

# 分数双重非线性相关器特性研究

杨秀娟<sup>1</sup> 张晓秋<sup>1</sup> 杨 明<sup>1</sup> 刘正君<sup>2</sup> 刘树田<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 哈尔滨工业大学物理系, 黑龙江 哈尔滨 150001  
<sup>2</sup> 哈尔滨工业大学自动化测量与控制工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001

**摘要** 将分数傅里叶变换引入到双重非线性相关方法中,通过对参考图像和目标图像分数傅里叶变换谱的双重非线性操作实现非线性分数相关。该方法利用非线性参数以及分数阶控制目标的形状和纹理的权重,从而实现目标相关识别的调控。该非线性分数相关系统由一个光电混合装置实现,数值仿真表明,这种光学图像识别系统的优点在于对目标的形状失真和纹理改变的分辨能力是可调节的,并且可改善相关峰的性能,具有很强的抗噪声能力。

**关键词** 图像处理;分数双重非线性相关;分数傅里叶变换;可调节的分辨能力

**中图分类号** O438.2; TP391.4 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS201131.0107002

## Properties of the Fractional Dual Nonlinear Correlator

Yang Xiujuan<sup>1</sup> Zhang Xiaoqiu<sup>1</sup> Yang Ming<sup>1</sup> Liu Zhengjun<sup>2</sup> Liu Shutian<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China  
<sup>2</sup> Department of Automation Measurement and Control Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China

**Abstract** The fractional Fourier transform (FrFT) is introduced into the dual nonlinear optical correlation. The dual nonlinear fractional correlation can be realized by the nonlinear operations on the FrFT of the reference images and the target ones. The proposed scheme gives different weights to different shapes and textures by nonlinear parameters and fractional orders. Therefore the properties of target recognition can be controlled. The dual nonlinear fractional correlator can be implemented by an opto-electronical setup. The simulation results show that the most remarkable characteristic of this system is that it has the variable and adjustable discrimination capability to shape changes and texture distortions of the objects. In addition it can improve the performances of the correlation output peak and it has better robustness to noise.

**Key words** image processing; fractional dual nonlinear correlation; fractional Fourier transform; adjustable discrimination capability

**OCIS codes** 070.2575; 070.4550; 070.4340; 070.5010

## 1 引 言

光学联合变换相关器(JTC)是实现光学模式识别的一个重要技术手段,在图像处理、目标跟踪以及人工智能等诸多领域具有重要的应用<sup>[1]</sup>。与早期的频率平面相关器(FPC)<sup>[2]</sup>相比,联合变换相关器不需要制作复杂的匹配滤波器,可以方便地实时实现。

近年来为了增强 JTC 的图像识别能力,人们提出了许多改进的结构与算法。主要集中在输入图像以及联合功率谱的非线性处理,如二值 JTC<sup>[3]</sup>、联合功率谱的预处理 JTC<sup>[4]</sup>、空变菲涅耳域 JTC<sup>[5]</sup>、联合功率谱相减 JTC<sup>[6]</sup>、联合功率谱微分 JTC<sup>[7]</sup>和基于分数傅里叶变换的分数 JTC<sup>[8]</sup>等。上述非线性 JTC 可

收稿日期: 2010-04-08; 收到修改稿日期: 2010-05-22

基金项目: 国家自然科学基金(10974039)资助课题。

作者简介: 杨秀娟(1981—),女,硕士研究生,讲师,主要从事光信息图像处理方面的研究。

E-mail: xjyang0806@163.com

导师简介: 刘树田(1962—),男,博士,教授,主要从事信息光学、非线性光学和量子光学等方面的研究。

E-mail: stliu@hit.edu.cn

称为对称型非线性相关器,即对输入信号和参考信号进行相同程度的非线性处理,这种非线性 JTC 的图像识别精度可以通过改变非线性操作的程度得以调节<sup>[9]</sup>。1999 年 Pérez 等<sup>[10,11]</sup>提出了一种双重非线性相关(DNC)方法,对输入信号和参考信号进行非对称非线性处理,从而可实现相关器图像识别分辨能力的操控。

