

各向异性圆锥体的平面光波散射特性

李应乐¹ 李 瑾² 王明军¹ 董群峰¹

(¹ 咸阳师范学院电波传播与散射研究所, 陕西 咸阳 712000)
² 西安电子科技大学理学院, 陕西 西安 710071)

摘要 基于通用的矢量电位和标量电位与介电常数张量无关的原理,由激发的电偶极子与位函数的关系得到了任意各向异性目标散射场的表达式。得到了通用的介电常数张量的变换关系,具体地给出了介电常数张量在球坐标系中的表达式,将目标的内外电场展为级数,得到了各向异性晶体圆锥体一级散射场的解析表达式。理论结果与文献一致,验证了算法的正确性。在光波波长与粒子尺寸相近的情况下,对所得结果进行了仿真,表明各向异性圆锥体的散射具有偶极辐射的特点。所得结果简单、通用,为研究形状更为复杂的各向异性目标、纳米粒子等的光散射研究提供了理论基础。

关键词 散射;各向异性;圆锥体;平面光波

中图分类号 O43 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.1029002

Scattering Property of Anisotropic Medium Cone in Plane Optical Wave

Li Yingle¹ Li Jin² Wang Mingjun¹ Dong Qunfeng¹

(¹ Institute of Radio Wave Propagation and Scattering, Xianyang Normal University,
Xianyang, Shaanxi 712000, China
² School of Science, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract Based on the principle that both scalar potential and vector potential are independent of the dielectric tensor, by using the relation between electric dipoles and their potentials, the analytical expression of scattering field for the anisotropic medium target is developed. The transformation of dielectric tensor is researched. The expression of a tensor in spherical coordinate system is presented in detail. The electric fields inside and outside the target are expanded in series, and then the primary scattering field from the anisotropic gypsum cone is presented. The theoretical result coincides with those in literatures and its validity is tested. When the wavelength is near to the size of the nanoparticle, some simulations are carried out, the result shows that the scattering of anisotropic cones has the characteristic of dipole radiation. The method used is simple and universal. The result has provided a theory for studying the laser scattering from a complex anisotropic target.

Key words scattering; anisotropic; cone; plane optical wave

OCIS codes 290.0290; 140.3460; 290.5825; 290.5850

1 引 言

近年来,随着激光雷达系统及现代隐身、遥感等技术领域的不断发展,各向异性目标的激光散射研究受到人们的普遍重视。当光波在各向异性介质中传播时,有两个传播矢量,其大小取决于电场的极化状态^[1],是各向异性目标散射研究面临的主要困难。米氏(Mie)解决了无耗各向同性均匀介质球的电磁

散射^[2,3],为气溶胶、海洋生物等的激光散射特性奠定了理论基础。目前纳米技术的发展已使得形成大小为30~50 nm的金属粒子包括单粒子、粒子团以及有序排列粒子成为可能^[4],形成的这些纳米粒子的形状是可以控制的,形状包括近似球形、四面体、三角体以及六棱柱等。在分子光谱应用方面,利用其散射特性可以检测位于粗糙金属表面上的分子的

收稿日期: 2011-03-21; **收到修改稿日期**: 2011-05-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60971079,60801047)、陕西省自然科学基金(2009JM8020)和陕西省教育厅自然科学基金(09JK800)资助课题。

