

本征函数法求解光强传输方程的相位反演方法

黄盛炆 习锋杰 刘长海 姜宗福

(国防科学技术大学光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要 提出了一种采用本征函数法求解光强传输方程的相位反演算法。相位可由拉普拉斯算子本征函数展开, 各阶本征函数的系数可以由光强沿光轴的微分和本征函数两者的积分得到, 由此实现相位恢复。给出了圆形区域和矩形区域拉普拉斯算子本征函数的解析形式, 数值模拟了在这两种区域上采用该算法实现相位恢复的过程, 结果表明该算法可以很好地实现相位恢复。

关键词 相位反演; 光强传输方程; 波前曲率传感器; 拉普拉斯算子; 本征函数

中图分类号 O438 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.1001002

Phase Retrieval Using Eigenfunctions to Solve Transport-of- Intensity Equation

Huang Shengyang Xi Fengjie Liu Changhai Jiang Zongfu

(College of Optoelectronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract An algorithm based on eigenfunctions was proposed for phase retrieval by solving transport-of-intensity equation. The phase could be expanded as a series of Laplacian's eigenfunctions, and the coefficients of eigenfunction could be obtained by the integral of eigenfunction and intensity derivative along the optical axis, then the phase was reconstructed. The analytic expressions of Laplacian's eigenfunctions on unit circle and rectangular domain were achieved. Phase retrieval by eigenfunctions on both domains was simulated, and an accurate reconstruction result could be obtained by the algorithm.

Key words phase retrieval; transport-of-intensity equation; wavefront-curvature sensor; Laplacian operator; eigenfunctions

OCIS codes 010.7350; 100.5070; 010.1080

1 引 言

1983年 Teague^[1]提出基于光强传输方程(TIE)的相位反演方法, 由于其非干涉测量、无需迭代的相位恢复算法以及实验装置简单的特点, 已经广泛应用于光学和电子显微镜^[2,3]、X射线和中子束成像^[4,5]等领域。F. Roddier^[6]在发展TIE技术的基础上, 提出的波前曲率传感技术, 已经应用于大型天文望远镜系统^[7]和眼科医学^[8]等领域。

目前求解光强传输方程的方法主要有格林

(Green)函数法^[1,9,10]、泽尼克(Zernike)模式法^[11~13]、多重网格法^[14~16]以及基于傅里叶变换^[2,17]的方法。直接采用Green函数法计算量比较大, 通常圆形区域上Green函数比较容易得到, 对于其他区域来说, 比如矩形区域, 很难得到Green函数的解析形式。Zernike模式法需要引入比较复杂的辅助函数, 通常只能适用于圆形区域。多重网格法的求解过程相对复杂, 不容易实现。基于傅里叶变换的方法主要用于方形区域的求解, 而且由于傅里

收稿日期: 2011-04-15; **收到修改稿日期**: 2011-05-13

基金项目: 国家自然科学基金(60908027)资助课题。

作者简介: 黄盛炆(1983—), 男, 博士研究生, 主要从事自适应光学技术方面的研究。

E-mail: syhuang2008@yahoo.com.cn

导师简介: 姜宗福(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事高能激光技术、光束控制及气动光学等方面的研究。

E-mail: jiangzongfu@yahoo.com.cn

叶变换满足周期性边界条件的内在特性,会导致恢复的相位出现失真^[18]。

本课题组提出了一种采用 Neumann 边界条件下二维拉普拉斯算子的本征函数求解光强传输方程的方法^[19]。该方法无需引入辅助函数,实现起来比较方便,计算量不大。本文给出了圆形和矩形区域上本征函数的解析形式,数值模拟实现了在这两种区域上的相位恢复过程。

2 本征函数法求解光强传输方程

2.1 光强传输方程

在傍轴近似条件下,光强传输方程可以表示为^[1]

$$-k \frac{\partial}{\partial z} I(\mathbf{r}, z) = \nabla_{\perp} [I(\mathbf{r}, z) \nabla_{\perp} \phi(\mathbf{r}, z)], \quad (1)$$

