 中可以发现经验公式计算的半径含有较大误差,主要原因为:叠加波结构频率周围的多个极大值幅值发生变化时,会影响叠加波结构频率的准确获取。半径经验公式的结果为折射率经验公式的变量,半径的计算结果会将误差传递给折射率经验公式的结果。反演算法第二步和第三步的计算结果的测量误差较小,结果的重复性较好。折射率测量误差的绝对值均在 5×10^{-4} 以内;半径测量结果的相对误差均在 8% 以内。

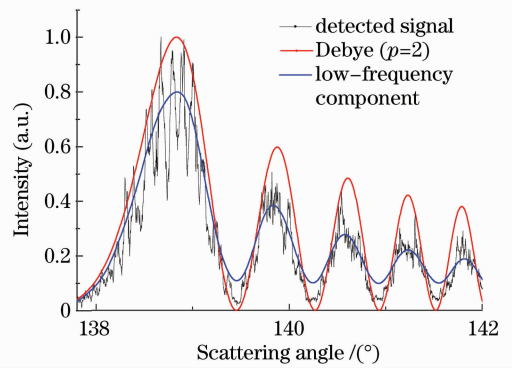


图 16 实测彩虹信号的低频分量与德拜理论 ($p=2$) 复虹模拟值

Fig. 16 Low-frequency component of the captured rainbow signal and supernumerary bows simulated by Debye theory ($p=2$)

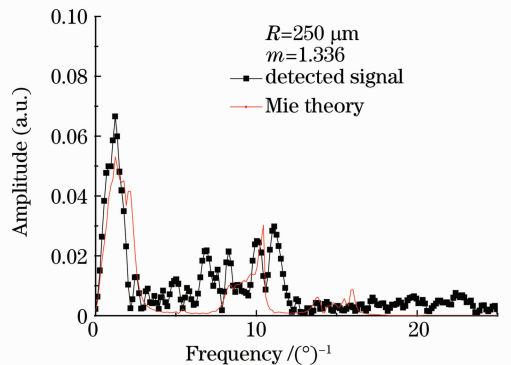


图 17 测量到的彩虹信号与米氏散射理论模拟值得频谱
Fig. 17 Frequency spectrum of the captured rainbow signal and the rainbow simulated by Mie scattering theory

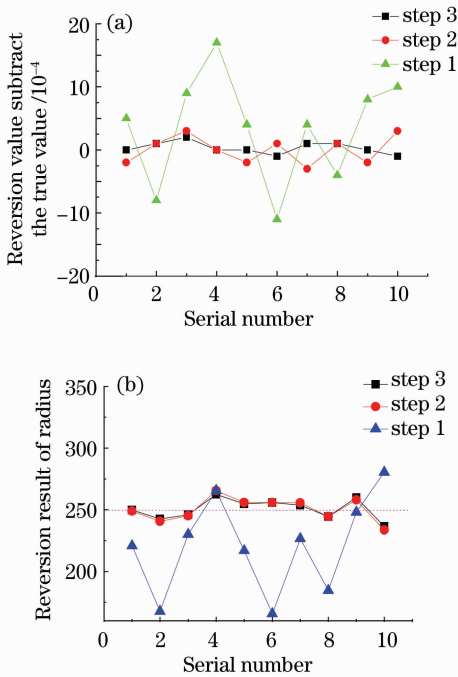


图 18 0.5 mm 内径毛细管出口处纯水液柱的彩虹的反演结果。(a) 折射率反演误差；(b) 半径反演结果
Fig. 18 Inversion results of the rainbow produced by water column at the export of the capillary of inner diameter 0.5 mm. (a) Measurement errors of the refractive index results; (b) radius inversion results

图 19 为 0.5 mm 内径毛细管出口处 NaCl 溶液液柱的一阶彩虹的反演结果。图 20 为 1 mm 内径毛细管出口处 NaCl 溶液液柱的一阶彩虹的反演结果。通过半径经验公式的结果可以发现,由于噪声对叠加波结构的影响,结果含有较大的误差,最大误差为 33%。反演算法最终的半径测量值具有较小的测量误差和较好的重复性,相对误差的最大值为 7.5%。从总体上看半径测量值略小于毛细管内径,这与粘性力导致液柱变细的结论一致。比较反演算法第一步和第三步的折射率结果,第一步对应的曲线在第三步对应得曲线周围上下波动,不同毛细管下的折射率测量结果近似相等。图 21 为不同毛细管下折射率均值的线性拟合结果。从中可以发现,溶液折射率与 NaCl 的质量浓度存在近似的线性关系。这一结论也验证了彩虹测量技术对溶液浓度测量的可行性。