作者简介: 李应乐(1961—),男,博士,教授,主要从事复杂目标的散射与光传播等方面的研究。

E-mail: liyinglexidian@yahoo.com.cn

散射信息;由于纳米粒子优越的散射特性可以提供较强的信号输出等,在近场光学显微应用方面有广泛的应用前景;尺寸在 40 nm 左右的纳米粒子还可以激发表面等离子体激元模,当模处于谐振状态时,散射场显著增强,这些特性可以用来进行生物标识和诊断等。因此纳米粒子的散射特性及其利用已受到国内外学者的高度关注。不仅如此,将纳米颗粒看成各向同性介质球已经应用于烟幕干扰等领域,而且在激光雷达的设计等应用领域有广泛的应用前景^[5~7]。然而,研究各向异性纳米粒子散射的文献还不多见。Qian 等^[8,9]以 Mie 理论为基础,在波长与粒子大小相近的情况下研究了银纳米球形粒子的光学谐振特性。实际上,纳米粒子可能具有各向异性特性。激光在各向异性生物组织中的传输、折射等受到国内学者的普遍关注^[10~12]。各向异性纳米粒子的激光散射是一个电磁波与粒子的相互作用问题;圆锥体是四面体、三角体的一种近似模型。在光波段研究各向异性纳米圆锥体散射的文献尚未见报道。另外,各向异性目标的介电常数张量是在直角坐标系中给出的,目标激光散射问题一般具有球对称性或轴对称性,因此,在研究目标的激光散射特性时,应将该张量转换到相应的坐标系中^[13,14]。

本文在研究各向同性粒子散射文献的基础上,

以各向异性圆锥形纳米颗粒为研究对象,研究其散射特性。由于目标大小与光波的波长相近时,其散射、干涉和衍射等效效应较为明显且具有代表性,故本文选用波长与纳米颗粒大小(30~40 nm)可相比拟的光波进行仿真计算,但理论表达式不受波长的限制。从极化强度的推迟势出发,得出了各向异性目标内外场的级数解,以典型的各向异性圆锥体纳米粒子为例,得到了粒子的微分散射表达式,并给出了部分仿真结果。

2 各向异性目标的激光散射特性

2.1 各向异性目标内外场的级数解

设目标在直角坐标系的介电常数张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_r,$$

式中 ε_0 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 分别为自由空间的介电常数和相对介电常数张量。在激光场的照射下,目标被反复地极化,内部出现了极化电流,该极化电流产生的辐射场形成目标的散射场。目标的极化状态是目标内电场的函数,由于矢量磁位 \mathbf{A} 与标量电位 φ 的引入与介质参数无关,可以用来研究各向异性目标的电磁散射。利用极化强度产生的推迟势函数 \mathbf{A} 和 φ 可得目标外场和内场的表达式为^[15]

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(jkz) + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \exp(jkR)}{R} dV' \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(jkz) + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \exp(jkR)}{R} dV' - \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{cases}, \quad (1)$$

式中

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{r11} - 1 & \varepsilon_{r12} - 1 & \varepsilon_{r13} - 1 \\ \varepsilon_{r21} - 1 & \varepsilon_{r22} - 1 & \varepsilon_{r23} - 1 \\ \varepsilon_{r31} - 1 & \varepsilon_{r32} - 1 & \varepsilon_{r33} - 1 \end{bmatrix},$$

为目标的相对极化率张量的一般表达式, $\mathbf{E}_0 \exp(jkz)$ 为入射场。显然,当目标为各向同性介质目标时,(1)式与文献[15]完全一致,表明了算法的正确性。目标在某一方向的极化只和该方向上的电场有关,因此可将目标的内、外场展为极化率张量的级数形式,即

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2^{(0)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}_2^{(1)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}_2^{(2)} + \dots + \boldsymbol{\chi}^n \cdot \mathbf{E}_2^{(n)} \\ \mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}^{(1)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}^{(2)} + \dots + \boldsymbol{\chi}^n \cdot \mathbf{E}^{(n)} \end{cases}, \quad (2)$$

$\mathbf{E}^{(i)}$ 代表第 i 级电场。将(2)式代入(1)式得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2^{(0)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}_2^{(1)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}_2^{(2)} + \dots + \boldsymbol{\chi}^n \cdot \mathbf{E}_2^{(n)} &= \mathbf{E}_0 \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \\ \nabla \times \int \frac{\boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}') \cdot [\mathbf{E}^{(0)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}^{(1)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}^{(2)} + \dots + \boldsymbol{\chi}^n \cdot \mathbf{E}^{(n)}] \exp(jkR')}{R} dV' & \mathbf{E}^{(0)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}^{(1)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}^{(2)} + \dots + \\ \boldsymbol{\chi}^n \cdot \mathbf{E}^{(n)} &= \mathbf{E}_0 \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}') \cdot [\mathbf{E}^{(0)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}^{(1)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}^{(2)} + \dots + \boldsymbol{\chi}^n \cdot \mathbf{E}^{(n)}] \exp(jkR')}{R} dV' - \\ \boldsymbol{\chi} \cdot [\mathbf{E}^{(0)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}^{(1)} + \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}^{(2)} + \dots + \boldsymbol{\chi}^n \cdot \mathbf{E}^{(n)}]. \end{aligned}$$