本文将光学分数傅里叶变换(FrFT)和 DNC 相关方法结合起来,提出了一种新型的图像识别系统,即分数双重非线性相关器(FDNC)。讨论了 FDNC 的光学实现以及相关识别的性能,计算机模拟结果表明其具有可调节的分辨能力,尖锐的相关峰和更好的抗噪声能力。当 FDNC 的参数取某些特殊值时,可简化为一些特殊的滤波器和相关器形式,同时可实现去零阶的相关峰性能。通过调节 FDNC 的参数,可以很好地分辨出形状和纹理不同的图像。

## 2 分数双重非线性相关器

### 2.1 定义

传统的相关运算可以由傅里叶变换来实现。两个信号  $s(x)$  和  $r(x)$  的相关可以表示为

$$g(\xi) = s(x) \otimes r(x) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}[s(x)] \mathcal{F}^* [r(x)] \} = \mathcal{F}^{-1} \{ S(\nu) R^* (\nu) \}, \quad (1)$$

式中  $S$  和  $R$  分别表示两个信号的频谱。这种传统的相关理论虽然在很多领域都得到了广泛应用,但是它还有很多局限性,比如相关峰性能不是很好,分辨能力不能调节等。所谓双重非线性相关(DNC)是在此基础上引入两个非线性因子和一个附加函数,用来控制两个信号的傅里叶频谱。非线性因子是通过一个幂级次非线性操作函数来实现的,其定义为<sup>[10,11]</sup>

$$N_P [Z] = \begin{cases} |Z|^{P-1} Z, & |Z| > 0 \\ 0, & |Z| = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中  $Z$  表示一个复函数, $P$  是一个实变量。

为简单起见仅考虑一维的情况。令  $s(x)$  和  $r(x)$  分别表示待识别的输入信号和样本库中的参考信号,它们的傅里叶变换分别表示为  $S(\nu)$  和  $R(\nu)$ ,附加函数是一个实的、正定的权重函数  $T(\nu)$ ,作为一种附加的非线性被包含在 DNC 中,将它作用于傅里叶变换谱平面来定义一个谱平面区间。DNC 定义为

$$f_{\text{DNC}} = \mathcal{F}^{-1} \{ N_L [S(\nu)] N_M [R^* (\nu)] T(\nu) \}. \quad (3)$$

由(3)式可见,级次非线性操作函数同时作用于输入信号通道和参考信号通道。通过调节实参数  $L$  和

$M$  可以对附加函数  $T(\nu)$  所限定的谱平面区间信息进行非线性相关识别,从而获得可调节的识别能力来满足具体图像识别系统的任务需求。

将(1)式和(3)式中信号的傅里叶频谱替换成信号的分数傅里叶变换谱,可以分别定义分数相关和分数 DNC。信号  $s(x)$  的  $\alpha$  阶分数傅里叶变换(FrFT)定义为<sup>[12,13]</sup>

$$S_\alpha(\nu) = \mathcal{F}^\alpha \{ s(x) \} = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) K_\alpha(x, \nu) dx, \quad (4)$$

式中  $K_\alpha(t, \nu)$  是 FrFT 的变换核

$$K_\alpha(x, \nu) = \sqrt{\frac{1 - i \cot \phi_\alpha}{2\pi}} \times \exp\left(i \frac{x^2 + \nu^2}{2} \cot \phi_\alpha - i x \nu \csc \phi_\alpha\right), \quad (5)$$

