

# 车载激光多普勒测速仪参数估计的 Cramer-Rao 下限

周 健 魏 国 龙 兴 武

(国防科学技术大学光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要** 考虑到加速度和高斯型包络对激光多普勒测速仪的影响,在引入加速度分量的基础上,研究了高斯包络型多普勒信号的参数估计。根据数理统计的理论,分析了多普勒圆频率及其一阶变化率估计方差的 Cramer-Rao 下限(CRLB),给出了参数估计方差的 CRLB 计算公式,并讨论了各参数带修正的功率谱估计。理论分析及仿真结果表明:参数估计方差的 CRLB 与观测数据长度、信噪比和高斯包络的宽度有关,增加观测数据长度和提高信噪比可以减小参数估计方差的 CRLB;当观测数据一定时,加速度越大,高斯包络的宽度就越窄,参数估计方差的 CRLB 越大;当信噪比增加到 6 dB 时,运用带修正的功率谱估计算法得到的多普勒圆频率及其一阶变化率估计值的方差收敛于相应的 CRLB。所得参数估计方差的 CRLB 与此前其他研究者得出的结论是相互协调的。

**关键词** 光学测量;激光多普勒测速仪;Cramer-Rao 下限;参数估计;功率谱估计

中图分类号 TN249 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS201131.1012001

## Cramer-Rao Lower Bound for Parameter Estimation of Mobile Laser Doppler Velocimeter

Zhou Jian Wei Guo Long Xingwu

(College of Optoelectronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

**Abstract** Considering the influence of acceleration and the Gaussian envelope on laser Doppler velocimeter (LDV), the parameters estimation of Doppler signal with Gaussian envelope is investigated based on introducing the acceleration. According to the theory of mathematics statistics, the Cramer-Rao lower bounds (CRLB) of Doppler circular frequency and its first order rate of change are analyzed, formulas of CRLB are given, and the power spectrum estimation with adjustment is discussed. The theoretical analysis and simulation results show that the CRLB of the variance of estimated parameters are related to the observation data, signal-to-noise ratio (SNR), the width of Gaussian envelope, and it can be decreased by increasing the length of observation data and improving the SNR. When the length of observation data is fixed, the larger the acceleration is, the narrower the Gaussian envelope is, and the CRLB of Doppler circular frequency and its first order rate are also larger. The gap between the variances of the measuring results and the CRLB narrows when the SNR of the signal is improved, almost eliminates when the SNR is higher than 6 dB. The acquired result is in harmony with those acquired by other researchers.

**Key words** optical measurement; laser Doppler velocimeter; Cramer-Rao lower bound; parameter estimation; power spectrum estimation

**OCIS codes** 120.6650; 150.5495; 280.3340

## 1 引 言

激光多普勒测速仪(LDV)以其精度高、动态响应快、测量范围大及非接触测量等优点,在航空、航天、机械、计量和医学等领域得到了广泛的应用<sup>[1,2]</sup>。它通过测量运动微粒散射光的多普勒频移

来获取速度信息。与其他测量一样,多普勒信号总含有一定的噪声,无论采用何种方法,估计得到的多普勒频率都具有一定的方差。为了对系统测量准确度进行判断,常使用数理统计中的 Cramer-Rao 下限(CRLB)进行分析。根据重复测量所得结果的方

收稿日期: 2011-03-03; 收到修改稿日期: 2011-05-04

基金项目: "十一五"国防预研项目(51309050301)和国际科技大学优秀研究生创新资助项目(B100703)资助课题。

作者简介: 周 健(1983—),男,博士研究生,主要从事光学检测技术方面的研究。E-mail: wttzhoujian@163.com

导师简介: 龙兴武(1958—),男,教授,博士生导师,主要从事激光和光电子技术等方面的研究。

E-mail: xwlong110@sina.com

差与 CRLB 的距离来判定仪器或测量的优劣,明确改善可能性的大小。

国内外学者已经对多普勒频率估计的 CRLB 做了一定的研究,如 Rife 等<sup>[3,4]</sup>先后用不同的方法给出了离散纯频正弦信号参数估计的 CRLB, Bamler<sup>[5]</sup>研究了多普勒信号参数估计的 CRLB,但是仍存在两方面的问题。一方面,由于激光束是以高斯光强分布在空间传播的,所以滤波后的多普勒信号是包络为高斯分布的余弦信号<sup>[6]</sup>,长期以来,人们并没有找到确切的 CRLB。许多科研工作者至今仍然沿用纯频正弦信号参数估计的结论,因此,评判标准就存在一定的误差。另一方面,固体运动目标,特别是飞机、导弹和战车等军用目标,不但具有较高的速度,还具有较高的加速度。加速度的存在使粒子通过测控区时,速度发生变化,这就使多普勒包络中的信号频率发生变化,造成多普勒频谱的展宽<sup>[7]</sup>,从而引起测量误差。因此,在研究多普勒频率估计方差的 CRLB 时,必须引入加速度分量。

