

Rytov 相位结构函数二次近似和硬边光阑复高斯函数展开近似的验证

李晓庆^{1,2} 赵琦³ 季小玲^{1*}

(¹ 四川师范大学物理学院, 四川 成都 610068; ² 四川大学物理科学与技术学院, 四川 成都 610064)

³ 西南技术物理研究所, 四川 成都 610041

摘要 以受光阑限制的高斯光束在大气湍流中传输为例,用仿真程序数值模拟方法和实验方法对用 Rytov 相位结构函数二次近似和复高斯函数展开法得到的解析结果(如光强分布、二阶矩束宽、桶中功率和 β 参数)进行了比较验证。研究表明,解析结果与数值模拟结果和实验结果基本吻合。此外,对用不同研究方法所得结果的差异给出了合理的解释。

关键词 大气光学;解析方法;数值模拟方法;实验方法;Rytov 相位结构函数二次近似;复高斯函数展开法

中图分类号 TN012 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.1201002

Confirmation of the Quadratic Approximation of Rytov Phase Structure Function and the Approximation of Complex Gaussian-Function Expansion of Hard-Edge Apertures

Li Xiaoqing^{1,2} Zhao Qi³ Ji Xiaoling^{1*}

(¹ Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan 610068, China)
(² Department of Physics, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)
(³ Southwest Institute of Technical Physics, Chengdu, Sichuan 610041, China)

Abstract The propagation of truncated Gaussian beams through atmospheric turbulence is taken as an example. The analytical results (i. e., the intensity distribution, the second-moment beam width, power in the bucket and β parameter), which are obtained by using the quadratic approximation of Rytov's phase structure function and complex Gaussian expansion method, are compared with those obtained by using numerical simulation and experimental methods. It is shown that the analytical results are nearly in agreement with those obtained by using numerical simulation and experimental methods. In addition, reasonable explanations to differences between different methods are also given.

Key words atmospheric optics; analytical method; numerical simulation method; experimental method; quadratic approximation of Rytov's phase structure function; complex Gaussian-function expansion method

OCIS codes 010.1290; 140.0140; 000.4430

1 引 言

研究激光束的大气传输特性对遥感、跟踪和远距离光通信以及某些军事等应用都有十分重要的意义^[1]。湍流介质中光传输的研究方法主要包括数值

求解方法、解析方法和实验方法^[2]。由于解析结果具有形式简洁、物理意义明确以及便于研究基本规律等突出优点,使得解析方法成为研究激光束湍流大气传输基础理论的重要方法。Rytov 相位结构函

收稿日期: 2011-04-29; 收到修改稿日期: 2011-06-27

基金项目: 国家自然科学基金(61178070)、中国科学院大气成分与光学重点实验室开放课题基金(JJ-10-08)和四川师范大学校科研基金(10DXL01)资助课题。

作者简介: 李晓庆(1984—),女,硕士,助教,主要从事激光传输方面的研究。E-mail: lixiaoling912@163.com

* 通信联系人。E-mail: jixl100@163.com

数二次近似是常采用的解析研究方法之一,但该近似方法的适用性一直是学者们争论的焦点。迄今为止,对该近似方法的实验验证涉及甚少^[3]。

实际的激光在产生和传输过程中,都或多或少地要受到光阑的限制。对硬边光阑,通常是直接从菲涅耳衍射积分出发作数值积分。然而,积分核中存在的高频振荡因子使计算中耗时很多。目前,已发展了多种快速算法,包括复高斯函数展开法^[4]、矩阵表示法^[5]和模式展开法^[6]等,其中复高斯函数展开法是应用最广泛的方法^[4,7,8]。复高斯函数展开法实际是一种将硬边光阑窗口函数表示为有限项复高斯函数的线性叠加的近似方法。但是,目前该近似方法仅通过直接积分法进行了验证^[3,6],没有实验验证。