式中  $\phi_\alpha = \alpha\pi/2$  为 FrFT 的变换角。令输入信号  $s(x)$  和参考信号  $r(x)$  的  $\alpha_1$  阶分数傅里叶变换分别表示为  $S_{\alpha_1}(\nu)$  和  $R_{\alpha_1}(\nu)$ ,通过引入非线性因子  $N_P(Z)$  以及权重函数  $T(\nu)$  作用于分数傅里叶变换谱平面来定义一个拟处理的谱平面区间,可以定义分数双重非线性相关(FDNC)

$$f_{\text{FDNC}_{L,M,\alpha_1,\alpha_2}^{T(\nu)}} = \mathcal{F}^{-\alpha_2} \{ N_L [S_{\alpha_1}(\nu)] N_M [R_{\alpha_1}^*(\nu)] T(\nu) \}. \quad (6)$$

(6)式表示的  $f_{\text{FDNC}}$  是 DNC 在分数傅里叶变换域中的推广,分数阶次  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  提供了附加的调节参数。很显然 FDNC 具有如下性质:

1) 当  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  时,FDNC 退化为 DNC,即

$$f_{\text{DNC}_{L,M,\alpha_1,\alpha_2}^{T(\nu)}} = \mathcal{F}^{-1} \{ N_L [S(\nu)] N_M [R^*(\nu)] T(\nu) \}. \quad (7)$$

2) 当  $L=1, M=1, T(\nu)=1$  时,FDNC 就变成分数相关(FC):

$$f_{\text{FC}_{L,M,\alpha_1,\alpha_2}^{T(\nu)}} = \mathcal{F}^{-\alpha_2} [S_{\alpha_1}(\nu) R_{\alpha_1}^*(\nu)]. \quad (8)$$

上式是分数相关<sup>[14,15]</sup>的定义式。朱邦和等<sup>[8]</sup>对 FC 作了较深入的研究,并且对 FC 的相关峰进行了详细的推导和分析。从他们的推导可以得出,FC 的相关峰和分数傅里叶变换的级次有密切的联系。

### 2.2 光学实现

由 FDNC 的定义式(6)式可知,FDNC 运算包括两部分,一部分是输入图像  $s(x)$  和参考图像  $r(x)$  的  $\alpha_1$  阶分数傅里叶变换,另外一部分是  $-\alpha_2$  阶的分数傅里叶变换,这两部分均可以采用 Lomann I 型单透镜结构实现<sup>[13]</sup>。FDNC 可以用一套简单的光电混合装置实现,如图 1 所示。

在图 1 中,输入图像  $s(x)$  和参考图像  $r(x)$  由

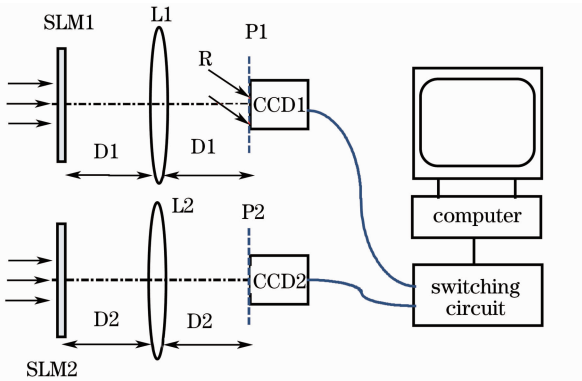


图 1 分数双重非线性相关器光电混合装置

Fig.1 Opto-electronic hybrid setup of the fractional dual nonlinear correlator

开关电路控制分时输入到空间光调制器 SLM1 上,并由透镜 L1 分别实现他们的分数傅里叶变换.由于图像的分数傅里叶谱为复振幅分布,因此需要采用在线全息的方法<sup>[16]</sup>在 CCD1 上记录四幅干涉图(参考光  $R$  相对于傅里叶变换的复振幅有  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  的相位延迟),由计算机计算出  $S_{\alpha_1}(\nu)$  和

$R_{\alpha_1}^*(\nu)$  并进行相应的非线性操作求出  $N_L[S_{\alpha_1}(\nu)]N_M[R_{\alpha_1}^*(\nu)]T(\nu)$ . 计算结果再由开关电路反馈给空间光调制器 SLM2. 此处的 SLM2 应该具有振幅和相位双重的调制能力,即可以同时显示振幅和相位信息.最后由透镜 L2 实现  $-\alpha_2$  阶分数傅里叶变换实现 FDNC 相关运算,在 CCD2 接收平面 P2 处探测相关结果.