王纪强等<sup>[8]</sup>在研究激光多普勒参数估计时引入了加速度分量,但所建模型仍然是纯频正弦信号; 段伟群<sup>[9]</sup>建立了高斯包络多普勒信号的模型,但没有考虑到加速度的影响。而事实上,如前文所述,高斯包络和加速度的存在都会造成多普勒频谱的加宽,影响激光多普勒参数估计的精度。因此,对于车载激光多普勒测速系统而言,文献[8,9]中给出的多普勒信号参数估计方差 CRLB 的计算公式均不够准确。

为了得到更准确的计算公式,本文在引入加速度分量的基础上,建立了高斯包络多普勒信号的分析模型,研究了激光多普勒测速参数估计的 CRLB,并将其用于分析系统中已有的信号处理方法。

## 2 多普勒圆频率及其一阶变化率估计方差的 CRLB

多普勒回波信号由许多通过测控区的粒子产生的散射光叠加而成。受固体表面特性和激光传输介质的影响,所产生的多普勒强度、相位都是随机的,但频率是相同的。这里采用离散的复数高斯包络信号模型

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{j}\mathbf{Y}, \quad (1)$$

式中

$$\mathbf{X} = [X_{-N}, X_{-N+1}, \dots, X_N]^T, \quad (2)$$

$$\mathbf{Y} = [Y_{-N}, Y_{-N+1}, \dots, Y_N]^T, \quad (3)$$

$$X_n = \mu(n) + \omega(n) = A \cos(\varphi_0 + \omega_D t_n + r_D t_n^2) \times \exp(-t_n^2/T_w^2) + \omega(n), \quad (4)$$

$$Y_n = \nu(n) + \bar{\omega}(n) = A \sin(\varphi_0 + \omega_D t_n + r_D t_n^2) \times \exp(-t_n^2/T_w^2) + \bar{\omega}(n), \quad (5)$$

式中  $n = -N, -N+1, \dots, N$ ;  $-NT \leq t_n \leq NT$ 。 $\mu(n)$  和  $\nu(n)$  代表无噪声信号,  $A$  为信号的振幅,  $\varphi_0$  为回波信号的初始相位,  $\omega_D$  和  $r_D$  分别为待估的多普勒圆频率及其一阶变化率,  $T$  表示数据采样的时间间隔,  $N$  为观测数据长度,  $T_w$  是微粒通过 LDV 测控区所花费的时间; 噪声  $\omega(n)$  和  $\bar{\omega}(n)$  互为对方的希尔伯特变换,且都假定为零均值高斯白噪声序列,方差为  $\sigma^2$ , 则信噪比(SNR)为  $R_{SN} = A^2 / (2\sigma^2)$ 。

上述模型具有 5 个未知参数,本文只对多普勒圆频率  $\omega_D$  及其一阶变化率  $r_D$  感兴趣。令  $\boldsymbol{\eta}$  为参数矢量

$$\boldsymbol{\eta} = [\omega_D \quad r_D \quad A \quad \varphi_0 \quad T_w]^T. \quad (6)$$

在模型参数确定的情况下,数据样本矢量  $\mathbf{Z}$  中全部数据元素的联合概率密度可表示为

$$f(\mathbf{Z}/\boldsymbol{\eta}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{2N+1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=-N}^N [(X_n - \mu_n)^2 + (Y_n - \nu_n)^2]\right\}. \quad (7)$$

根据数理统计理论,要计算各待估参数估计方差的 CRLB,首先应当计算相应的费希尔(Fisher)信息矩阵  $\mathbf{J}$ 。由 Cramer-Rao 不等式可知,相应的 CRLB 满足

$$(\boldsymbol{\eta}_i)_{\text{CRLB}} \geq (\mathbf{J}^{-1})_{ii}, \quad (8)$$

式中  $(\mathbf{J}^{-1})_{ii}$  表示 Fisher 信息矩阵的逆矩阵  $\mathbf{J}^{-1}$  中第  $i$  个对角元素。信息矩阵是一个对称矩阵,即  $\mathbf{J}_{ij} = \mathbf{J}_{ji}$ , 其一般元素的表达式为

