

# 分数域滤波的分数傅里叶变换光学成像性能分析

张静静 江月松 何云涛 刘 丽 王 静

(北京航空航天大学电子信息工程学院, 北京 100191)

**摘要** 将分数域滤波同光学成像相结合,提出了一种基于 Lohmann I型的带有滤波孔径的两级联分数傅里叶变换光学成像系统。根据分数傅里叶变换和菲涅耳衍射之间的关系以及分数傅里叶变换的分数阶可加性,结合分数域滤波分析了分数傅里叶变换光学成像的基本理论。以点扩散函数和调制传递函数作为评价成像质量的准则,详细分析了不同分数阶光学系统对遥远物体的成像性能以及滤波孔径和光瞳的相对大小对成像质量的影响,并将其同传统的傅里叶光学成像进行比较。结果表明,某些分数域滤波的分数傅里叶变换光学成像系统成像性能优于传统的傅里叶光学成像,可以获得更高的分辨率。

**关键词** 光学成像;分数傅里叶变换;分数域滤波;性能分析

**中图分类号** O438.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.1111003

## Performance Analysis of Fractional Fourier Transform Optical Imaging Based on Fractional Fourier-Domain Filtering

Zhang Jingjing Jiang Yuesong He Yuntao Liu Li Wang Jing

(School of Electronic Information Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

**Abstract** Combining fractional Fourier-domain filtering with optical imaging, a two cascade fractional Fourier transform (FRFT) optical imaging system with filtering aperture is proposed, which is based on Lohmann I single-lens system. Firstly, the basic theory of the FRFT optical imaging combined with the fractional Fourier-domain filtering is discussed according to the relation between FRFT and Fresnel diffraction as well as fractional additivity of FRFT. Then, imaging performance for distant objects is discussed in terms of different orders, the relative sizes of filtering aperture and pupil, based on the point spread function (PSF) and modulation transfer function (MTF). The results show that, compared with the traditional Fourier optical imaging, some FRFT optical imaging systems based on fractional Fourier-domain filtering have better imaging performance and higher resolution.

**Key words** optical imaging; fractional Fourier transform; fractional Fourier-domain filtering; performance analysis

**OCIS codes** 110.2990; 070.2575; 070.6110; 110.2960

## 1 引 言

分数傅里叶变换(FRFT)是傅里叶变换的补充和完善,是傅里叶变换在分数级次上的推广。作为一种广义的傅里叶分析方法,它展现出了研究对象从纯空域变换到纯频域的所有变换特征,有利于信号的实时处理。由于分数傅里叶变换和傅里叶变换的不同之处只在于其基变函数不同,而变换操作是

一致的,因此在发展已相当完善的使用傅里叶变换的任何领域都存在用分数傅里叶变换拓展和改善的可能<sup>[1,2]</sup>。

1993年,Lohmann<sup>[3]</sup>给出了实现分数傅里叶变换的单透镜和双透镜结构,从此,分数傅里叶变换引起了光学界的广泛关注,成为了信息光学领域的热点。人们对其光学实现<sup>[4~7]</sup>和光学应用等方面进行

**收稿日期**: 2011-04-26; **收到修改稿日期**: 2011-06-01

**基金项目**: 国家 973 计划(2011CB707001)资助课题。

**作者简介**: 张静静(1984—),女,硕士研究生,主要从事分数傅里叶光学成像方面的研究。E-mail: allienzhang@163.com

**导师简介**: 江月松(1959—),男,博士,教授,主要从事红外、光电子、激光及其成像与探测技术等方面的研究。

E-mail: yuesongjiang@buaa.edu.cn

了研究。目前,分数傅里叶变换在光学中的应用主要体现在光学模糊识别<sup>[8]</sup>、光束传输<sup>[9~12]</sup>、全息<sup>[13,14]</sup>以及分数域滤波<sup>[15,16]</sup>等方面,对于其光学成像系统的具体应用以及成像质量的分析未见研究。

本文结合分数傅里叶变换光学成像的基本理论以及分数域滤波理论,提出了一种基于 Lohmann I 型的带有滤波孔径的两级联分数傅里叶变换光学成像系统,并仿真实现了光学分数傅里叶变换的数值计算。将以上光学成像系统对遥远的物体进行成像,通过理论分析和仿真讨论,详细分析了不同分数阶次、不同大小的滤波孔径下光学成像系统的成像性能,并与传统傅里叶光学成像进行比较。

## 2 分数域滤波的分数傅里叶变换光学成像理论

### 2.1 分数傅里叶变换光学成像理论

经过一定的尺度变换,常规傅里叶变换可以表示光波的夫琅禾费衍射,与其类似,经过一定的尺度变换,分数傅里叶变换也可表示光波的非涅耳衍射传播过程,基于这一思想,人们已导出了实现任意阶分数傅里叶变换的单透镜系统<sup>[6]</sup>。Lohmann 所给出的第一类光学分数傅里叶变换装置是单透镜分数傅里叶变换系统的特例,如图 1 所示。

输入面到透镜的距离和输出面到透镜的距离相等,用  $z$  来表示:

$$z = f_1 \tan \frac{\theta}{2}, \quad f = f_1 / \sin \theta, \quad (1)$$

式中  $f_1$  称为标准焦距,  $f$  为透镜的焦距,  $\theta = p\pi/2$ ,  $p$  为分数阶次。若物函数为  $f(s)$ , 波长为  $\lambda$ , 则根据