式中 z 为传输方向, \mathbf{r} 为垂直传输方向平面 (x, y) 上的坐标矢量, k 表示波数, $I(\mathbf{r}, z)$ 表示光轴上 z 处的光强分布, $\phi(\mathbf{r}, z)$ 表示相位分布, $\nabla_{\perp} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 表示 (x, y) 平面上的二维梯度算子。光强传输方程给出了光强沿传输方向变化和相位变化之间的关系。在波前曲率传感器中,通常可以认为光瞳 $P(\mathbf{r})$ 上的光强均匀分布 $I(\mathbf{r}, z) = I_0 P(\mathbf{r})$, 则有 $\nabla_{\perp} I(\mathbf{r}, z) = -I_0 \delta_c \mathbf{n}$, 于是有^[6]

$$-\frac{k}{I_0} \frac{\partial}{\partial z} I(\mathbf{r}, z) = P(\mathbf{r}) \nabla_{\perp}^2 \phi(\mathbf{r}, z) - \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, z)}{\partial n} \delta_c, \quad (2)$$

式中 δ_c 表示在光瞳边界 c 处的狄拉克函数, \mathbf{n} 为边界的法向矢量, $\partial \phi(\mathbf{r}, z)/\partial n$ 是待测波前 $\phi(\mathbf{r}, z)$ 沿法向矢量 \mathbf{n} 的导数, $P(\mathbf{r})$ 表示光瞳函数, 光瞳内为 1, 光瞳外为 0。如果能够测量到光强沿光轴的微分, 则可以通过求解上述的泊松方程得到所求相位。

实际测量中难以直接测量光强的微分, 通常采用两相邻面上光强的差分来近似光强的微分, 表示为

$$\left. \frac{\partial I(\mathbf{r}, z)}{\partial z} \right|_{z=0} \approx \frac{I(\mathbf{r}, \delta z) - I(\mathbf{r}, -\delta z)}{2\delta z}, \quad (3)$$

式中 $I(\mathbf{r}, \delta z)$ 为位于 $z = \delta z$ 处的光强分布, $I(\mathbf{r}, -\delta z)$ 为位于 $z = -\delta z$ 处的光强分布, δz 表示光强测量面和光瞳面之间的距离。为了得到较为准确的光强微分, 该距离的选择不宜过大^[1, 20]。

2.2 本征函数法实现相位恢复

在 Neumann 边界条件下, 二维拉普拉斯算子的本征函数 $W(\mathbf{r})$ 有如下关系:

$$\begin{cases} \nabla_{\perp}^2 W(\mathbf{r}) = -\lambda^2 W(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \sigma \\ \frac{\partial W(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, & \mathbf{r} \in c \end{cases} \quad (4)$$

式中 σ 表示光瞳区域, c 表示光瞳边界, $\nabla_{\perp}^2 = \{\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2\}$ 为光瞳面上的二维拉普拉斯算子, λ 为本征值。对应于一组本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$, 存在相应的一组本征函数 $W_1(\mathbf{r}), W_2(\mathbf{r}), \dots, W_k(\mathbf{r}), \dots$ 。这组本征函数构成了一组正交完备基, 在光瞳区域上任意的函数都能够由这组正交完备基展开, 可以表示为

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k W_k(\mathbf{r}), \quad (5)$$

式中 $\phi(\mathbf{r})$ 表示光瞳上的波前分布, a_k 为各阶本征函数的系数。在(5)式两边同时乘以 $W_k(\mathbf{r})$ 做积分, 并利用本征函数的正交性, 可以得到本征函数的系数为

$$a_k = c_k^{-1} \int_{\sigma} W_k(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d\sigma, \quad (6)$$

式中 $c_k = \int_{\sigma} W_k^2(\mathbf{r}) d\sigma$ 为归一化系数。考虑到本征函数的本征特性(4)式, (6)式变为

$$a_k = -c_k^{-1} \lambda_k^{-2} \int_{\sigma} \phi(\mathbf{r}) \nabla_{\perp}^2 W_k(\mathbf{r}) d\sigma, \quad (7)$$