本文采用 Rytov 相位结构函数二次近似和复高斯函数展开法,给出了受光阑限制的高斯光束在大气湍流中传输的平均光强、二阶矩束宽、桶中功率(PIB)以及 β 参数的解析公式。采用仿真程序数值模拟结果和实验结果对解析结果的正确性进行验

证,并对主要结论给出了合理的解释。

2 解析公式

直角坐标系中,束腰宽度为 w_0 的高斯光束通过 $z=0$ 处的一方形光阑。光阑边长半宽度均为 a ,其窗口函数可表示为

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & |x|, |y| \leq a \\ 0 & |x|, |y| > a \end{cases} \quad (1)$$

根据 Wen 等^[4]的研究,(1)式可展开为有限项复高斯函数的线性叠加,即

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N F_i F_m \exp\left(-\frac{G_i x^2 + G_m y^2}{a^2}\right), \quad (2)$$

式中 N 为硬边光阑窗口函数表示为复高斯函数的展开式项数, F_s 和 G_s ($s = i, m$) 是复常数,它们可由计算机优化得到;当 $N = 10$ 时, F_s 和 G_s 的取值可参考文献^[4]中表 1。

根据广义惠更斯-菲涅耳原理,截断高斯光束通过大气湍流传输在 z 平面的平均光强为^[1]

$$\langle I(\mathbf{r}, z) \rangle = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a d^2 \mathbf{r}'_1 \int_{-a}^a \int_{-a}^a d^2 \mathbf{r}'_2 W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, z=0) \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) \cdot \mathbf{r} - 2\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)]\right\} \times \\ \langle \exp[\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_1) + \psi^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_2)] \rangle_m, \quad (3)$$

式中 $\mathbf{r}' = (x', y')$, $\mathbf{r} = (x, y)$; $k = 2\pi/\lambda$ 是光波数(λ 是光波波长); $W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, z=0)$ 为高斯光束在 $z=0$ 平面的交叉谱密度函数; $\psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}, z)$ 为大气湍流对球面波影响的随机相位因子, $\langle \rangle_m$ 表示系综平均,采用 Rytov 相位结构函数的二次近似,可以表示为^[9]

$$\langle \exp[\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_1) + \psi^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_2)] \rangle \cong \exp[-\rho_0^{-2}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)^2], \quad (4)$$

式中 $\rho_0 = (0.545C_n^2 k^2 z)^{-3/5}$, ρ_0 为球面波通过大气湍流的相干长度, C_n^2 是折射率结构常数,它表征湍流的强弱。

将(4)式代入(3)式,积分后可以得到平均光强 $\langle I(x, y, z) \rangle$ 的解析表达式,进一步还可以得到描述远场光束质量参数,如二阶矩束宽 $w(z)$ 、 W_{PIB} 以及 β 参数的解析公式,即

$$\langle I(x, y, z) \rangle = \frac{k}{2z} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{F_i F_j^* F_m F_n^*}{PQ} \exp\left[-\frac{k^2 R}{4Q^2 z^2} x^2 - \frac{k^2}{4P^2 z^2} \left(\frac{G_m + G_n}{w_0^2 \delta^2} + \frac{2}{w_0^2}\right) y^2\right], \quad (5)$$

$$w^2(z) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}^2 \langle I(x, y, z) \rangle dx dy / \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle I(x, y, z) \rangle dx dy = \frac{8z^2}{k^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_i F_j^* Q^2 R^{-3/2} / \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_i F_j^* R^{-1/2}, \quad (6)$$

$$W_{\text{PIB}} = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \langle I(x, y, z) \rangle dx dy / \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle I(x, y, z) \rangle dx dy = \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_i F_j^* R^{-1/2} f_{\text{erf}} \left[\frac{ka}{2Qz} R^{1/2} \right] / \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_i F_j^* R^{-1/2} \right\}^2, \quad (7)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{A}{A_0}}, \quad (8)$$