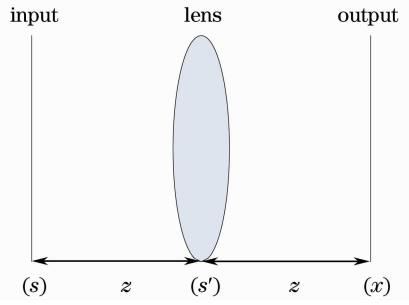


图 1 Lohmann I 单透镜系统

Fig. 1 Lohmann I single-lens system

Lohmann<sup>[3]</sup>的定义,光学分数傅里叶变换的表达式为

$$\mathcal{F}^p [f(s)] = \int f(s) \exp \left[ i \frac{\pi \cot \theta}{\lambda f_1} (s^2 + x^2) \right] \times \exp \left( -i \frac{2\pi \csc \theta}{\lambda f_1} sx \right) ds. \quad (2)$$

由(2)式可知,当  $p = 1$ , 即  $\theta = \pi/2, z = f$ , 光学分数傅里叶变换即为常规傅里叶变换;当  $p = 2$  时, 可得  $\theta = \pi, z = 2f$ , 此时有  $g(x) = f(-s)$ , 即物函数的 2 阶分数傅里叶变换为物函数本身, 只发生了坐标反演。因此, 对于图 1 所示的成像系统, 当  $z = 2f$  时, 输出面即为物函数本身, 但是由单个透镜所成的像总是不完善的, 这是由于所成像的振幅分布中具有二次相位项在物振幅分布中是不存在的, 因此一个一般的成像系统, 它可能由几个透镜组成, 系统最终给出一个实像, 而分数傅里叶变换的一个重要性质为分数阶可加性, 即

$$\mathcal{F}^\alpha \{ \mathcal{F}^\beta [f(x, y)] \} = \mathcal{F}^{\alpha+\beta} [f(x, y)], \quad (3)$$

这里  $\alpha, \beta$  都是实数。因此, 可以通过分数傅里叶变换的级联来实现完善的像。图 2 为基于 Lohmann I 型单透镜系统的两级联分数阶光学成像系统。

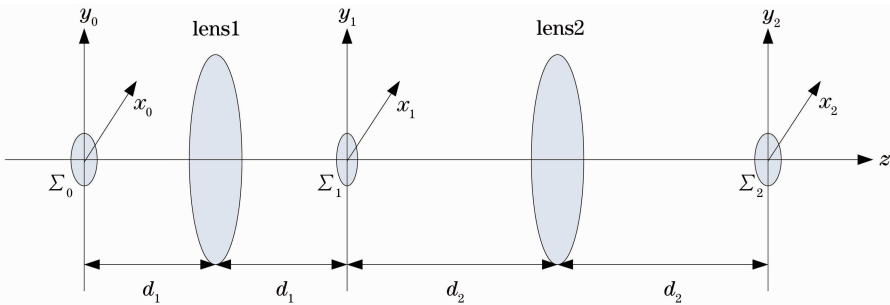


图 2 分数傅里叶变换光学成像系统

Fig. 2 FRFT optical imaging system

透镜 1 和透镜 2 具有相同的焦距  $f$ ,  $\Sigma_0$  面用以模拟物体光强分布;  $\Sigma_1$  面是由  $d_1$  决定的阶次为  $p_1$  的分数傅里叶变换面,  $\Sigma_2$  面是由  $d_2$  决定的阶次为  $p_2$  的分数傅里叶变换面, 其中

$$\begin{cases} d_1 = 2f [\sin(p_1 \pi/4)]^2 \\ d_2 = 2f [\sin(p_2 \pi/4)]^2 \end{cases}. \quad (4)$$

根据以上分析, 只要满足  $d_1 + d_2 = 2f$ , 即  $p_1 + p_2 = 2$  时,  $\Sigma_2$  面即为像平面光强分布。

## 2.2 分数域滤波

分数傅里叶变换的引入使得傅里叶变换成为分数傅里叶变换的一种特殊情况,傅里叶光学中的频域也就成为分数傅里叶光学中分数域中的特殊位置。传统的滤波系统仅是在傅里叶频谱面上进行滤波,这种滤波方式不具有灵活性,而且对于一些在空域和频域中重叠的含噪信号,这种滤波方式达不到

去噪的效果。利用分数傅里叶变换,滤波操作可以在非频谱面上进行,从而大大提高了操作的自由度,而且对于空域和频域重叠的信号和噪声,在某一个分数傅里叶域中可能只有少许甚至没有重叠<sup>[2]</sup>。基于此,可以将分数域滤波同分数傅里叶变换光学成像相结合,来改善光学系统的成像质量,如图3所示。