利用 Green 第二定理的二维形式

$$\int_{\sigma} (u \nabla_{\perp}^2 v - v \nabla_{\perp}^2 u) d\sigma = \oint_c \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl, \quad (8)$$

并考虑到 Neumann 边界条件 $\frac{\partial W(\mathbf{r})}{\partial n} = 0$, 于是有

$$a_k = c_k^{-1} \lambda_k^{-2} \left(\oint_c W_k(\mathbf{r}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} dl - \int_{\sigma} W_k(\mathbf{r}) \nabla_{\perp}^2 \phi(\mathbf{r}) d\sigma \right), \quad (9)$$

注意到光强传输方程得到的结果(2)式, 得到

$$a_k = c_k^{-1} \lambda_k^{-2} \frac{k}{I_0} \int_{\sigma} W_k(\mathbf{r}) \frac{\partial I(\mathbf{r}, z)}{\partial z} d\sigma, \quad (10)$$

由于 $\frac{\partial I(\mathbf{r}, z)}{\partial z}$ 由(3)式近似测量得到, 利用(5)式, 实现相位恢复。

下面分别给出圆形区域和矩形区域上的二维拉普拉斯算子本征函数的表达式。

圆形区域上拉普拉斯本征函数也被称为圆谐振函数, Milton 等将其用于自适应光学系统的模拟^[21]。根据的 Milton 定义, 单位圆上的圆谐振函数可写为

$$d_n^m(\mathbf{r}, \theta) = \begin{cases} J_{\mu}(k_{\mu n} r) \cos(\mu \theta) & m > 0 \\ J_0(k_{0n} r) & m = 0 \\ J_{\mu}(k_{\mu n} r) \sin(\mu \theta) & m < 0 \end{cases}, \quad (11)$$

式中 $\mu = |m|$, $J_\mu(k_{\rho n} r)$ 表示第 μ 阶 Bessel 函数 $\mu = 0, 1, 2, \dots, k_{\rho n}$ 是 $\frac{d}{dr} J_\mu(r) = 0$ 的第 n 个正根, $n = 1, 2, \dots, k_{\rho n}^2$ 为相应的本征值。

在矩形区域上的拉普拉斯本征函数可以写为

$$W_{pq}(x, y) = \cos\left(\frac{p}{a}\pi x\right)\cos\left(\frac{q}{b}\pi y\right), \quad (12)$$

相应的本征值为 $\lambda_{pq}^2 = \pi^2\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)$, $p, q = 0, 1, 2, \dots, a, b$ 分别为光瞳在 x, y 方向的尺寸。

3 数值模拟结果

数值模拟菲涅耳衍射光传输过程, 得到不同传输距离 $\pm \delta z$ 处的光强分布, 进而由 (3) 式得到光强的微分, 由 (10) 式得到各阶本征函数的系数, 由此实现相位恢复。分别模拟了圆形和方形区域上的相位恢复。为了定量表示相位恢复的效果, 定义相对均方误差 (RMS) 为

$$\Omega_{\text{RMS}} = \left\{ \sum_{i,j} [\phi_{\text{rec}}(i, j) - \phi_{\text{orig}}(i, j)]^2 / \right.$$

$$\left. \sum_{i,j} [\phi_{\text{orig}}(i, j)]^2 \right\}^{1/2}, \quad (13)$$

式中 $\phi_{\text{rec}}(i, j)$ 表示由相位恢复算法重构的相位, $\phi_{\text{orig}}(i, j)$ 表示模拟时采用的原始相位。