式中

$$Q = \left[\frac{G_i G_j^*}{\omega_0^4 \delta^4} + \left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \right) \left(\frac{G_i + G_j^*}{\omega_0^2 \delta^2} \right) + \frac{ik}{2z} \left(\frac{G_i - G_j^*}{\omega_0^2 \delta^2} \right) + \frac{1}{\omega_0^4} + \frac{2}{\omega_0^2 \rho_0^2} + \frac{k^2}{4z^2} \right]^{1/2}, \quad (9)$$

$$R = \frac{G_i + G_j^*}{\omega_0^2 \delta^2} + \frac{2}{\omega_0^2}. \quad (10)$$

将(9)式中的 i, j 用 m, n 代替即为(5)式中的 P ; (8)式中 A 和 A_0 分别为湍流与自由空间中 $W_{\text{PIB}} = 63\%$ 时对应面积; f_{erf} 为误差函数, $\delta = a/\omega_0$ 为截断参数。(5)~(8)式分别与文献[10]中(9), (13), (16)和(18)式当相干参数 $\alpha \rightarrow \infty$ 时的结果相一致。

3 解析结果与数值模拟结果和实验结果的比较

3.1 解析结果与数值模拟结果的比较

仿真程序数值模拟的出发点是光传播的麦克斯韦波动方程,并且采用相位屏理论来处理激光在大

气湍流中传输。首先把传输路径 z 分为 n 段,每一段传输距离为 $\Delta z = z/n$ 。在每一段中,近似将本段大气湍流对传输光束的影响作为一个放在中间的薄相位屏,即将 z_n 到 $z_{n+1} = z_n + \Delta z$ 这一过程分为三个阶段:1)光场先是在自由空间自由传输了 $\Delta z/2$ 的距离;2)大气湍流引入的相位畸变对光束产生的位相影响(薄相位屏);3)光场再次在自由空间自由传输 $\Delta z/2$ 的距离。

湍流引起的相位畸变可以表示为^[11,12]

$$\delta\phi = \frac{k}{2} \Delta z \delta\bar{E}, \quad (11)$$

式中

$$\delta\bar{E} = \left(\frac{2\pi}{\Delta z} \right)^{1/2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \exp[i(k_x x + k_y y)] a(k_x, k_y) \Phi_n^{1/2}(k_x, k_y, 0) dk_x dk_y, \quad (12)$$

式中 $a(k_x, k_y)$ 是二维复高斯随机数; Φ_n 是湍流功率谱密度函数,通常使用 Von Karman 谱:

$$\Phi_n(k) = 0.033 C_n^2 (k_0^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_m^2)^{-11/6} \exp(k/k_m), \quad (13)$$

式中 $k_0 = 2\pi/L_0$, $k_m = 5.92/l_0$, L_0 与 l_0 分别是湍流外尺度和湍流内尺度。

对(12)式进行离散变换得到

$$\delta\phi(p\Delta x, q\Delta y, z) = \frac{2k\pi}{N} \left(\frac{0.033\pi\Delta z C_n^2}{\Delta x\Delta y} \right)^{1/2} \times \sum_{m=-N/2+1}^{N/2-1} \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} \frac{\exp\left[i\left(\frac{2\pi m}{N}p + \frac{2\pi n}{N}q\right)\right] [a_1(m, n) + ia_2(m, n)]}{\left[\left(\frac{2\pi}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m}{N\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{N\Delta y}\right)^2\right]^{11/12}}, \quad (14)$$

式中 $a_1(m, n)$ 和 $a_2(m, n)$ 为方差为 1 的高斯分布函数, N 为取样点个数, $p\Delta x, q\Delta x$ 是空间位置坐标。

本文数值计算模拟程序由 Mathematica 编译。在程序中,光束在 $z = 0$ 平面的截断是通过 Mathematica 一个选择语句,即 $E(x, y, 0) \text{if}[x \leq a \& \& y \leq a, 1, 0]$ [$E(x, y, 0)$ 为初始光场] 来实现的。数值计算参数为: $\omega_0 = 0.05 \text{ m}$, $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$, $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ 。