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=-N}^N \left( \frac{\partial \mu_n}{\partial \eta_i} \frac{\partial \mu_n}{\partial \eta_j} + \frac{\partial \nu_n}{\partial \eta_i} \frac{\partial \nu_n}{\partial \eta_j} \right). \quad (9)$$

由(4),(5),(9)式计算可得

$$J_{11} = \frac{A^2}{\sigma^2} \sum_{n=-N}^N t_n^2 \exp(-2t_n^2/T_w^2), \quad J_{21} = J_{12} = \frac{A^2}{\sigma^2} \sum_{n=-N}^N t_n^3 \exp(-2t_n^2/T_w^2), \quad J_{31} = J_{13} = 0,$$

$$\begin{aligned}
J_{41} = J_{14} &= \frac{A^2}{\sigma^2} \sum_{n=-N}^N t_n \exp(-2t_n^2/T_w^2), \quad J_{51} = J_{15} = 0, \quad J_{22} = \frac{A^2}{\sigma^2} \sum_{n=-N}^N t_n^4 \exp(-2t_n^2/T_w^2), \\
J_{32} = J_{23} &= 0, \quad J_{42} = J_{24} = J_{11}, \quad J_{52} = J_{25} = 0, \quad J_{33} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=-N}^N \exp(-2t_n^2/T_w^2), \\
J_{43} = J_{34} &= 0, \quad J_{53} = J_{35} = \frac{2A}{\sigma^2 T_w^3} \sum_{n=-N}^N t_n^2 \exp(-2t_n^2/T_w^2), \quad J_{44} = \frac{A^2}{\sigma^2} \sum_{n=-N}^N \exp(-2t_n^2/T_w^2), \\
J_{54} = J_{45} &= 0, \quad J_{55} = \frac{4A^2}{\sigma^2 T_w^6} \sum_{n=-N}^N t_n^4 \exp(-2t_n^2/T_w^2). \tag{10}
\end{aligned}$$

实际测量中,由于数据采样频率  $f_s$  往往大大高于待估的多普勒频率  $f_D$ ,则(10)式中的连加和可以用相应的积分来表示。这样对(10)式进行积分运算,得到信息矩阵  $\mathbf{J}$  为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 & J_{11} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} & 0 & J_{35} \\ 0 & J_{11} & 0 & J_{44} & 0 \\ 0 & 0 & J_{35} & 0 & J_{55} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

式中

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \frac{A^2 T^2}{2\sigma^2} \left[ \frac{\sqrt{2\pi}}{4} K_w^3 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}N}{K_w}\right) - NK_w^2 \exp\left(-\frac{2N^2}{K_w^2}\right) \right], \\
J_{22} &= -\frac{A^2 N^3 K_w^2 T^4}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{2N^2}{K_w^2}\right) + \frac{3\sqrt{2\pi}A^2 K_w^5 T^4}{32\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}N}{K_w}\right) - \frac{3A^2 K_w^4 T^4 N}{8\sigma^2} \exp\left(-\frac{2N^2}{K_w^2}\right), \\
J_{33} &= \frac{\sqrt{2\pi}K_w}{2\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}N}{K_w}\right), \quad J_{44} = \frac{\sqrt{2\pi}A^2 K_w}{2\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}N}{K_w}\right), \\
J_{55} &= \frac{3\sqrt{2\pi}A^2}{8\sigma^2 K_w T^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}N}{K_w}\right) - \frac{2A^2 N^3}{\sigma^2 K_w^4 T^2} \exp\left(-\frac{2N^2}{K_w^2}\right) - \frac{3A^2 N}{2\sigma^2 K_w^2 T^2} \exp\left(-\frac{2N^2}{K_w^2}\right), \\
J_{35} &= \frac{A}{\sigma^2 K_w^3 T} \left[ \frac{\sqrt{2\pi}}{4} K_w^3 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}N}{K_w}\right) - NK_w^2 \exp\left(-\frac{2N^2}{K_w^2}\right) \right], \tag{12}
\end{aligned}$$

式中  $K_w = T_w/T$  为高斯包络的宽度,而  $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi_0}} \int_0^x \exp(-r^2) dr$  为误差函数。