3.1 圆形区域

在圆形区域上, 选取 Zernike 像差作为输入相位, 采用菲涅耳衍射模拟光传输过程。实际选取单位圆上的 Zernike 像差, 采样点数 512×512 , 波长 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$, 相位值在 $[-1, 1]$ 弧度之间变化, 光瞳面上光强均匀分布。首先采用菲涅耳衍射的卷积形式数值模拟光传输^[22], 得到不同传播距离 $\delta z = \pm 1 \text{ m}$ 处的光强分布, 利用 (3) 式近似得到光强沿传输方向的微分, 由 (10) 式计算得到各阶圆谐振函数的系数, 再由 (5) 式可以得到恢复的相位。图 1 给出了该算法对象散和慧差像差恢复的效果, 左边为原始相位, 中间为恢复算法得到的相位, 右边为两者的残差。相对均方根误差象散为 0.22%, 慧差为 0.64%, 得到了较好的恢复效果。

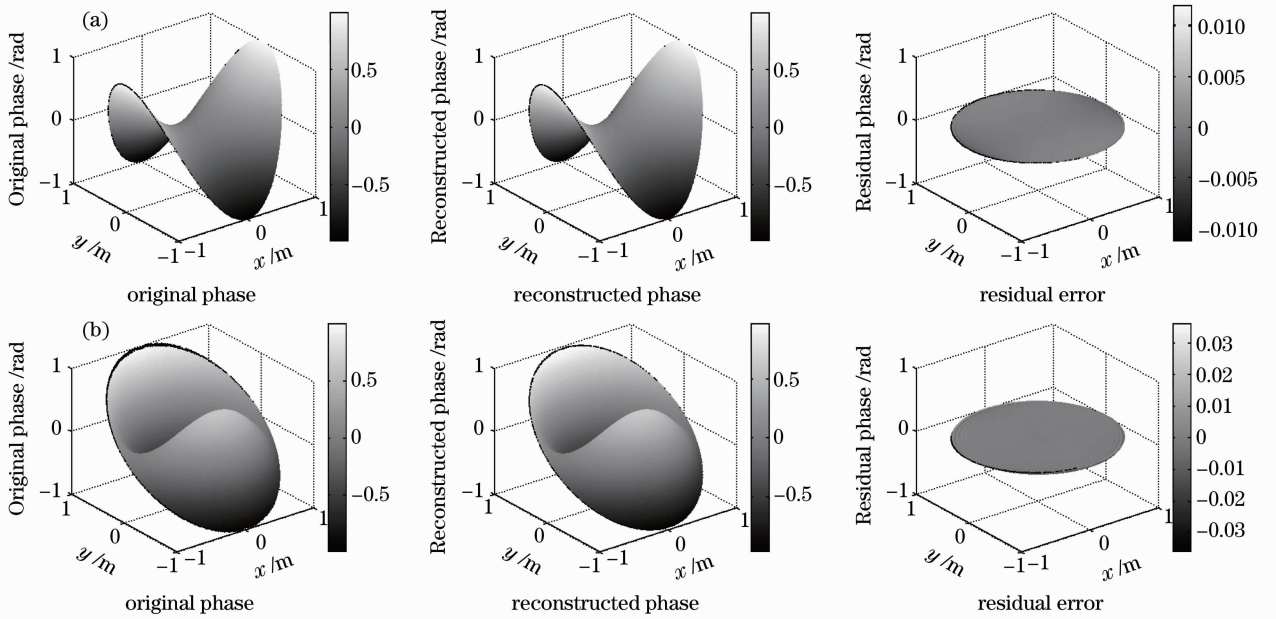


图 1 对象散和慧差的恢复结果。(a) 像散 RMS 误差值为 0.22%; (b) 慧差 RMS 误差值为 0.64%

Fig. 1 Reconstruction results of astigmatism and coma. (a) Astigmatism RMS is 0.22%; (b) coma RMS is 0.64%

对前 10 阶 Zernike 像差进行了相位恢复的模拟, 表 1 给出了各阶 Zernike 像差恢复的相对均方差, Zernike 像差采用 Noll 的排列顺序^[23]。由于 TIE 技术对活塞项不敏感, 结果中没有第 1 项活塞项。表 1 中 RMS 都较小, 表明在圆形区域上采用圆谐振函数可以较好地实现波前相位的恢复。