图 1 为数值模拟的平均光强的三维分布图及等高线图,图 1(a)~(c)对应无截断($\delta \rightarrow \infty$)情况,图 1(d)~(f)对应有截断($\delta = 0.8$)情况。从图 1 可知,经过自由空间传输一段距离($z = 3000 \text{ m}$),无截

断高斯光束仍能保持初始场的高斯分布[图 1(b)],截断高斯光束则出现旁瓣[图 1(e)]。而图 1(c), (f)由于湍流的影响则出现不规则分布。

图 2~4 分别为二阶矩束宽 $w(z)$, 桶中功率 W_{PIB} 以及 β 参数的解析结果与数值模拟结果的对比图。从图 2~4 可以看出,有湍流时数值模拟曲线出现小的波动,而解析结果曲线则是相对平滑的;但是两者描述的激光束传输的有关基本规律则是一致的,如相对二阶矩束宽均随传输距离增大而增大, W_{PIB} 随截断参数增大而增大, β 参数随截断参数的变化为非单调的。

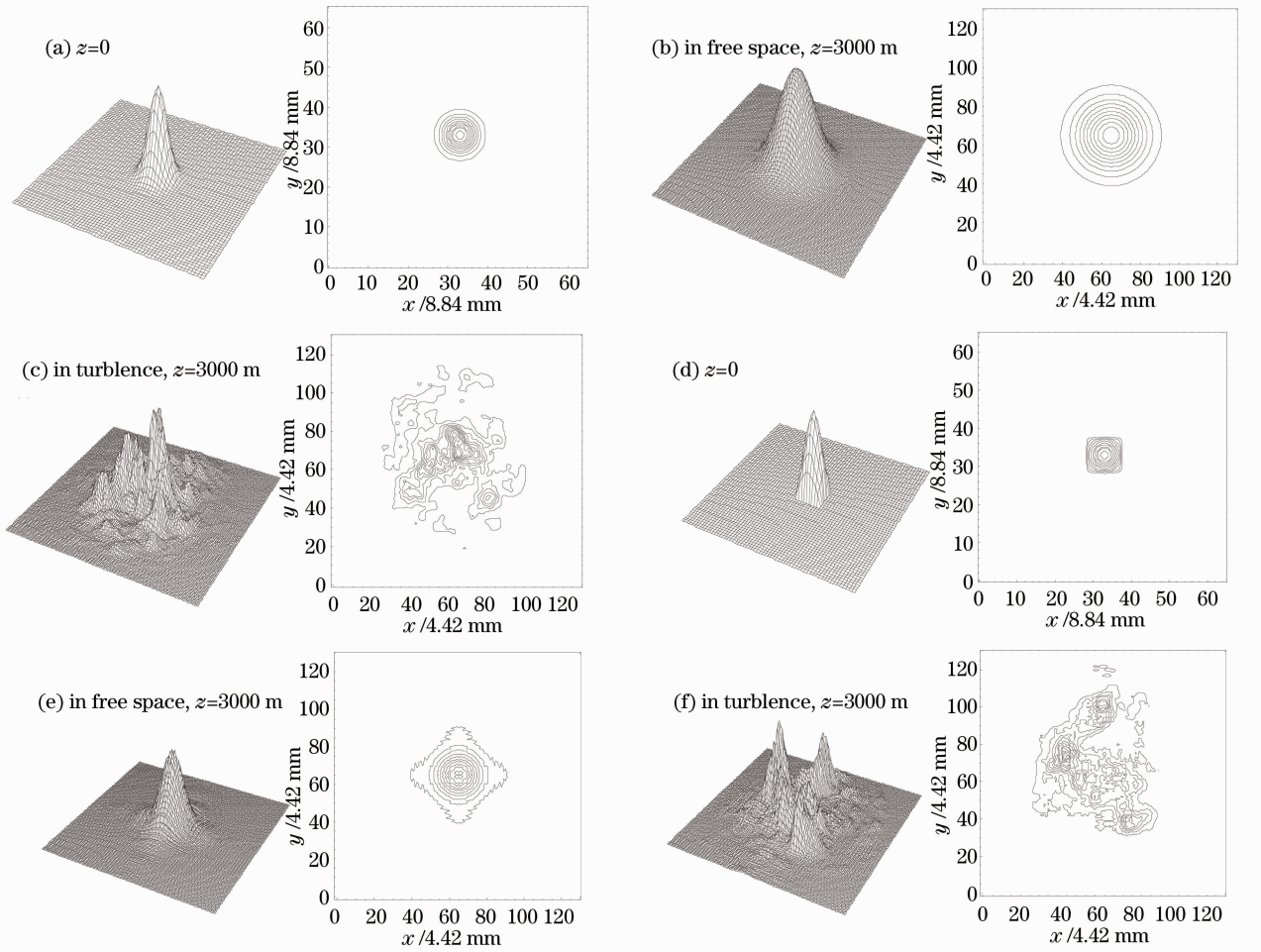


图 1 仿真程序模拟的截断高斯光束的平均光强。(a)~(c) $\delta \rightarrow \infty$; (d)~(f) $\delta = 0.8$