因此,信息矩阵的逆矩阵  $\mathbf{J}^{-1}$  中第 1 个和第 2 个对角元素分别为

$$(\mathbf{J}^{-1})_{11} = \frac{1}{J_{11}} = \frac{2\sigma^2}{A^2 T^2 \left[ \frac{\sqrt{2\pi}}{4} K_w^3 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}N}{K_w}\right) - NK_w^2 \exp\left(-\frac{2N^2}{K_w^2}\right) \right]}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{J}^{-1})_{22} &= \frac{J_{44}}{J_{22}J_{44} - J_{24}^2} = \left[ \left( -\frac{A^2 N^3 K_w^2 T^4}{2\sigma^2} - \frac{A^2 K_w^4 T^4 N}{8\sigma^2} \right) \exp\left(-\frac{2N^2}{K_w^2}\right) + \frac{\sqrt{2\pi}A^2 K_w^5 T^4}{16\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}N}{K_w}\right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{A^2 T^4 N^2 K_w^3}{2\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{4N^2}{K_w^2}\right) \operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}N}{K_w}\right) \right]^{-1}. \tag{14}
\end{aligned}$$

则多普勒圆频率及其一阶变化率估计方差的 CRLB 可表示为

$$B_{\text{CRL}}^{\text{D}} \geq \frac{2\sigma^2}{A^2 T^2 \left[ \frac{\sqrt{2\pi}}{4} K_w^3 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}N}{K_w}\right) - NK_w^2 \exp\left(-\frac{2N^2}{K_w^2}\right) \right]}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
B_{\text{CRL}}^{\text{D}} &\geq \left[ \left( -\frac{A^2 N^3 K_w^2 T^4}{2\sigma^2} - \frac{A^2 K_w^4 T^4 N}{8\sigma^2} \right) \exp\left(-\frac{2N^2}{K_w^2}\right) + \frac{\sqrt{2\pi}A^2 K_w^5 T^4}{16\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}N}{K_w}\right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{A^2 T^4 N^2 K_w^3}{2\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{4N^2}{K_w^2}\right) \operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}N}{K_w}\right) \right]^{-1}. \tag{16}
\end{aligned}$$

由(15)式和(16)式可知,多普勒圆频率及其一阶变化率估计方差的 CRLB 与观测数据长度、信噪比和高斯包络的宽度有关。

许多科研工作者长期沿用由 Rife<sup>[3]</sup>推出的适用于纯频正弦信号的圆频率估计方差的 CRLB:

$$B_{\text{CRL}}^{\omega} \geq \frac{12\sigma^2}{A^2 T^2 K(K^2 - 1)}, \quad (17)$$

式中  $K$  为全部的数据点数。

显然,从圆频率的 CRLB 来看,本文得出的结果比 Rife 得出的结果要复杂得多。为了看清(15)式和(17)式的联系与区别,现定义一比例因子  $\kappa = N/K_w$ ,它代表观测数据长度和多普勒信号高斯包络的宽度之比,同时也是对多普勒信号和纯频正弦信号之间差异的一种度量。 $\kappa$  越大说明具有高斯包络的多普勒信号与纯频正弦信号之间的差异越大。反之,如果  $\kappa$  趋近于零,那么多普勒信号将趋近于一个纯频的谐波信号。引进比例因子后,注意到全部的数据点数为  $K = 2N + 1$ ,则(15)式可简化为

$$B_{\text{CRL}}^{\omega_D} \geq \frac{\gamma\sigma^2}{A^2 T^2 (K - 1)^3}, \quad (18)$$

式中

$$\gamma = \frac{16\kappa^3}{(\sqrt{2\pi}/4)\text{erf}(\sqrt{2}\kappa) - \kappa\exp(-2\kappa^2)}. \quad (19)$$

当观测数据长度  $N$  较大时,  $K \gg 1$ ,则  $K(K^2 - 1) \approx (K - 1)^3$ 。不难发现,(18)式和(17)式具有完全相同的形式,只是存在一个比例系数  $\epsilon = \gamma/12$ 。图 1 给出了  $\epsilon$  随  $\kappa$  的变换关系曲线。从图中可以看出,当  $\kappa$  趋近于零时,比例系数  $\epsilon$  趋近于 1,两种结果具有完全