表 1 对前 10 阶 Zernike 像差的恢复效果 (RMS 值)

Table 1 Reconstruction results of the frist 10-order Zernike aberration (the value of RMS)

Zernike order	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Error (RMS) / %	0.10	0.10	0.31	0.16	0.22	0.64	0.64	0.30	0.30

3.2 方形区域

在方形区域上,采用 Lena 的图像作为输入相位图像。Lena 图像的大小为 $1\text{ m} \times 1\text{ m}$,采样点数 512×512 ,波长 λ 为 $0.6328\ \mu\text{m}$,相位值在 $[-1, 1]$ 弧度之间变化,输入光瞳上光强分布均匀。同样采用菲涅耳衍射的卷积形式数值模拟光传输^[22],得到不同传输距离 $\delta z = \pm 1\text{ m}$ 处的光强分布,用(3)式来

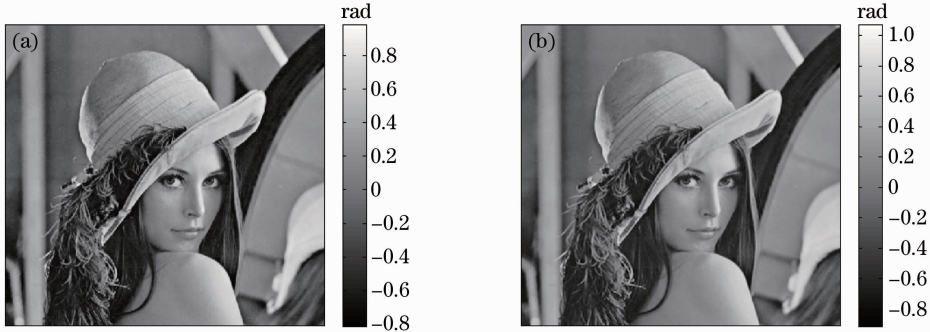


图 2 对相位图像的恢复效果,RMS 误差为 8.6%。(a)原始相位图像;(b)恢复的相位图像

Fig. 2 Reconstruction results of the phase image (RMS error of 8.6%). (a) Original phase image; (b) reconstructed phase image

4 结 论

提出了一种基于拉普拉斯算子本征函数求解光强传输方程实现相位恢复的算法,该方法简单可行。给出了圆形和矩形区域上拉普拉斯本征函数的表达式,数值模拟实现了圆形和矩形区域上的相位恢复过程,模拟结果表明该算法可以实现较好的相位恢复效果。理论上只要求得光瞳区域上的本征函数,该方法就可以实现任意连通光瞳区域上的相位恢复。对于非规则的光瞳区域,拉普拉斯算子的本征函数的求解并不容易,可以考虑先用数值求解的方法得到非规则区域上本征函数,然后采用该方法实现相位恢复。

参 考 文 献

- 1 M. R. Teague. Deterministic phase retrieval: a Green's function solution[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1983, **73**(11): 1434~1441
- 2 D. Paganin, K. A. Nugent. Noninterferometric phase imaging with partially coherent light [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **80**(12): 2586~2589
- 3 S. Bajt, A. Barty, K. A. Nugent *et al.*. Quantitative phase-sensitive imaging in a transmission electron microscope [J]. *Ultramicroscopy*, 2000, **83**(1-2): 67~73
- 4 K. A. Nugent, T. E. Gureyev, D. J. Cookson *et al.*. Quantitative phase imaging using hard X rays[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **77**(14): 2961~2964
- 5 B. E. Allman, P. J. McMahon, K. A. Nugent *et al.*. Imaging: Phase radiography with neutrons[J]. *Nature*, 2000, **408**(6809): 158~159
- 6 F. Roddier. Wavefront sensing and equation the irradiance

近似得到光强的微分,采用(12)式给出的矩形区域上拉普拉斯本征函数的形式,用(10)式计算得到本征函数的系数,实现波前相位的恢复。图 2 给出了原始相位分布以及恢复的相位图像,RMS 误差为 8.6%。在方形区域上,采用拉普拉斯本征函数的方法同样得到了较好的恢复效果。