Fig. 1 Average intensity of truncated Gaussian beam obtained by simulation. (a)~(c) $\delta \rightarrow \infty$; (d)~(f) $\delta = 0.8$

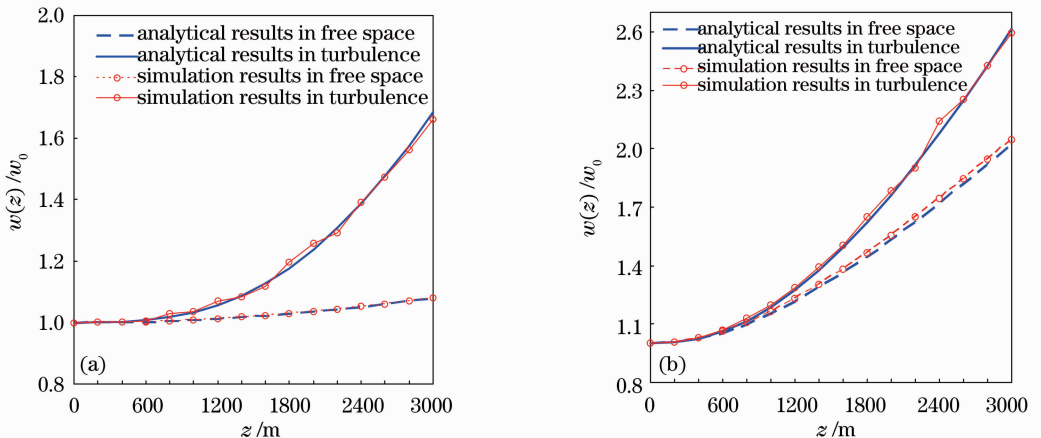


图 2 二阶矩束宽的比较。(a) $\delta \rightarrow \infty$; (b) $\delta = 0.8$

Fig. 2 Comparison of the second-moment beam width. (a) $\delta \rightarrow \infty$; (b) $\delta = 0.8$

在自由空间中,非截断光束的数值模拟与解析结果的两条曲线符合得非常好[图 2(a),图 3(a)],但截断光束数值模拟结果与解析结果则不完全重合[图 2(b),图 3(b)].这是由于硬边衍射效应的存在,使得光场在横截面上分布趋于无穷远,而在做数

值模拟时只能取有限的横向尺度。在大气湍流中,图 2~4 均表明,数值模拟结果与解析结果所表征的规律是一致的,但数值模拟曲线出现波动,两者有一定的差异。这主要有以下几方面的原因:1)湍流效应是通过有限个随机相位屏来描述实现的;2)对于仿