相同的形式,这充分说明了两种不同的 CRLB 是相互协调的。这是因为当  $\kappa$  趋近于零时,多普勒信号将趋近于一个纯频的谐波信号。

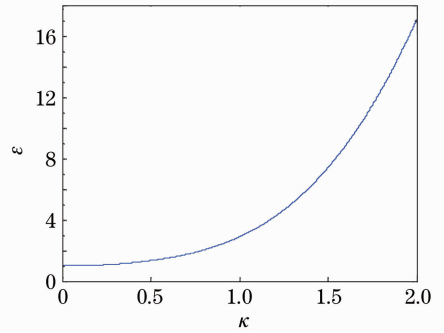


图 1  $\epsilon$  与  $\kappa$  的关系曲线

Fig. 1 Relation between  $\epsilon$  and  $\kappa$

### 3 带修正的功率谱估计

如果信号的参数在某一不确定范围内的统计分布未知,那么最大似然估计是最优的估计器,但是这种估计算法较为复杂,在对实时性要求较高的 LDV 中得不到广泛的应用。能够对多普勒信号进行实时处理的方法也有很多种,如频率跟踪器、计数型处理方法、滤波器组、光子相关频谱法、数字相关器和数字快速傅里叶变换(FFT)等,各种信号处理方法的主要性能参数如表 1 所示。根据对各种信号处理方法优缺点的比较,本系统选用基于数字 FFT 的功率谱估计<sup>[10~12]</sup>作为主要的信号处理方法,主要是因为这种方法处理精度高、能够接受间断信号以及具有很强的从低信噪比的信号中提取频率的能力。

表 1 几种信号处理方法的比较

Table 1 Comparison of several signal processing methods

Method	Ability to acquire instantaneous velocity	Acceptance of interrupted signal	Ability to extract frequency from of low signal-to-noise	Accuracy	Maximal measuring frequency /MHz
Frequency tracker	Yes	Bad	Good	0.5%	50
Counting	Yes	Yes	Bad	0.5%	200
Filter bank	Yes	Yes	Very good	2%~5%	10
Photon correlator	No	Yes	Very good	1%~2%	50
Digital correlation	Yes	Yes	Very good	Better than 0.5%	100
Digital FFT	Yes	Yes	Very good	Better than 0.5%	150

基于数字 FFT 的功率谱估计算法,先对所采集信号的  $N$  个观察值  $x_N(n)$  直接进行 FFT,得到  $X_N[\exp(j\omega)]$ ,然后取其幅值的平方,再除以  $N$ ,得到其功率谱

$$P(\omega) = 1/N |X_N[\exp(j\omega)]|^2, \quad (20)$$

式中

$$X_N[\exp(j\omega)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_N(n) \exp(j\omega n), \quad (21)$$

最后将其峰值谱对应的频率作为多普勒频率的估计值。这种算法的频率分辨率为

$$\Delta f = f_s/N, \quad (22)$$

显然分辨率不够高,不能满足 LDV 的精度要求。而且直观上提高频率分辨率的两种方法都不可行: 1)降低采样频率  $f_s$  不可行,由于 LDV 常用于测量动态变化范围大的速度场,要覆盖速度的整个动态变化范围,不能减小  $f_s$ ; 2)增加进行 FFT 的观测数据长度  $N$  也不可行但在流场测量中单个散射粒子穿过测量体的时间短,可能采集到的观测数据长度受到限制,不具有普遍意义,而且增加  $N$  将增加计算量,消耗的系统资源增多。因此,必须考虑从软件上采用特殊方法对 FFT 的结果进行校正以提高频率分辨率。

频谱校正的算法很多,在此采用校正公式简单、运算量少且校正精度较高的比值校正法。其频谱修正量为

$$\Delta k = (2y_{k+1} - y_k)/(y_{k+1} - y_k), \quad (23)$$

本文多普勒信号加汉宁(Hanning)窗,  $y_k$  为频谱中

第  $k$  条谱线的幅值。

最后由功率谱估计得到的频率及比值法得到的修正量即可算出最终的频率估计值,再根据求得的前一时刻和后一时刻的频率估计值及时间间隔即可得到频率一阶变化率的估计值。

## 4 仿真与结果分析

对推导出的多普勒圆频率及其一阶变化率估计方差的 CRLB 进行计算机仿真,结果如图 2 所示,其中采样频率  $f_s=1$  MHz,观测数据长度  $N$  分别取 128, 256, 512 和 1024。由图 2 可知,多普勒圆频率及其一阶变化率估计方差的 CRLB 均随着信噪比的提高而减小。另外,在确定的信噪比下,参数估计方差的 CRLB 随着观测数据长度的增加而减小。由(22)式可知,频率分辨率  $\Delta f$  与观测数据长度  $N$  成反比, $N$  越大, $\Delta f$  越小,估计精度也就越高,多普勒圆频率及其一阶变化率估计方差的 CRLB 就越小。