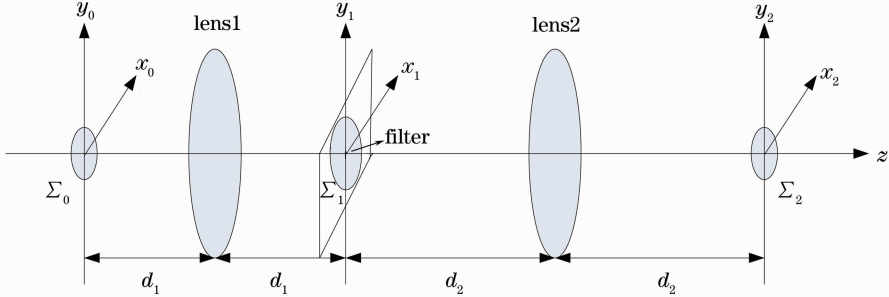


图3 分数域滤波的分数傅里叶变换光学成像系统

Fig. 3 FRFT optical imaging system with fractional Fourier-domain filtering

图3所示的分数域滤波的分数傅里叶变换光学成像系统是在图2所示的分数傅里叶变换光学系统中分数傅里叶变换面 $\Sigma_1$ 上加入了相应的滤波窗口。若输入函数为 $f(x_0, y_0)$ , $\Sigma_1$ 上的复振幅分布为 $u(x_1, y_1)$ ,则根据 Lohmann I 单透镜系统可知

$$u(x_1, y_1) = \mathcal{F}^{p_1} [f(x_0, y_0)], \quad (5)$$

若滤波孔径函数为 $l(x_1, y_1)$ ,则 $\Sigma_z$ 上的复振幅分布 $g(x_2, y_2)$ 为

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{F}^{p_2} [u(x_1, y_1)l(x_1, y_1)], \quad (6)$$

式中 $\mathcal{F}^p[\cdot]$ 表示分数阶为 $p$ 的分数傅里叶变换, $p_1$ ,

$p_2$ 的大小由 $d_1, d_2$ 的大小来决定,具体关系如(4)式所示。

将图3所示的分数域滤波的分数傅里叶变换光学成像系统应用于对遥远物体成像时,系统的点扩展函数(PSF)可表示为

$$F_{\text{PS}}(x_2, y_2) = |\mathcal{F}^{p_2} \{ \mathcal{F}^{p_1} [p(x_0, y_0)]l(x_1, y_1) \}|^2, \quad (7)$$

式中 $p(x_0, y_0)$ 为系统光瞳函数, $l(x_1, y_1)$ 为系统的滤波孔径函数,光学系统中光瞳多成圆形,半径用 $a$ 来表示,则

$$p(x_0, y_0) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x_0^2 + y_0^2} < a \\ \frac{1}{2} & \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

以圆形滤波孔径为例,其半径用 $b$ 来表示,则

$$p(x_1, y_1) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{b}\right) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x_1^2 + y_1^2} < b \\ \frac{1}{2} & \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

由傅里叶光学理论可知,调制传递函数(MTF)为 PSF 傅里叶变换的模值,即

$$F_{\text{MT}} \{x_2, y_2\} = |F[F_{\text{PS}}(x_2, y_2)]|. \quad (10)$$

## 3 光学分数傅里叶变换数值计算

利用 Lomahnn 所给出的光学分数傅里叶变换

表达式(2)式进行级联时,与分数傅里叶变换的级联特性相比存在一个常数项,即有

$$\mathcal{F}^a \{ \mathcal{F}^b [f(x, y)] \} = c \mathcal{F}^{a+b} [f(x, y)], \quad (11)$$

式中 $c$ 为复常数,虽然不会影响光场的图案分布,但会影响光场的相对强度。文献[17]中给出了一种满足级联特性的光学分数傅里叶变换表达式:

$$\mathcal{F}^p[f(s)] = \left\{ \frac{\exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]}{\lambda f_1 \sin \theta} \right\}^{1/2} \int f(s) \exp\left[i\frac{\pi \cot \theta}{\lambda f_1}(s^2 + x^2)\right] \exp\left[-i\frac{2\pi \csc \theta}{\lambda f_1}sx\right] ds. \quad (12)$$

对于(12)式, 令  $s' = \sqrt{\frac{1}{\lambda f_1}}s, x' = \sqrt{\frac{1}{\lambda f_1}}x$ , 则

$$\mathcal{F}^p[f(s')] = \left\{ \frac{\exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]}{\sin \theta} \right\}^{1/2} \int f(s') \exp[i\pi(s'^2 + x'^2) \cot \theta] \exp[-i2\pi s'x' \csc \theta] ds' = \left[ \frac{\exp(i\theta)}{i \sin \theta} \right]^{1/2} \int f(s') \exp[i\pi(s'^2 + x'^2) \cot \theta] \exp(-i2\pi s'x' \csc \theta) ds'. \quad (13)$$

将(13)式与一维函数的分数傅里叶变换定义式<sup>[18]</sup>进行比较, 除常数相位外(13)式与分数傅里叶变换的定义式完全相同, 因此可以利用分数傅里叶变换的数学变换理论来计算光学分数傅里叶变换。文献[19]中给出了一种分数傅里叶变换的快速算法:

$$\mathcal{F}^p[f(s')] = \exp\left(-i\pi x'^2 \tan \frac{\theta}{2}\right) \int f(s') \exp\left(-i\pi s'^2 \tan \frac{\theta}{2}\right) \exp[i\pi(x' - s')^2 \csc \theta] ds' = \exp\left(-i\pi x'^2 \tan \frac{\theta}{2}\right) \left\{ \left[ f(s') \exp\left(-i\pi s'^2 \tan \frac{\theta}{2}\right) \right] \otimes \left[ \exp(i\pi s'^2 \csc \theta) \right] \right\}, \quad (14)$$

符号 $\otimes$ 表示卷积运算。结合时域卷积和频域相乘的关系, 则

$$\mathcal{F}^p[f(s')] = \exp\left(-i\pi x'^2 \tan \frac{\theta}{2}\right) \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left[ f(s') \exp\left(-i\pi \tan \frac{\theta}{2} s'^2\right) \right] \mathcal{F} \left[ \exp(i\pi s'^2 \csc \theta) \right] \right\}. \quad (15)$$