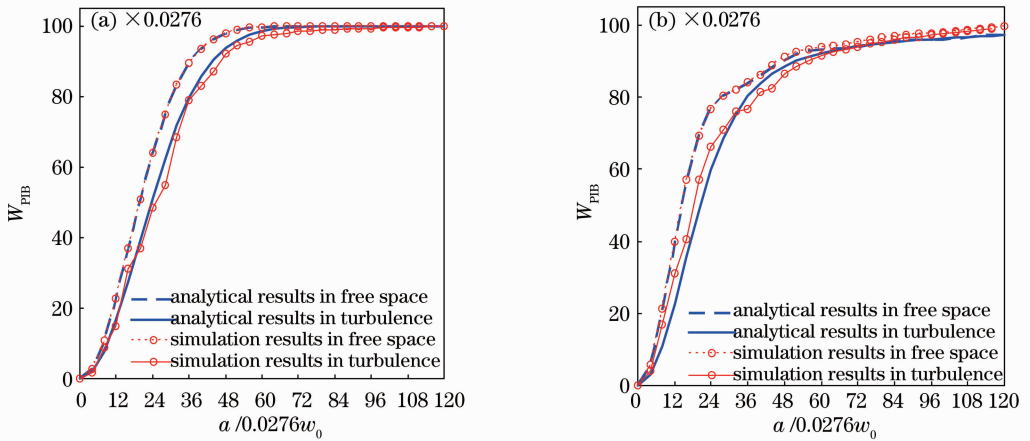

 图 3 桶中功率的比较, $z=2000$ m。(a) $\delta \rightarrow \infty$; (b) $\delta=0.5$

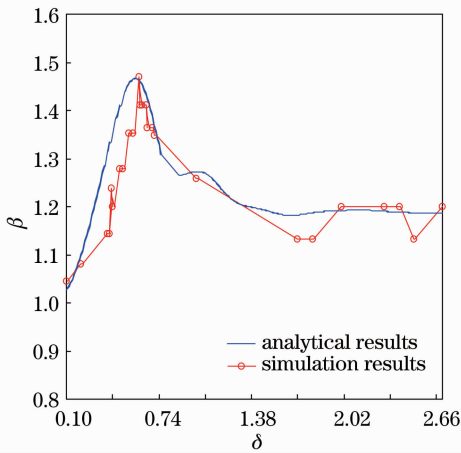
 Fig. 3 Comparison of power in the bucket, $z=2000$ m. (a) $\delta \rightarrow \infty$; (b) $\delta=0.5$

 图 4 β 参数的比较, $z=2000$ m

 Fig. 4 Comparison of β parameter, $z=2000$ m

真程序来说,模拟次数越多,模拟结果越接近解析结果值。在文献[13]中提出模拟次数为 2000 次,但是这样会大大增加计算机的计算量。限于计算条件以及为节约机时,本文图 2 模拟次数为 100 次,图 3,4 模拟次数为 20 次;3)图 4 中产生误差除了以上两个原因外,还有一个重要的原因就是数值模拟总是离散的,而 β 参数的定义是湍流与自由空间中 $W_{\text{PIB}} = 63\%$ 时对应面积之比。因此,数值模拟中并不总是刚好有一个点对应 $W_{\text{PIB}} = 63\%$,这样就产生了误差,但数值模拟结果能给出 β 参数变化的总体趋势。

3.2 解析结果与激光大气传输的相关实验结果的比较

在本实验中,激光器光斑出口腰斑半径为 $w_0 = 0.0175$ m,且光场为类高斯分布;光相干性很好(即完全相干);发射频率为 3 Hz;脉宽为 10 ns;能量为 120 mJ;光束波长为 $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$;光斑发射角小于 0.2 mrad。波前畸变运用 Shack-Hartman 测量,波