### 3 仿真结果

利用 FDNC 来处理一组字符图像,并且和 DNC 进行比较,进而对 FDNC 的特性作更详细的研究和说明.图 2 给出模拟中用到的二进制字符图像.这些二进制字符图像在形状和纹理上有一定的联系.把纹理相同的字符用相同的下标表示.其中图 2(b),图 2(e)和图 2(f)纹理相同,而图 2(a)和图 2(d)纹理相同.对于 FDNC,选用不同的参数,就会得到不同的相关运算模式,而不同相关模式的相关峰输出情况差别很大.调节 FDNC 的参数,可以优化相关峰的输出特性,同时获得不同的分辨能力,既能识别形状同时也能够识别内在的纹理.

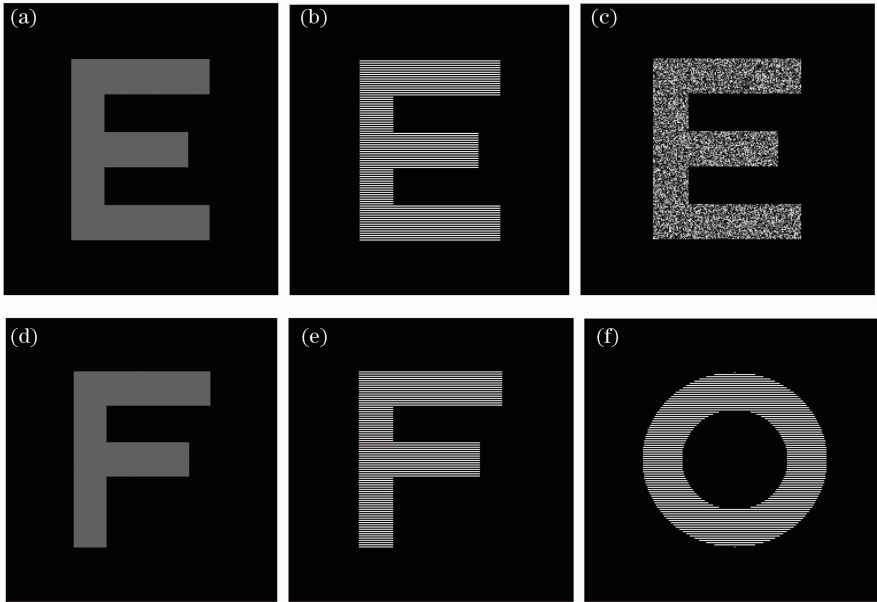


图 2 待分辨的一组字符图像。(a)  $E_0$ , (b)  $E_S$ , (c)  $E_R$ , (d)  $F_0$ , (e)  $F_S$ , (f)  $O_S$

Fig.2 Images of characters to be recognized. (a)  $E_0$ , (b)  $E_S$ , (c)  $E_R$ , (d)  $F_0$ , (e)  $F_S$ , (f)  $O_S$

当  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  时,FDNC 退化到 DNC,再令  $T(\nu) = 1$ ,改变  $L$  和  $M$  的值,可以得到一些相关器形式.当  $L = M = 1$  时,得到经典的匹配滤波器(CMF).当  $L = 1, M = 0$  时,得到相位滤波器(POF);当  $L = 1, M = -1$  时,得到反转滤波器(IF);而当  $L = M = 0$  时,将会得到纯相位相关器