通过以上分析可知, 分数傅里叶变换可以通过傅里叶变换来计算, 从而可以通过数值计算仿真实现不同阶的分数傅里叶变换。根据(15)式, 图4给出了单位冲激函数不同分数阶的分数傅里叶变换。

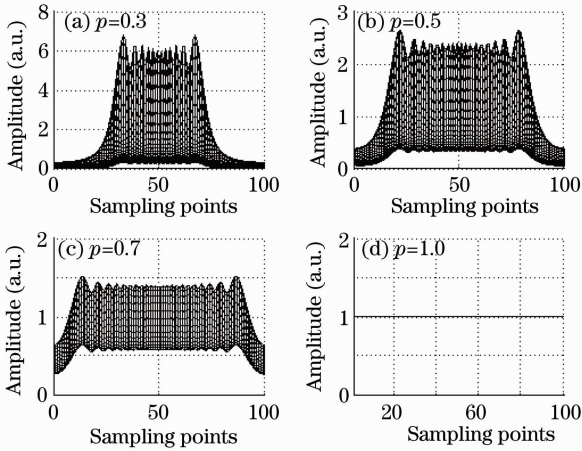


图4 单位冲激函数不同阶的分数傅里叶变换

Fig. 4 FRFT of unit impulse function under different orders

从图4可知, 当  $p=1$  时, 用该算法实现的分数傅里叶变换的结果同常规的傅里叶变换结果相同, 同时, 阶数较小的分数傅里叶变换结果所含空域信息较多, 较接近研究对象, 随着阶数的增大, 空域信息越来越少, 频域信息越来越多。

## 4 成像性能分析

望远镜系统是以平行光入射再以平行光出射的系统。最简单的望远镜至少有两个独立光组, 第一光组的像方焦点与第二光组的物方焦点重合。图5即为两凸透镜望远镜成像系统的简单示意图,  $\Sigma_0$  面为望远镜系统的光瞳面, 透镜1的像方焦点为透镜2的物方焦点。

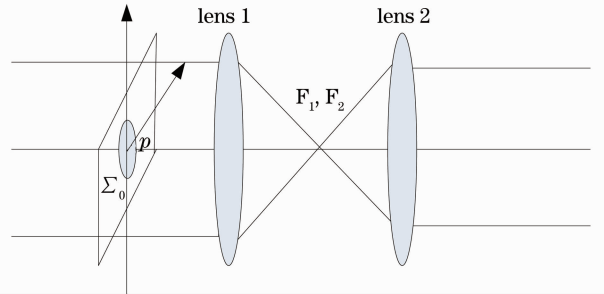


图5 两凸透镜望远镜系统成像原理图

Fig. 5 Principle of two-convex-lens telescope imaging system

由于傅里叶变换是分数傅里叶变换的一种特殊情况, 因此可以将图3所示的带有滤波孔径的分数傅里叶变换光学成像系统运用到望远镜系统中。

光学系统的成像质量主要与像差和衍射极限有关, 本文不考虑像差对成像的影响, 因此采用 PSF 和 MTF 来对系统的成像质量进行判定。所有的成像系统, 无论采用哪一种成像方法, 最终得到的目标

像都可表示为目标源的强度分布与系统 PSF 的卷积,因此成像系统的 PSF 特性越接近  $\delta$  函数,即半峰全宽 (FWHM) 越小,则系统的成像效果越佳。MTF 反映了光学系统传递信息的能力,也反映了像面上各个不同空间频率的对比度,当某频率的对比度下降到零时,说明该频率的光强分布已无亮度变化,即该频率被截至,因此 MTF 具有较高的截止频率时(主要是指“实际截止频率”),系统的成像效果较好。

根据(7)式和(10)式,从不同阶次、不同大小的滤波孔径等几方面仿真和讨论不同系统的 PSF 和 MTF,给出 FWHM 值,并与图 5 所示的传统傅里叶光学系统进行比较。光学系统中光瞳多成圆形,

半径用  $a$  来表示; $\Sigma_1$  面为滤波孔径,以圆形孔径为例,半径用  $b$  来表示。

#### 4.1 不同阶次

保持光瞳和滤波孔径大小相同,即  $a=b$ ,其余参量不变,对图 3 所示的带有滤波孔径的分数傅里叶变换光学系统进行仿真。由于分数傅里叶变换具有分数阶可加性及周期性,仅讨论  $0\sim 2$  阶的分数傅里叶变换光学系统,另外,由于篇幅的限制,仅给出了  $0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9$  阶光学系统的 FWHM 值和 MTF 曲线,并同图 5 所示的传统傅里叶光学成像系统进行比较,仿真结果如图 6~8 所示。

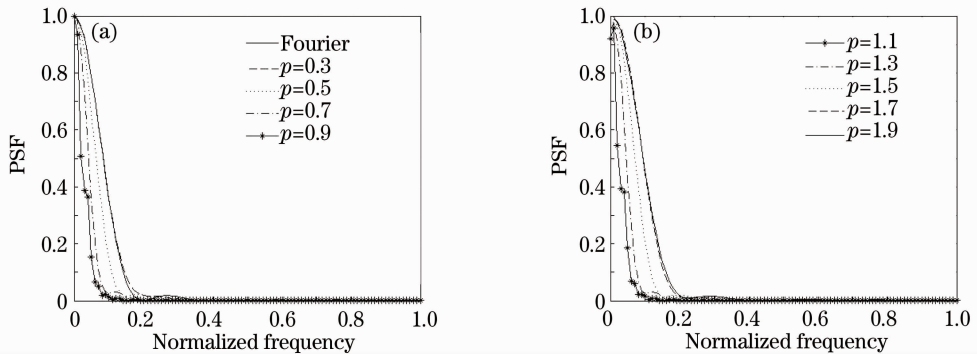


图 6 光瞳和滤波孔径大小相同时不同阶次下的 PSF 曲线。(a)传统傅里叶光学成像,  $p=0.3, p=0.5, p=0.7, p=0.9$ ;  
(b)  $p=1.1, p=1.3, p=1.5, p=1.7, p=1.9$