前畸变大于 $\lambda/8$;运用光斑漂移测量得到 $C_n^2 = 6.5 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ 。采集条件为 CCD 镜头动态范围 200 倍,采集频率 10 Hz(漫反射靶为标准漫反射材料构成)。运用 GPS 测量,测量误差和实际选点误差之间小于 5 m,能见度 $V = 8$ km。图 5 为本实验的探测示意图。

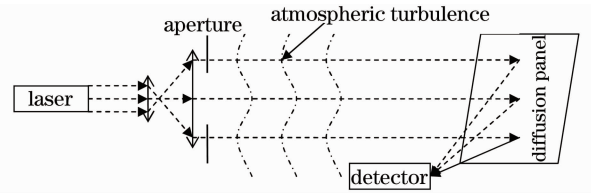


图 5 实验探测示意图

Fig. 5 Schematic diagram of experimental detection

图 6 是在实验中的光斑采样图。从图 6 可以看出,出口光斑图样保持圆形的分布[图 6(a)];当经过一定传输距离后,无论截断还是非截断光束都由于湍流的影响光斑呈不规则分布[图 6(b)~(d)],并且图 6(b)~(d)还表明大气湍流和光阑效应均造成光束扩展。图 7 为二阶矩束宽的解析结果和实验结果的对比。实验中二阶矩束宽的确定:按照二阶矩束宽的定义式[即(6)式第一等式],将积分离散化后用求和计算。二阶矩束宽的积分(即求和)限取为光斑探测范围的边界,在 CCD 高动态范围的情况下误差较小。对于光强,不能够得到光场绝对能量的测量值,而是由 CCD 所采集的光斑的不同灰度值给出相对能量,代入求和计算得到二阶矩束宽。此外,测量前对 CCD 均匀性进行了校准并且通过多次测量取平均减小误差。图 7 表明,不同截断参数的二阶矩束宽解析结果与实验结果的基本规律一致,两者相差并不大。实验误差主要来自两方面:1)实验方法不能计算出测量的绝对能量,只能测量光斑分