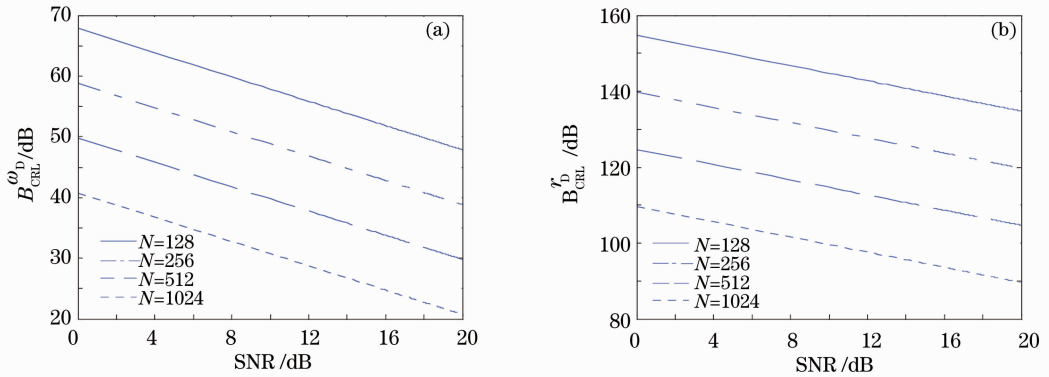


图 2 不同观测数据长度下多普勒圆频率(a)及其一阶变化率(b)估计方差的 CRLB 与信噪比的关系

Fig. 2 Dependence of CRLB of (a) Doppler circular frequency and (b) its estimation RMS of the first order rate on SNR

图 3 将文献[3, 8, 9]以及本文推导计算得到的多普勒圆频率估计方差的 CRLB 进行了比较,其中采样频率  $f_s=1$  MHz,观测数据长度  $N=1024$ ,比例因子  $\kappa=3$ 。由图 3 可见,Rife 等<sup>[3]</sup>得到的多普勒圆频率估计方差的 CRLB 最小,这是因为所建立的模型是简单的正弦信号,而且也没有考虑加速度和高斯包络的影响。王纪强等<sup>[8]</sup>得到的结果比本文研究所得的结果小,这是因为本文建立了高斯包络多普勒信号的分析模型,而高斯包络的存在会造成多普勒频谱的加宽,进而导致多普勒频率估计值的偏差更大。戈伟群<sup>[9]</sup>得到的结果也比本文研究所得的结果小,这是因为本文引入了加速度分量,而加速度的存在也会造成多普勒频谱的展宽。图 4 将王纪强等<sup>[8]</sup>和本文推导计算得到的多普勒圆频率一阶变化率估计方差的 CRLB 进行了比较,同样可以看出高

斯包络的存在使其估计方差的 CRLB 增大。

当观测数据长度一定时,待测目标的加速度越大,观测数据长度内包含的信号包络的个数就越多。

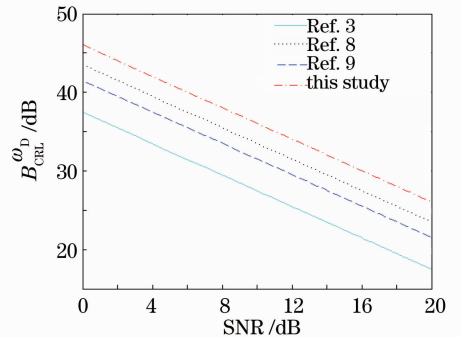


图 3 多普勒圆频率估计方差 CRLB 4 种不同结果的比较图

Fig. 3 Comparison of four different results of CRLB of Doppler circular frequency