比较数值计算结果和实验测量结果发现,实验结果的误差较大,这是因为数值计算结果的误差仅

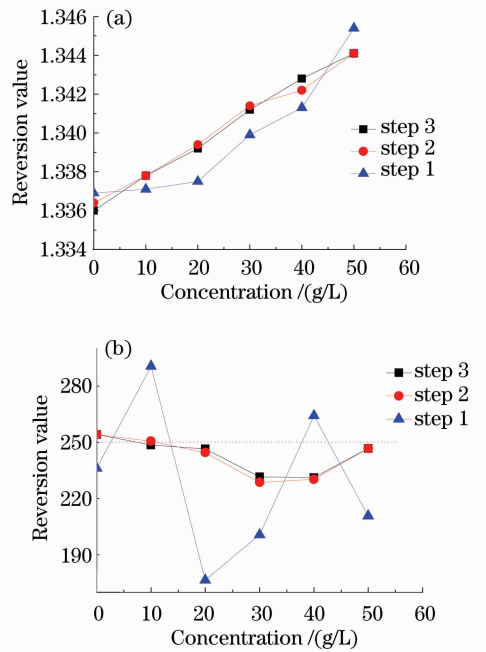


图 19 0.5 mm 内径毛细管出口处 NaCl 溶液液柱的彩虹的反演结果。(a) 折射率反演结果；(b) 半径反演结果
Fig. 19 Inversion parameters of the rainbow produced by NaCl solution column at the export of the capillary of inner diameter 0.5 mm. (a) Refractive index inversion results; (b) radius inversion results

来源于经验公式适用范围,而实际彩虹信号还受到噪声影响。以图 16 中测量信号第二峰为例,其叠加波结构被严重破坏,峰顶前半部分幅值明显比后半部分大,因此低频分量的峰值位置前移,造成半径反演值偏大。若第一峰叠加波结构也发生上述问题,低频分量曲线峰值位置偏移,将同时导致折射率和半径的测量误差。此外,反演算法的不足之处在于算法的较为耗时,其原因为德拜理论与米氏散射理论的计算量与半径近似成正比关系。对于内径为 0.5 mm 的毛细管,反演算法第二步耗时约 10 s,第三步耗时约 15 s(49 个离散点);然而对于 1 mm 的毛细管,反演算法第二步耗时约 28 s,第三步耗时约 40 s(49 个离散点)。与前文提到的半径为 0.1 mm 时,两步耗时分别为 2.5 s 及 3 s 相比,半径较大时测量的实时性较差。观察图 19 和图 20 发现,比较反演算法第二步结果与第三步的结果,可以发现第二步的测量精度略低,但是仍然具有较小的测量误差。若为了提高反演算法的实时性,可以将算法精简为只含有前两步。

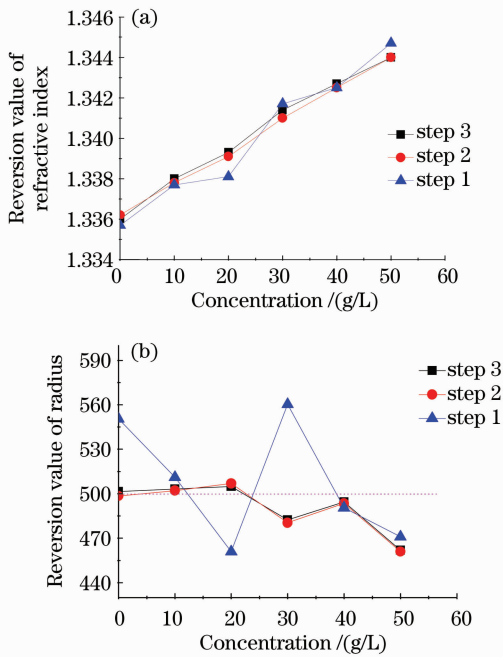


图 20 1 mm 内径毛细管出口处 NaCl 溶液液柱的彩虹的反演结果。(a) 折射率反演结果;(b) 半径反演结果

Fig. 20 Inversion parameters of the rainbow produced by NaCl solution column at the export of the capillary of inner diameter 1 mm. (a) Refractive index inversion results; (b) radius inversion results

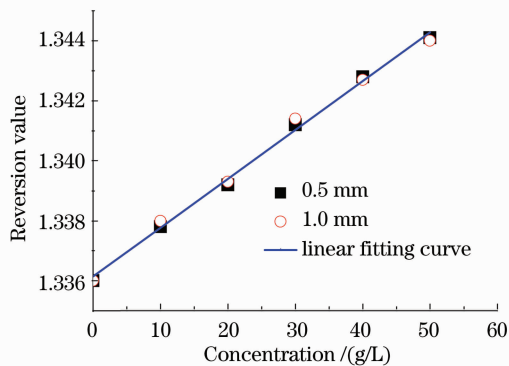


图 21 不同内径毛细管下折射率测量值及线性拟合结果
Fig. 21 Measured and linearly fitted values of the refractive index with different inner diameters of the capillary

5 结 论

在研究德拜理论 ($p=2$) 与彩虹信号低频分量重合程度的基础上,建立了目标函数,提出了基于德拜理论 ($p=2$) 的液柱参数彩虹技术反演算法,并在参数较大范围变化的前提下进行了相应的数值模拟

和实验研究。由于小粒径的彩虹信号低频分量与德拜理论 ($p=2$) 模拟值有较大的偏差,反演算法对半径的测量下限为 $60 \mu\text{m}$ 。半径测量值的相对误差在 8% 以内,折射率测量值的误差绝对值小于 5×10^{-4} 。这一结果较传统的基于经验公式的测量方法有较大的提高。反演算法的不足之处在于耗时较大,为了提高实时性而略去算法的第三步,但仍能获取较高精度的测量结果。