由极化率的同次幂系数相等可得

$$\mathbf{E}_2^{(0)} = \mathbf{E}^{(0)} = \mathbf{E}_0 \exp(jkz), \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_2^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{E}^{(0)} \exp(jkR)}{R} dv', \quad (4)$$

$$\mathbf{E}_2^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{E}^{(1)} \exp(jkR)}{R} dv'. \quad (5)$$

将(4)式代入(2)式,可得目标的一次散射场,一般情况下计算到一级散射已很精确。

2.2 各向异性圆锥体的激光散射特性

设一圆锥体的高为 h , 底面半径为 R_0 , 一般情况下介电常数张量由(1)式给定,但在主坐标系中,(1)式将变为对称张量^[16]。为了简单起见,设主坐标系中的目标姿态如图1所示,中心与坐标原点重合,主坐标系中的相对极化率张量为

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \epsilon_{r11} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{r22} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{r33} - 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

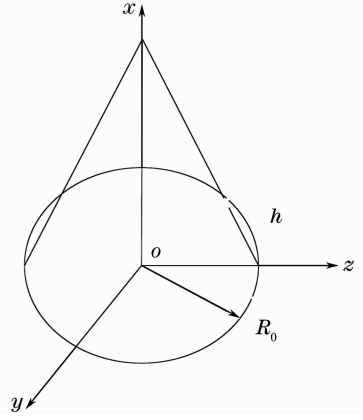


图1 主坐标系中的目标姿态

Fig.1 Target posture in principal coordinate system

一列平面电磁波 $\mathbf{E}_i = (\mathbf{u}_x \cos \phi_0 + \mathbf{u}_y \sin \phi_0) \times E_0 \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ 投射到目标上,其中 $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \phi_0$ 分别为直角坐标系的单位矢量和入射波极化方向与 x 轴的夹角,将(3)式代入(4)式并利用 $R \approx r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}', \mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \frac{\exp(jkr)}{r} \mathbf{E}_0 \int \exp[jk(z' - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}')] dv' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \frac{\exp(jkr)}{r} \mathbf{E}_0 \int \exp\left[jk\left(R' \cos \beta' - \frac{xx' + yR' \sin \beta' + zR' \cos \beta'}{r}\right)\right] R' dR' dx' d\beta'. \end{aligned}$$

在上式的积分中, β' 为 R' 与 z 轴的夹角,范围为 $0 \sim 2\pi$; x' 的范围为 $0 \sim h$, R' 的范围为 $0 \sim \left(-\frac{R_0^2 x'^2}{h^2} + R_0^2\right)^{1/2}$; (x, y, z) 为观测点的坐标。将上式的指数函数做泰勒级数展开,先对方位角积分、再对半径积分可得

$$\mathbf{E}_2^{(1)} = \frac{1}{4} \nabla \times \nabla \times \frac{\exp(jkr)}{r} \mathbf{E}_0 \int_0^h \left(-\frac{R_0^2}{h^2} x'^2 + R_0^2\right) \exp\left(-j \frac{kx}{r} x'\right) dx'.$$

由于目标尺度远远小于观察距离,所以上式中的指数函数还可做级数展开,整理后可得

$$\mathbf{E}_2^{(1)} = \frac{R_0^2 h E_0}{6} \nabla \times \nabla \times \frac{\exp(jkr)}{r} (\mathbf{u}_x \cos \phi_0 + \mathbf{u}_y \sin \phi_0). \quad (7)$$

利用球坐标与直角坐标中单位矢量的关系可将上式中的单位矢量换为球坐标系中的单位矢量^[11]:

$$\mathbf{E}_2^{(1)} = \frac{R_0^2 h E_0}{6} \nabla \times \nabla \times \frac{\exp(jkr)}{r} [\mathbf{e}_r \sin \theta \cos(\phi - \phi_0) + \mathbf{e}_\theta \cos \theta \cos(\phi - \phi_0) - \mathbf{e}_\phi \sin(\phi - \phi_0)],$$