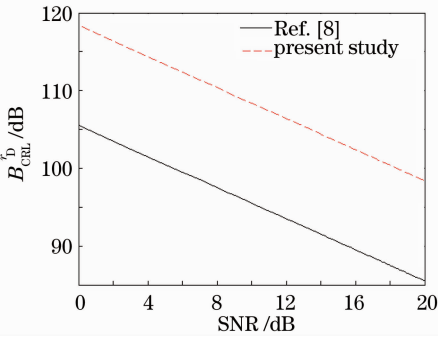


图 4 多普勒圆频率一阶变化率估计方差 CRLB 2 种不同结果的比较图

Fig. 4 Comparison of two different results of CRLBs of Doppler circular frequency's first order rate

由于比例因子  $\kappa$  代表观测数据长度和多普勒信号高斯包络的宽度之比,所以加速度越大,高斯包络的宽度就越窄,比例因子  $\kappa$  就越大。根据比例因子的定义同样可以对多普勒圆频率一阶变化率估计方差的 CRLB 的计算公式即(16)式进行简化,得

$$B_{\text{CRL}}^{\text{D}} \geq \left\{ N^5 T^4 R_{\text{SN}} \left[ \left( -\frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{4\kappa^4} \right) \exp(-2\kappa^2) + \frac{\sqrt{2\pi}}{8\kappa^2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}\kappa) - \frac{\exp(-\kappa^2)}{\sqrt{2\pi}\kappa^3 \operatorname{erf}(\sqrt{2}\kappa)} \right] \right\}^{-1}. \quad (24)$$

对于固体运动目标的多普勒信号而言,观测数据长度中通常包含多个高斯包络,固体运动目标的加速度越大,观测数据长度中包含的包络数越多。当观测数据长度  $N=1024$  时,根据(18)式和(24)式对不同比例因子  $\kappa$ (这里取  $\kappa=2,3,4,5,6$ ) 对应的多普勒圆频率及其一阶变化率的 CRLB 进行仿真计

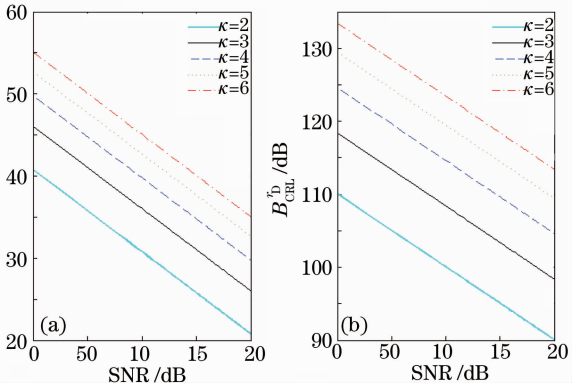
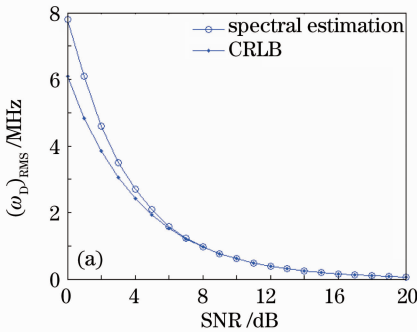


图 5 观测数据长度  $N=1024$  时不同比例因子对应的多普勒圆频率(a)及其一阶变化率(b)估计方差 CRLB  
Fig. 5 CRLB of (a) Doppler circular frequency and (b) its first order rate at different proportional factors when  $N=1024$

在不同的信噪比条件下,运用带修正的功率谱估计算法估计信号频率及其一阶变化率,并计算其均方差,将其结果与参数估计方差的 CRLB 比较,如图 6 所示。这里采样频率  $f_s=1$  MHz,信号频率  $f=200$  kHz,观测数据长度  $N=128$ 。由图 6 可知,随着信噪比的增加,多普勒圆频率及其一阶变化率估计值的方差逐渐减小,并收敛于相应的 CRLB,当信噪比大于 6 dB 时,基本达到 CRLB。

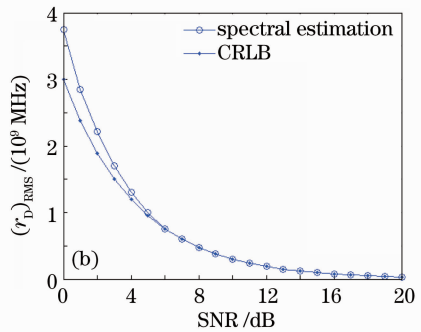


图 6  $N=128, f=200$  kHz 时,多普勒圆频率(a)及其一阶变化率(b)的谱估计方差和对应的 CRLB 随信噪比的变化关系  
Fig. 6 Dependence of the variance of (a) Doppler frequency and (b) its first order rate and the corresponding CRLBs on SNR when  $N=128$  and  $f=200$  kHz