参 考 文 献

- Lü Qieni, Ge Baozhen, Chen Yiliang *et al.*. An algorithm for interferometric image processing of interferometric particle imaging [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(4): 0412009
吕且妮, 葛宝臻, 陈益亮 等. 激光干涉粒子成像测量干涉图处理算法研究[J]. *光学学报*, 2011, **31**(4): 0412009
- Yuan Jiangtao, Yang Li, Wang Xiaochuan *et al.*. Measurement and analysis of water mist droplet size based on machine vision [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(10): 2842~2847
袁江涛, 杨立, 王小川 等. 基于机器视觉的细水雾液滴尺寸测量与分析[J]. *光学学报*, 2009, **29**(10): 2842~2847
- Lü Qieni, Ge Baozhen, Chen Yiliang *et al.*. Particle sizing and size distribution measurement of alcohol spray by interferometric particle imaging [J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(3): 0380003
吕且妮, 葛宝臻, 陈益亮 等. 激光干涉粒子成像乙醇喷雾场粒子尺寸和粒度分布测量[J]. *中国激光*, 2011, **38**(3): 0380003
- Huang Zhanhua, Zhu Meng, Cai Huaiyu *et al.*. Speckle correlation used in measurement of elliptical Gaussian [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(10): 2918~2922
黄战华, 朱猛, 蔡怀宇 等. 散斑相关在椭圆高斯光束发散角测量中的应用[J]. *光学学报*, 2010, **30**(10): 2918~2922
- Li Qiang, Han Guanghui, Xing Mannan *et al.*. Measuring refractive index of micro-quantity liquid by focus method [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(9): 2468~2472
李强, 韩广辉, 邢曼男 等. 用毛细管焦点法精确测量微量液体的折射率[J]. *光学学报*, 2009, **29**(9): 2468~2472
- M. R. Vetrano, J. P. A. J. van Beeck, M. L. Riethmuller. Global rainbow thermometry: improvements in the data inversion algorithm and validation technique in liquid-liquid suspension [J]. *Appl. Opt.*, 2004, **43**(18): 3600~3607
- H. Hattori, H. Kakui, H. Kurniawan *et al.*. Liquid refractometry by the rainbow method [J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(19): 4123~4129
- J. Wilms, B. Weigand. Composition measurements of binary mixture droplets by rainbow refractometry [J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(11): 2109~2118
- J. B. A. Card, A. R. Jones. An exploration of the potential use of a CCD camera for absorption spectroscopy in scattered light at the rainbow [J]. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2003, **36**(3): 236~243
- S. Saengkaew, T. Charinpanikul, C. Laurent. Processing of individual rainbow signals [J]. *Exp. Fluids*, 2010, **48**(1): 111~119
- N. Roth, Klaus Anders, Arnold Frohn. Refractive-index measurements for the correction of particle sizing methods [J]. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(33): 4960~4965
- A. J. P. A. J. van Beeck, M. L. Riethmuller. Nonintrusive measurements of temperature and size of single falling raindrops [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(10): 1633~1639
- Zhao Jianlin, Peng Tao, Ye Zhijun. Hot-image effects in high-power solid-state laser systems [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007,

- 34**(10): 1315~1322
赵建林, 彭涛, 叶知隽. 高功率固体激光系统中的“热像”效应 [J]. 中国激光, 2007, **34**(10): 1315~1322
- 14 Wu Zhensen, Guo Lixin, Han Xiang'e *et al.*. Measurement of infinite cylindrical diameter by angular frequencies of rainbow intensities [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(11): 1538~1543
吴振森, 郭立新, 韩香娥等. 利用彩虹强度角谱分布对圆柱直径的测量[J]. 光学学报, 2000, **20**(11): 1538~1543
- 15 Pan Qi. Study on Non-Intrusive Rainbow Measurement [D]. Nanjing: Southeast University, 2010
潘琦. 非接触式彩虹测粒技术研究[D]. 南京: 东南大学, 2010
- 16 Craig F. Bohren, Donald R. Huffman. Absorption and Scattering of Light by Small Particles [M]. New York: John Wiley & Sons, 1957. 136~156
- 17 R. T. Wang, H. C. van de Hulst. Rainbows; Mie computations and the Airy approximation [J]. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(1): 106~117
- 18 P. Laven. Simulation of rainbows, coronas and glories using Mie theory and the Debye series [J]. *J. Quant. Spectrosc. & Rad.*, 2004, **89**(1-10): 257~269
- 19 Renxian Li, Xiang Han, Huifen Jiang. Debye series for light scattering by a multilayered sphere [J]. *Appl. Opt.*, 2006, **45**(6): 1260~1270
- 20 J. Hom, N. Chigier. Rainbow refractometry: simultaneous measurement of temperature, refractive index, and size of droplets [J]. *Appl. Opt.*, 2002, **41**(10): 1899~1907

栏目编辑: 李文喆