式中 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ 分别为球坐标系的单位矢量。对散射场而言,只对随距离 r 的一次方减小的部分感兴趣,运算后可得

$$\mathbf{E}_2^{(1)} = \frac{R_0^2 h E_0 k^2}{6} \frac{\exp(jkr)}{r} [-\mathbf{e}_\theta \cos \theta \cos(\phi - \phi_0) + \mathbf{e}_\phi \sin(\phi - \phi_0)]. \quad (8)$$

由于介电常数张量一般是在直角坐标系中给出的,可利用电位移矢量与电场强度的关系、直角坐标矢量与球坐标矢量的关系^[14,15] $\boldsymbol{\epsilon}_s = \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{P}$ 得到球坐标系中的极化率张量,其中 \mathbf{P} 为从直角坐标到球坐标的变换矩阵。对于双轴介质

$$\boldsymbol{\epsilon}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

而言,主球坐标系的相对极化率张量仍为对称张量,具体元素为

$$\begin{cases} \chi_{s11} = (\epsilon_{33} - 1)\cos^2\theta + (\epsilon_{11} - 1)\sin^2\theta\cos^2\phi + (\epsilon_{22} - 1)\sin^2\theta\sin^2\phi \\ \chi_{s12} = -(\epsilon_{33} - 1)\sin\theta\cos\theta + (\epsilon_{11} - 1)\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + (\epsilon_{22} - 1)\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi \\ \chi_{s13} = (\epsilon_{22} - \epsilon_{11})\sin\theta\cos\theta\sin\phi \\ \chi_{s22} = (\epsilon_{33} - 1)\sin^2\theta + (\epsilon_{11} - 1)\cos^2\theta\cos^2\phi + (\epsilon_{22} - 1)\cos^2\theta\sin^2\phi \\ \chi_{s23} = (\epsilon_{22} - \epsilon_{11})\cos\theta\cos\theta\sin\phi \\ \chi_{s33} = (\epsilon_{11} - 1)\sin^2\phi + (\epsilon_{22} - 1)\cos^2\phi, \quad \chi_{s23} = \chi_{s32}, \quad \chi_{s13} = \chi_{s31}, \quad \chi_{s12} = \chi_{s21} \end{cases} \quad (9)$$

显然,主球坐标系中的极化率张量仍为对称张量,由此可得目标的散射电场为

$$\begin{cases} E_{s\theta}^{(1)} = \frac{R_0^2 h E_0 k^2}{6} \frac{\exp(jkr)}{r} [-\chi_{s22} \cos\theta \cos(\phi - \phi_0) + \chi_{s23} \sin(\phi - \phi_0)] \\ E_{s\phi}^{(1)} = \frac{R_0^2 h E_0 k^2}{6} \frac{\exp(jkr)}{r} [-\chi_{s32} \cos\theta \cos(\phi - \phi_0) + \chi_{s33} \sin(\phi - \phi_0)] \end{cases} \quad (10)$$

由(10)式可得目标的微分散射截面为

$$\sigma_d = \left(\frac{R_0^2 h E_0 k^2}{6}\right)^2 [(\chi_{s22}^2 + \chi_{s23}^2)\cos^2\theta\cos^2(\phi - \phi_0) + (\chi_{s23}^2 + \chi_{s33}^2)\sin^2(\phi - \phi_0) - \chi_{s23}(\chi_{s22} + \chi_{s33})\cos\theta\sin^2(\phi - \phi_0)]. \quad (11)$$