## 5 结 论

在引入加速度分量的基础上,研究了高斯包络型多普勒信号的参数估计及估计方差的 CRLB,给出了多普勒圆频率及其一阶变化率估计方差的

CRLB 计算公式,并讨论了回波信号带修正的功率谱估计。结果表明,本文得出的多普勒圆频率的 CRLB 与 Rife 等<sup>[3]</sup>得出的适用于纯频正弦信号的结论是相互协调的;多普勒圆频率及其一阶变化率

估计方差的 CRLB 与观测数据长度、信噪比和高斯包络的宽度有关,增加观测数据长度和提高信噪比可有效减小参数估计方差的 CRLB;当观测数据长度一定时,加速度越大,高斯包络的宽度就越窄,多普勒频谱的展宽就越明显,参数估计方差的 CRLB 就越大;当信噪比增加到 6 dB 时,运用带修正的功率谱估计算法得到的多普勒圆频率及其一阶变化率估计值的方差收敛于相应的 CRLB。

### 参 考 文 献

- 1 D. B. Brayton, H. T. Kalb, F. L. Crosswy. Two-component dual-scatter laser Doppler velocimeter with frequency burst signal readout [J]. *Appl. Opt.*, 1973, **12**(6): 1145~1156
- 2 René Shov Hansen, Christian Pedersen. All semiconductor laser Doppler anemometer at 1.55  $\mu\text{m}$  [J]. *Opt. Express*, 2008, **16**(22): 18288~18295
- 3 D. C. Rife, R. R. Boorstyn. Single-tone parameter estimation from discrete-time observations [J]. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1974, **20**(5): 591~598
- 4 Qi Guoqing. Cramer Rao bounds of real sinusoid parameter estimation from discrete-time observations [J]. *J. Data Acquisition & Processing*, 2003, **18**(2): 151~155  
齐国清. 离散实正弦信号参数估计的 Cramer Rao 方差下限[J]. *数据采集与处理*, 2003, **18**(2): 151~155
- 5 Richard Bamler. Doppler frequency estimation and the Cramer-Rao bound [J]. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 1991, **29**(3): 385~390
- 6 Shen Xiong. *Laser Doppler Velocimetry and Its Application* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. 37~39

- 沈 熊. 激光多普勒测速技术及应用[M]. 北京:清华大学出版社,2004. 37~39
- 7 Sun Yusheng. *The Technology and Application of Laser Doppler Measurement* [M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Literature Publishing House, 1995. 142  
孙渝生. 激光多普勒测量技术及其应用[M]. 上海:上海科学技术文献出版社,1995. 142
- 8 Wang Jiqiang, Zhang Chunxi, Ma Zongfeng *et al.*. Cramer-Rao lower bounds of parameter estimation from laser doppler velocimetry [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(9): 1419~1422  
王纪强, 张春熹, 马宗峰 等. 激光多普勒测速参数估计的 Cramer-Rao 下限[J]. *中国激光*, 2008, **35**(9): 1419~1422
- 9 Shu Weiqun. The Cramer-Rao bound for frequency estimation from LDA measurements [J]. *Acta Metrologica Sinica*, 2003, **24**(1): 36~39  
姜伟群. 激光多普勒测速频率估计的 Cramer-Rao 下限[J]. *计量学报*, 2003, **24**(1): 36~39
- 10 Zhou Jian, Long Xingwu. Laser Doppler velocimeter for vehicle inertial navigation system [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(5): 1316~1321  
周 健, 龙兴武. 用于车载自主惯导系统的激光多普勒测速仪[J]. *中国激光*, 2010, **37**(5): 1316~1321
- 11 Zhou Jian, Long Xingwu. Research on multipoint layer-type laser Doppler self-velocimeter [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(7): 1837~1844  
周 健, 龙兴武. 多点分层差动激光多普勒自身测速仪的研究[J]. *中国激光*, 2010, **37**(7): 1837~1844
- 12 He Yan, Shang Jianhua, Liu Dan *et al.*. Heterodyne laser Doppler vibrometer for underwater acousto-optic communication [J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(1): 189~194  
贺 岩, 尚建华, 刘 丹 等. 用于水下声光通信的外差式激光多普勒振动计[J]. *中国激光*, 2009, **36**(1): 189~194