Fig. 6 PSF curves with different orders based on the same sizes of pupil and filtering aperture. (a) Traditional Fourier optical imagings,  $p=0.3, p=0.5, p=0.7, p=0.9$ ; (b)  $p=1.1, p=1.3, p=1.5, p=1.7, p=1.9$

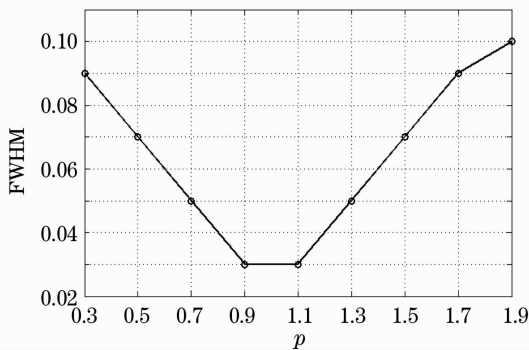


图 7 光瞳和滤波孔径大小相同时不同阶次下的 FWHM

Fig. 7 FWHM with different orders based on the same sizes of pupil and filtering aperture

从图 6~8 可以看出,  $0.9$  阶和  $1.1$  阶,  $0.7$  阶和  $1.3$  阶,  $0.5$  阶和  $1.5$  阶, 以及  $0.3$  阶和  $1.7$  阶光学系统的 FWHM 值相同, 并且 MTF 截止频率一样。因此, 当两级联分数傅里叶变换滤波系统前后分数

阶互换时对成像质量没有影响。另外对于  $0\sim 1$  阶的光学系统, 随着阶数  $p$  的不断增加, 光学系统的 PSF 主峰逐渐变窄, 到  $0.9$  阶时 PSF 主峰最窄, 而  $1$  阶时同图 5 所示的传统成像系统 FWHM 一样, 为  $0.9$  阶时的 3 倍, PSF 主峰宽于  $0.5$  阶、 $0.7$  阶和  $0.9$  阶的光学系统。从图 8 所示的 MTF 曲线中可以看出, 图 5 所示的传统成像系统具有最小的截止频率, 而  $0.9$  阶时 MTF 截止频率最大。因此, 当光瞳同滤波孔径大小一样时,  $0.9$  阶的光学系统 PSF 主峰最窄, MTF 截止频率最大, 可以获得更高的分辨率。 $0.5$  阶及  $0.5$  阶之后的光学系统优于图 5 所示的传统成像系统。

#### 4.2 不同大小的滤波孔径

保持光瞳  $a$  的大小不变, 使得滤波孔径  $b$  的大小围绕  $a$  变化, 即  $b/a$  的值发生变化, 其余参量不变, 对  $0.7$  阶的光学系统进行仿真, 不同滤波孔径的 FWHM 和 MTF 如图 9 和图 10 所示。



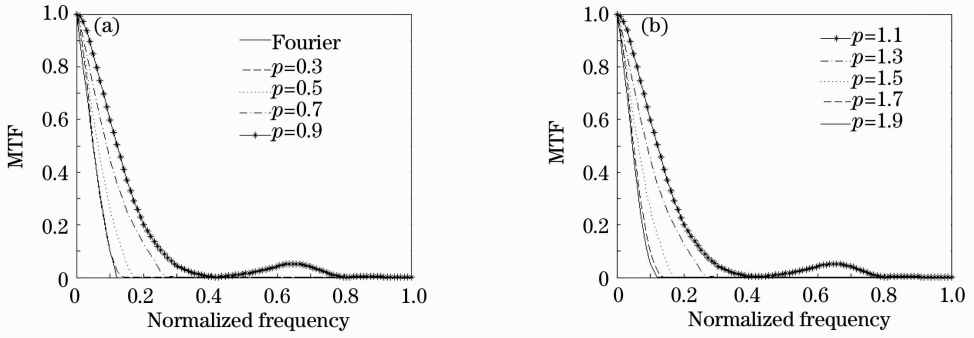


图 8 光瞳和滤波孔径大小相同时不同阶次下的 MTF 曲线。(a)传统傅里叶光学成像,  $p=0.3, p=0.5, p=0.7, p=0.9$ ;  
(b)  $p=1.1, p=1.3, p=1.5, p=1.7, p=1.9$

Fig. 8 MTF curves with different orders based on the same sizes of pupil and filtering aperture. (a) Triditional Fourier optical imagings,  $p=0.3, p=0.5, p=0.7, p=0.9$ ; (b)  $p=1.1, p=1.3, p=1.5, p=1.7, p=1.9$