对(11)式积分可得目标的散射截面,在此不再赘述。以下以石膏晶体为例,给出部分仿真结果。

图2为散射随观察方位的变化,所用参数如图中所示。可以看出:在 $\theta = \pi/2, \phi = \pi/6$ 附近,散射最小;在 $\theta = \pi/2, \phi = 2\pi/3$ 附近,散射最强;前向散射 $\theta = 0$ 与后向散射 $\theta = \pi$ 也较强。这一结果与有关文献中纳米粒子散射特性的结论一致。由于极化角 $\phi_0 = \pi/6$,可知各向异性圆锥体的散射具有偶极辐射的特点,这是由极化电荷与极化电流的二次辐射引起的。图3表明,入射波的极化角 ϕ_0 为0或 π 时,前向散射最大;从图1的目标姿态可以看出,当入射波的极化角为0或 π 时,极化方向在 x 方向上,仿真中该方向的介电常数也最大,因而电偶极矩最大,微分散射最强。图4表明, y 方向的介电常数对散射的影响较为敏感,这是由观测位置和极化状态决定的。图5是目标大小对散射的影响,尺寸越大,散射越强。总之,当波长给定时各向异性圆锥体的激光散射具有偶极辐射的特点。

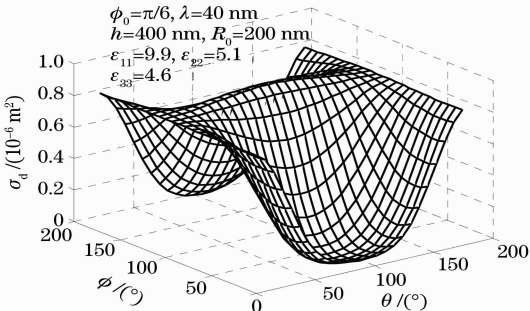


图2 散射随观察方位的变化

Fig.2 Variation of scattering with observing angle

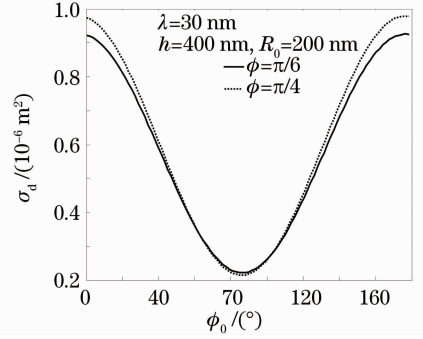


图3 前向散射与极化状态的关系

Fig.3 Relation between forward scattering and polarization

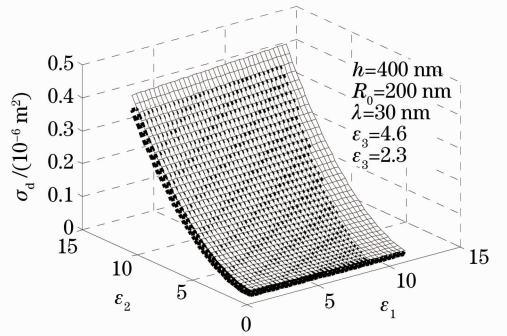


图4 介电常数张量对散射的影响

Fig.4 Effect of electric tensor on scattering

3 结 论

基于电磁推迟位函数的引入与介质参数无关的原理,得到了任意各向异性目标散射场的表达式,并得到了该散射场的近似级数解。研究了不同坐标系

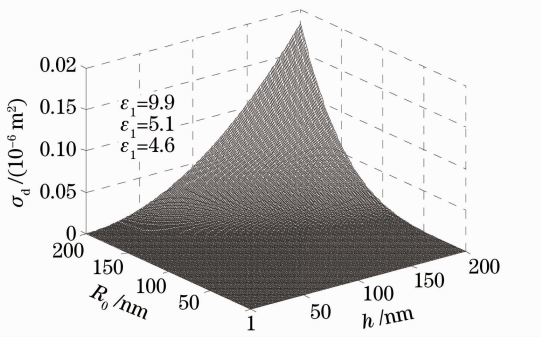


图5 锥体形状的影响

Fig. 5 Effect of the plaster pyramid shape on scattering

中介电常数张量的变换关系,以各向异性石膏圆锥体为例,得到了各向异性晶体圆锥体的一级散射振幅、散射截面等的解析表达式。在激光波段,研究了介电常数张量、观测方位、极化状态等因素对散射的影响。对所得结果进行了仿真,结果表明,各向异性圆锥体的散射具有偶极辐射的特点,介电常数越大,产生的电偶极矩也愈大,散射也越强;当外电场的极化方向与某一主轴方向相同时,散射效应变得最为明显。所得结果不受目标形状、介电常数张量、波长等的限制。如何研究形状更为复杂的各向异性目标的激光散射是一个富有挑战性的课题,也是下一步要开展的工作。