- transport[J]. *Appl. Opt.*, 1990, **29**(10): 1402~1403
- 7 M. Watanabe, S. Oya, Y. Hayano *et al.*. Implementation of 188-element curvature-based wavefront sensor and calibration source unit for the Subaru LGSAO system[C]. *SPIE*, 2008, **7015**: 701564
- 8 F. Díaz-Doutón, J. Pujol, M. Arjona *et al.*. Curvature sensor for ocular wavefront measurement [J]. *Opt. Lett.*, 2006, **31**(15): 2245~2247
- 9 S. Woods, A. H. Greenaway. Wave-front sensing by use of a Green's function solution to the intensity transport equation[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2003, **20**(3): 508~512
- 10 Xi Fengjie, Xu Xiaojun, Wang Tiezhi *et al.*. Wavefront curvature sensor with phase defocus grating[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(2): 377~378
- 习锋杰, 许晓军, 王铁志 等. 相位光栅型波前曲率传感器[J]. *光学学报*, 2007, **27**(2): 377~378
- 11 T. E. Gureyev, K. A. Nugent. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation. II. Orthogonal series solution for nonuniform illumination[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1996, **13**(8): 1670~1682
- 12 S. Rios, E. Acosta, S. Bara. Modal phase estimation from wavefront curvature sensing [J]. *Opt. Commun.*, 1996, **123**: 453~456
- 13 V. V. Voitsekhovich. Phase-retrieval problem and orthogonal expansions: curvature sensing[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, **12**(10): 2194~2202
- 14 L. J. Allen, M. P. Oxley. Phase retrieval from series of images obtained by defocus variation [J]. *Opt. Commun.*, 2001, **199**: 65~75
- 15 Wang Xiao, Mao Heng, Zhao Dazun. Phase retrieval based on intensity transport equation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(12): 2117~2122
- 王 潇, 毛 珩, 赵达尊. 基于光强传播方程的相位恢复[J]. *光学学报*, 2007, **27**(12): 2117~2122
- 16 Xue Bindang, Zheng Shiling, Jiang Zhiguo. Phase retrieval using transport of intensity equation solved by full multigrid method

- [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(6): 1515~1518
- 薛斌党, 郑世玲, 姜志国. 完全多重网格法求解光强度传播方程的相位恢复方法[J]. *光学学报*, 2009, **29**(6): 1515~1518
- 17 T. E. Gureyev, K. A. Nugent. Rapid quantitative phase imaging using the transport of intensity equation [J]. *Opt. Commun.*, 1997, **133**(1-6): 339~346
- 18 J. Frank, S. Altmeyer, G. Wernicke. Non-interferometric, non-iterative phase retrieval by Green's functions[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2010, **27**(10): 2244~2251
- 19 Huang Shengyang, Xi Fengjie, Liu Changhai *et al.*. Eigenfunctions of Laplacian for phase estimation from wavefront gradient or curvature sensing [J]. *Opt. Commun.*, 2011, **284**: 2781~2783
- 20 D. Paganin, A. Barty, P. J. McMahon *et al.*. Quantitative phase-amplitude microscopy. III. The effects of noise[J]. *J. Microsc.*, 2004, **214**(1): 51~61
- 21 N. M. Milton, M. Lloyd-Hart. Disk harmonic functions for adaptive optics simulations[C]. *Adaptive Optics: Analysis and Methods/Computational Optical Sensing and Imaging/Information Photonics/Signal Recovery and Synthesis Topical Meetings on CD-ROM*, Technical Digest (Optical Society of America, 2005), paper AWA3
- 22 Li Junchang, Xiong Bingheng. *Theory and Calculation of Information Optics*[M]. Beijing: Science Press, 2009. 102~105
- 李俊昌, 熊秉衡. *信息光学理论与计算*[M]. 北京: 科学出版社, 2009. 102~105
- 23 R. J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(3): 207~211