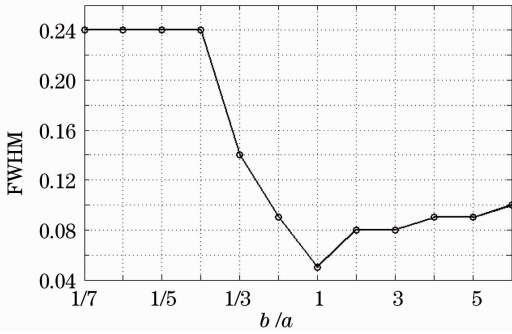


图 9 0.7 阶光学系统不同大小滤波孔径下的 FWHM  
Fig. 9 FWHM with different sizes of filtering aperture based on 0.7-order optical system

从图 9 和图 10 可以看出,对于 0.7 阶的光学系统,当滤波孔径和光瞳大小相同时,FWHM 最小,MTF 实际截止频率最大,具有较高的分辨率;当滤波孔径逐渐小于光瞳时,系统的 FWHM 逐渐增大,MTF 截止频率逐渐变小,但是,当滤波孔径减小到光瞳大小的 1/4 后再继续减小时,系统的 FWHM 保持不变,MTF 截止频率的大小也不再发生变化;当滤波孔径逐渐大于光瞳时,系统的 FWHM 也逐渐增大,MTF 截止频率逐渐变小,当滤波孔径为光瞳大小的 2 倍时,再继续变大,系统的 FWHM 变化很小,MTF 截止频率不再发生变化。

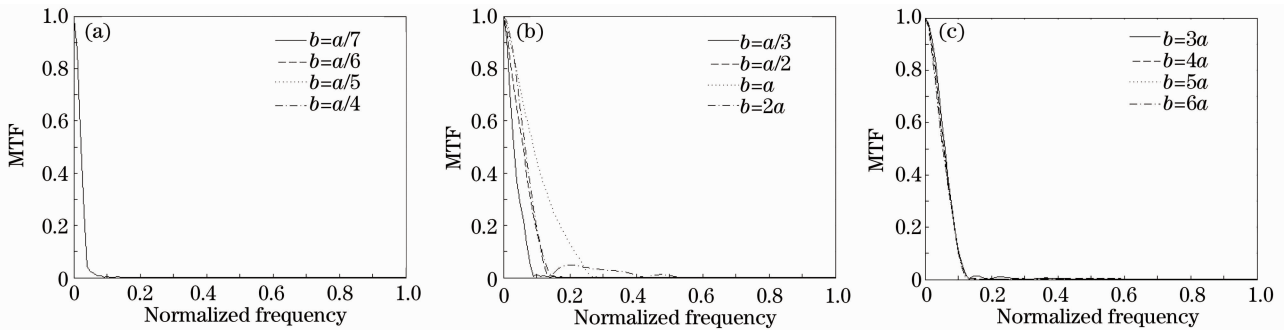


图 10 0.7 阶光学系统不同大小滤波孔径下的 MTF 曲线。(a)  $b=a/7, b=a/6, b=a/5, b=a/4$ ;  
(b)  $b=a/3, b=a/2, b=a, b=2a$ ; (c)  $b=3a, b=4a, b=5a, b=6a$

Fig. 10 MTF curves with different sizes in filtering aperture based on 0.7-order optical system. (a)  $b=a/7, b=a/6, b=a/5, b=a/4$ ,  
 $b=a/5, b=a/4$ ; (b)  $b=a/3, b=a/2, b=a, b=2a$ ; (c)  $b=3a, b=4a, b=5a, b=6a$

保持  $b/a$  的大小不变,光瞳  $a$  的大小发生变化,其余参量不变。对 0.7 阶的光学系统进行仿真,仿真结果如图 11 所示。

由图 11 可知,当光瞳和滤波孔径的相对大小一定时,光学系统的实际截止频率由光瞳  $a$  的大小决定,并随着光瞳  $a$  的增大而增大。

由以上分析可知,光瞳和滤波孔径的相对大小直接影响着光学系统的成像质量,当相对大小一定时,系统的成像质量主要由光瞳的大小决定,当光瞳大小一定时,对于某一阶次的光学系统,合理选择光瞳和滤波孔径的相对大小可以获得较好的成像效果。

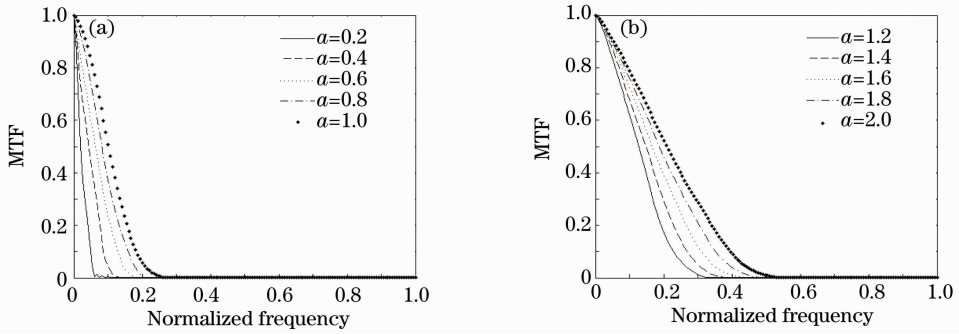


图 11 0.7 阶光学系统 MTF 曲线,  $b/a = 1/2$ 。(a)  $a = 0.2, a = 0.4, a = 0.6, a = 0.8, a = 1$ ;  
(b)  $a = 1.2, a = 1.4, a = 1.6, a = 1.8, a = 2$