布给出相对能量,并通过多次测量取平均减小误差;
2)虽然本实验激光功率较低,但除湍流造成激光束扩展外,激光与大气的非线性效应(如热晕等)也会

对激光传输特性产生一定影响。因此,在考虑实验误差的情况下,解析结果与实验结果是符合得比较好的。

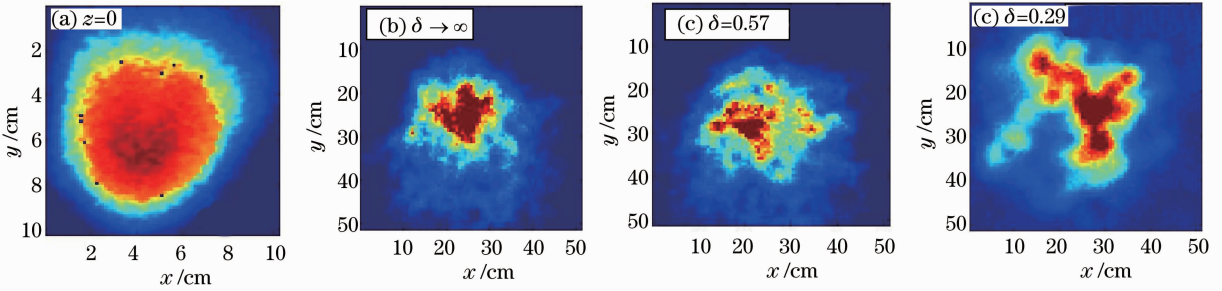


图 6 光斑的采集图样。(a) $z=0$; (b)~(d) $z=1400$ m

Fig. 6 Collection of spot patterns. (a) $z=0$; (b)~(d) $z=1400$ m

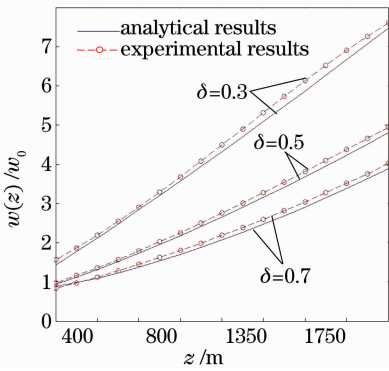


图 7 二阶矩束宽的比较

Fig. 7 Comparison of the second-moment beam width

4 结 论

本文以受光阑限制的高斯光束在大气湍流中传输为例,用仿真程序数值模拟方法和实验方法对用 Rytov 相位结构函数二次近似和复高斯函数展开法得到的解析结果进行比较验证。研究表明:在自由空间中,非截断光束的解析结果与仿真程序模拟结果符合得非常好。在湍流中,由于在模拟程序中对湍流相位屏的处理引入了随机相位以及数值模拟的次数有限而产生了一定的波动,但是解析结果与数值模拟结果的规律是一致的。另外,在考虑实验误差的情况下,截断光束在大气湍流中传输的解析结果与实验结果也符合得比较好。因此,可以确认采用 Rytov 相位结构函数二次近似以及复高斯展开法解析地研究截断光束通过大气湍流的传输特性(如光强分布、二阶矩束宽、桶中功率和 β 参数)是合理的,所得出的解析结果是可靠的。

参 考 文 献

1 L. C. Andrews, R. L. Phillips. Laser Beam Propagation

through Random Media [M]. Bellingham, Bellingham: SPIE Press, 1998
2 Rao Ruizhong. Light Propagation in the Turbulent Atmosphere [M]. Hefei: Anhui Science and Technology Press, 2005
饶瑞中. 光在湍流大气中的传播[M]. 合肥:安徽科学技术出版社,2005
3 J. C. Leader. Atmospheric propagation of partially coherent radiation [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1978, **68**(2): 175~185
4 J. J. Wen, M. A. Breazeale. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams [J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988, **83**(5): 1752~1756
5 F. Bloisi, L. Vicari. Diffraction field of a circularly symmetric beam through a sequence of apertures [J]. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(13): 1595~1597
6 K. Tanaka, K. Yoshida, M. Taguchi. Analytical and experimental investigation of the diffraction field of a Gaussian beam through a sequence of apertures; applicability of the beam mode expansion method [J]. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(7): 1310~1312
7 D. S. Ding, X. J. Liu. Approximate description for Bessel, Bessel-Gauss, and Gaussian beams with finite aperture [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1999, **16**(6): 1286~1293
8 Y. Cai, X. Lü, H. T. Eyyuboglu *et al.*. Paraxial propagation of a partially coherent flattened Gaussian beam through apertured ABCD optical systems [J]. *Opt. Commun.*, 2008, **281**(12): 3221~3229
9 S. C. H. Wang, M. A. Plonus. Optical beam propagation for a partially coherent source in the turbulent atmosphere [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(9): 1297~1304
10 X. L. Ji, G. M. Ji. Effect of turbulence on the beam quality of apertured partially coherent beams [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2008, **25**(6): 1246~1251
11 J. A. Flerk, Jr., J. R. Morris, M. D. Feit. Time-dependent propagation of high energy lasers beams through atmosphere [J]. *Appl. Phys.*, 1976, **10**(2): 129~160
12 Jiang Shaoen, Sun Jingwen. Simulation and analysis of nonlinear effect of laser atmospheric propagation [J]. *Chinese J. Lasers*, 1996, **23**(2): 144~150
江少恩, 孙景文. 激光大气传输非线性效应数值模拟与分析 [J]. *中国激光*, 1996, **23**(2): 144~150
13 Qian Xianmei, Zhu Wenyue, Huang Yingbo *et al.*. Selection of computing parameters in numerical simulation of laser beam propagation in turbulent atmosphere [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(10): 1986~1991
钱仙妹, 朱文越, 黄印博等. 激光湍流大气传输数值模拟中计算参数的选取 [J]. *光子学报*, 2008, **37**(10): 1986~1991

栏目编辑: 谢 婧