参 考 文 献

- 1 Hermann A. Haus. Waves and Fields in Optoelectronics [M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1984. 320~329
- 2 Van de Hulst, H. C. . Light Scattering by Small Particles [M]. New York: Wiley, 1957. 175~234
- 3 Akira Ishimaru. Wave Propagation and Scattering in Random Medium [M]. New York: Academic Press, 1978. 123~213.
- 4 Wenhui Yang, George C. Schatz, Richard P. Van Duyne. Discrete dipole approximation for calculating extinction and Raman intensities for small particles with arbitrary shapes [J]. *J. Chem. Phys.*, 1995, **103**(3): 869~877
- 5 Li Mi, Xu Zheng. Light scattering characteristics of laser colloid [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(9): 2499~2502

- 李 密, 许 正. 激光溶胶的光散射特性 [J]. *光学学报*, 2009, **29**(9): 2499~2504
- 6 Dong Zhe, Yang Xichen. Research of scattering intensity with spherical particles in laser cladding [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(5): 1296~1300
- 董 哲, 杨洗陈. 激光熔覆中球形粒子对激光散射强度的研究 [J]. *光学学报*, 2009, **29**(5): 1296~1300
- 7 Mao Jiandong, Hua Dengxin, He Tingyao. A compact Mie scattering lidar and its observation [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **30**(2): 284~286
- 毛建东, 华灯鑫, 何廷尧. 小型米散射激光雷达的研制及其探测 [J]. *光子学报*, 2010, **30**(2): 284~286
- 8 Xiaohu Qian, Harold S. Park. The influence of mechanical strain on the optical properties of spherical gold nanoparticles [J]. *J. Mechanics and Physics of Solids*, 2010, **58**(3): 330~345
- 9 J. J. Mock, M. Barbic, D. R. Smith *et al.*. Shape effects in plasmon resonance of individual colloidal silver nanoparticles [J]. *J. Chem. Phys.*, 2002, **116**(15): 6755~6761
- 10 Wen Jing, Zuo Chunying. Fresnel formula of plane wave in anisotropic crystals [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(7): 2000~2005
- 温 静, 左春英. 平面波在各向异性晶体中的菲涅耳公式 [J]. *光学学报*, 2009, **29**(7): 2000~2005
- 11 Han Junhe, Yao Baoli, Gao Peng. Study of photoinduced birefringence characteristics of B-type and M-type in bacteriorhodopsin film [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(8): 2045~2050
- 韩俊鹤, 姚保利, 郭 鹏. 菌紫质的 B 型和 M 型光致双折射特性研究 [J]. *中国激光*, 2010, **37**(8): 2045~2050
- 12 Gao Qiang, Zeng Nan, Ma Hui. Rotating linearly polarized light imaging applied in textile testing [J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(9): 2380~2385
- 高 强, 曾 楠, 马 辉. 旋转线偏振光成像方法在纺织品纤维检测中的应用 [J]. *中国激光*, 2009, **36**(9): 2380~2385
- 13 Mao Shicun, Wu Zhensen. Scattering by a homogeneous anisotropic elliptic cylinder: two-dimensional case [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2010, **38**(3): 529~235
- 毛仕春, 吴振森. 二维各向异性椭圆柱的电磁散射 [J]. *电子学报*, 2010, **38**(3): 529~235
- 14 Li Yingle, Wang Mingjun. Rayleigh scattering for an electromagnetic anisotropic medium sphere [J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2010, **27**(5): 054101
- 15 Cai Shengshan, Zhu Yun, Xu Jianjun. Electrodynamics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2002. 354~358
- 蔡圣善, 朱 耘, 徐建军. 电动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002. 354~358
- 16 W. R. Smythe. Static and Dynamic Electricity [M]. New York: McGraw-Hill, 1968. 330~340