Fig. 11 MTF curves based on 0.7-order optical system,  $b/a=1/2$ . (a)  $a=0.2, a=0.4, a=0.6, a=0.8, a=1$ ,  
 $a=1$ ; (b)  $a=1.2, a=1.4, a=1.6, a=1.8, a=2$

### 4.3 不同阶次光学系统最优滤波孔径的大小

保持光瞳大小  $a$  不变, 滤波孔径大小的选取依次为  $a/2, a, 2a$  和  $3a$ , 分别对 0.3, 0.5, 0.7 和 0.9 阶的光学系统进行仿真, 仿真结果如图 12 和图 13 所示。

从仿真结果可知, 对于 0.3 阶的光学系统, 滤波孔径为光瞳大小的 2 倍时, 系统的 FWHM 值最小, PSF 主峰最窄, MTF 截止频率最大, 而当滤波孔径为光瞳大小的 1/2 时, PSF 主峰最宽, MTF 截止频率最小; 对于 0.5 阶的光学系统, 滤波孔径和光瞳大小相同时, FWHM 值最小, PSF 主峰最窄, MTF 截止频率最大, 滤波孔径为光瞳大小的一半时, 效果最

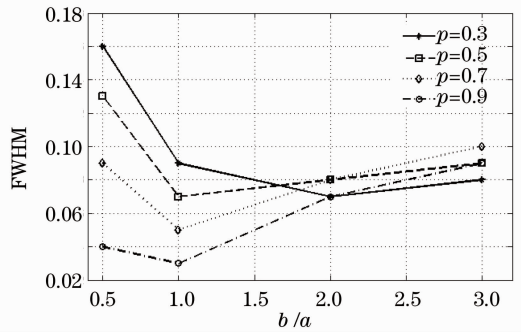


图 12 不同阶次不同大小滤波孔径下的 FWHM  
Fig. 12 FWHM with different orders and different sizes of filtering aperture

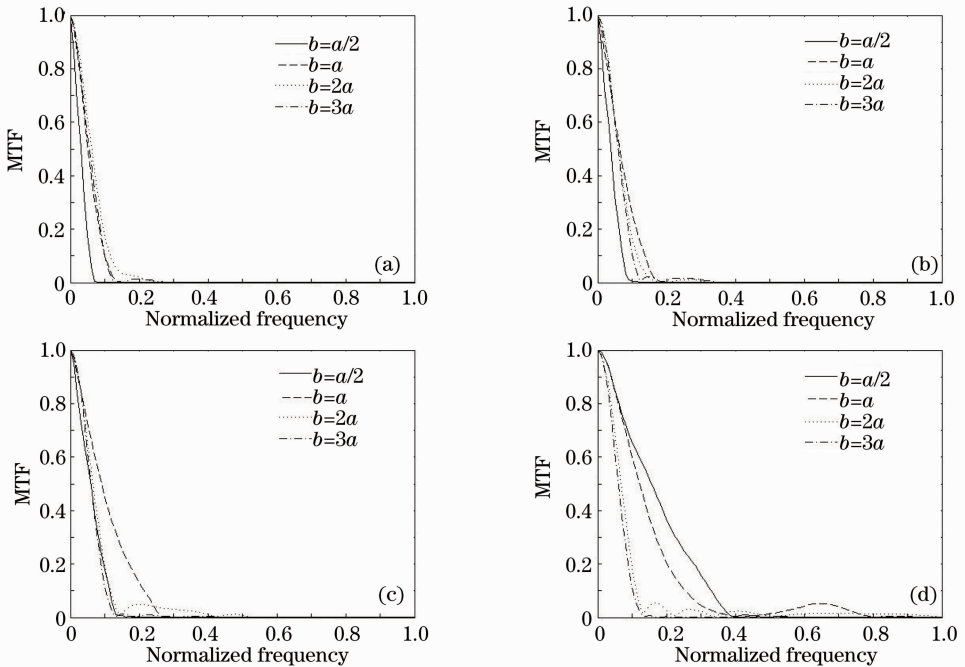


图 13 不同阶次不同大小滤波孔径的 MTF 曲线。(a) 0.3 阶系统; (b) 0.5 阶系统; (c) 0.7 阶系统; (d) 0.9 阶系统  
Fig. 13 MTF curves with different orders and different sizes of filtering aperture. (a) System with 0.3 order; (b) system with 0.5 order; (c) system with 0.7 order; (d) system with 0.9 order

差;对于 0.7 阶的光学系统,当滤波孔径和光瞳大小相同时,PSF 主峰最窄,MTF 截止频率最大,具有较高的截止频率;而对于 0.9 阶的光学系统,当  $b=a$  和  $b=a/2$  时,PSF 主峰相差较小,具有相同的截止频率,但是后者所包含的中频信息最多。因此想要获得较高的截止频率,对于不同阶次的光学系统,滤波孔径大小的选取不同,应根据实际应用选择不同大小的滤波孔径。

## 5 结 论

将分数傅里叶光学成像理论同分数域滤波相结合,提出了一种基于 Lohmann I 型带有滤波孔径的分数阶光学成像系统。以 PSF 和 MTF 作为评价成像质量优劣的准则,详细分析了不同阶次、不同滤波孔径以及光瞳同滤波孔径的相对大小对遥远物体成像质量的影响,并将其同传统的傅里叶光学成像进行比较。结果表明,当光瞳大小和滤波孔径大小相同时,0.5 阶以及 0.5 阶之后的光学成像系统截止频率大于传统的傅里叶光学成像系统,具有更高的分辨率;对于同一阶次的光学系统,光瞳同滤波孔径的相对大小直接影响成像系统的成像质量;对于不同阶次的成像系统,获得较高的截止频率时滤波孔径大小的选取是不相同的,因此实际应用中应根据需要选择合理的滤波孔径。本文所给出的分数域滤波光学成像系统在一定的阶次下相比于传统的傅里叶光学成像系统可以获得较高的截止频率,对于提高光学系统的分辨率具有一定的实用价值。

## 参 考 文 献

- 1 D. Mendlovic, H. M. Ozaktas. Fractional Fourier transforms and their optical implement[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(9): 1875~1881
- 2 Wen Liang. Fractional Fourier Transform and Its Application [D]. Chongqing: Chongqing University, 2008. 2~20  
文 亮. 分数傅里叶变换及其应用[D]. 重庆:重庆大学,2008. 2~20
- 3 A. W. Lohmann. Image rotation, wigner rotation, and the fractional Fourier transform[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(10): 2181~2186
- 4 Haldun M. Ozaktas, David Mendlovic. Fourier transforms of fractional order and their optical interpretation [J]. *Opt. Commun.*, 1993, **101**(3-4): 163~169
- 5 Aysegul Sahin, Haldun M. Ozatas, David Mendlovic. Optical implementations of two-dimensional fractional Fourier transforms and linear canonical transforms with arbitrary parameters [J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(11): 2130~2140
- 6 Hua Jianwen, Liu Liren, Li Guoqiang. Some basic fractional Fourier transform units[J]. *Acta Optica Sinica*, 1997, **17**(8):

1040~1044

- 华建文,刘立人,李国强. 分数傅里叶变换光学实现的基本单元[J]. *光学学报*, 1997, **17**(8): 1040~1044
- 7 Liu Shutian, Xu Jiandong, Zhang Yan *et al.*. Optical implementations of the fractional Fourier transform using lenses [J]. *Acta Optica Sinica*, 1995, **15**(10): 1404~1408  
刘树田,徐建东,张 岩等. 透镜组合实现光学分数傅里叶变换[J]. *光学学报*, 1995, **15**(10): 1404~1408
  - 8 Wang Yingzong, Huo Yiping, Du Yanli. Recognition of images with small difference based on fractional correlation[J]. *Chinese J. Lasers*, 2004, **31**(3): 328~331  
王应宗,霍义萍,杜艳丽. 以分数相关为基础的微小差异图样的识别[J]. *中国激光*, 2004, **31**(3): 328~331
  - 9 D. D. Dragoman, M. Dragoman. Near and far optical beam characterization using fractional Fourier transform [J]. *Opt. Commun.*, 1997, **141**(1-2): 5~9
  - 10 D. Zhao, H. Mao, C. Zheng *et al.*. The propagation properties and kurtosis parametric characteristics of Hermite-cosh-Gaussian beams passing through fractional Fourier transformation systems [J]. *Optik*, 2005, **116**(10): 461~468
  - 11 Chen Senhui, Zhang Tingrong, Feng Xiaofang. Transformation properties of Herimite-Laguerre-Gaussian beam in fractional Fourier transform plane[J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(2): 374~378  
陈森会,张廷蓉,冯小芳. 分数傅里叶变换面上厄米-拉盖尔-高斯光束的变换特性[J]. *中国激光*, 2009, **36**(2): 374~378
  - 12 Chen Tianlu, Wu Ping, Li Haijin *et al.*. Two-dimensional axial symmetric fractional Fourier transforms for elliptical Gaussian beams employing Wigner distribution function[J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(2): 444~448  
陈天禄,吴 平,厉海金等. 椭圆高斯光束的二维轴对称分数傅里叶变换特性[J]. *中国激光*, 2010, **37**(2): 444~448
  - 13 Zeng Yangsu, Guo Yongkang, Xie Shiwei *et al.*. Computer-generated hologram of double fractional Fourier transform[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(2): 155~158  
曾阳素,郭永康,谢世伟等. 双重分数傅里叶变换计算全息[J]. *光学学报*, 2003, **23**(2): 155~158
  - 14 Han Chao, Wei Sui, Liu Kaifeng. Coding of tiling algorithm hologram of fractional Fourier and dynamic display [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(12): 2399~3303  
韩 超,韦 穗,刘凯峰. 分数傅里叶分块算法全息图的编码与动态显示[J]. *光学学报*, 2009, **29**(12): 3299~3303
  - 15 H. M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic *et al.*. Convolution filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(2): 547~559
  - 16 M. Alper Kutay, Haldun M. Ozaktas, Orhan Akrikan *et al.*. Optimal filtering in fractional Fourier domains[J]. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997, **45**(5): 1129~1142
  - 17 Tan Bitao, Zhang Xin, Jing Chunyuan *et al.*. Optical transfer function under normative optical fractional Fourier transform[J]. *J. Appl. Opt.*, 2008, **29**(2): 212~215  
谭碧涛,张 新,景春元等. 规范光学分数傅里叶变换下的光学传递函数[J]. *应用光学*, 2008, **29**(2): 212~215
  - 18 V. Namias. The fractional order Fourier transform and its applications in the quantum mechanics[J]. *Inst. Math. Appl.*, 1980, **25**(2): 241~265
  - 19 X. Yang, Q. Tan, X. Wei *et al.*. Improved fast fractional-Fourier-transform algorithm [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2004, **21**(9): 1677~1681