(PPC). 这些相关模式的相关峰情况和分辨能力是不一样的。

#### 3.1 相关峰输出结果比较

先以图 2(a)和(b)所示的字符图象分别作为 FDNC 的参考图象和输入图像,比较各种参数不同情况下 FDNC 的输出结果,并与 DNC 结果比较。

为了测试相关器的性能,采用了相关峰强度(COPI)、峰的锐度(PCE)和分辨能力(DC)等性能参数来评价相关器的性能,COPI和PCE定义如下

$$f_{COPI} = \max |c(x, y)|^2, \quad (9)$$

式中  $c(x, y)$  是相关输出在  $(x, y)$  处的取值。理想情况下,COPI 位于  $(x, y) = (0, 0)$  处。

$$f_{PCE} = f_{COPI} / E_{output}, \quad (10)$$

式中  $E_{output}$  代表整个相关输出平面的总能量。PCE 反映了相关峰的尖锐程度,即 PCE 值越大,相关峰

越尖锐,说明确定探测物体位置的性能越好。

图 3 及表 1 给出了 FDNC 退化到传统的 CMF, POF 以及 PPC 相关器时的相关峰以及其 COPI 和 PCE 参数。CMF 的相关峰锐度比较差,且存在着许多旁瓣。POF 和 PPC 的相关峰值不够强,但相关峰的锐度明显比 CMF 有较大改善。其中 PPC 相关峰的锐度在三个相关器中最高,这一点可以从表 1 中看出。

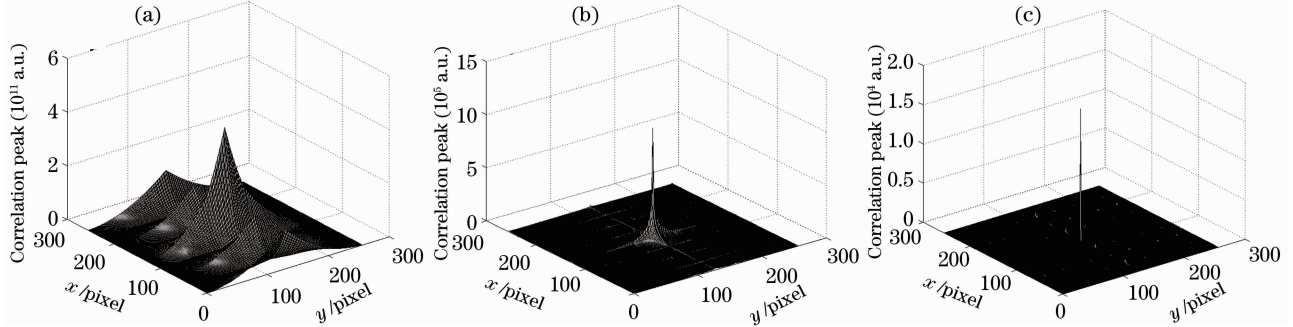


图 3 三种不同的传统相关器输出结果。(a) CMF, (b) POF, (c) PPC

Fig. 3 Output of three classical correlators. (a) CMF, (b) POF, (c) PPC

表 1 不同参数的 DNC 的相关峰性能比较

Table 1 Performances of the correlation output peak of different parameters

Correlation type	Performance comparison	
	COPI	PCE
CMF ( $L=M=1$ )	$4.0942 \times 10^{11}$	$2.3422 \times 10^{-4}$
POF ( $L=1, M=0$ )	$1.0374 \times 10^6$	0.0088
PPC ( $L=M=0$ )	$1.6733 \times 10^4$	0.2553

图 4 中给出了 DNC 和 FDNC 的数值模拟结果。图 4(a)给出了当  $L=-1, M=1$  时 DNC 的相关输出结果。DNC 可以得到很高而且较锐利的相关峰值,但在通常情况下会伴随有较多的旁瓣。FDNC 可以在很大程度上改善相关峰的特性以减少旁瓣,而且能保持较高较锐利的相关峰值。图 4(b)为  $L=M=1, \alpha_1=0.5, \alpha_2=1$  时 FDNC 输出的结果,从图 4 可以看出相关峰的 COPI 值与 CMF 具有相

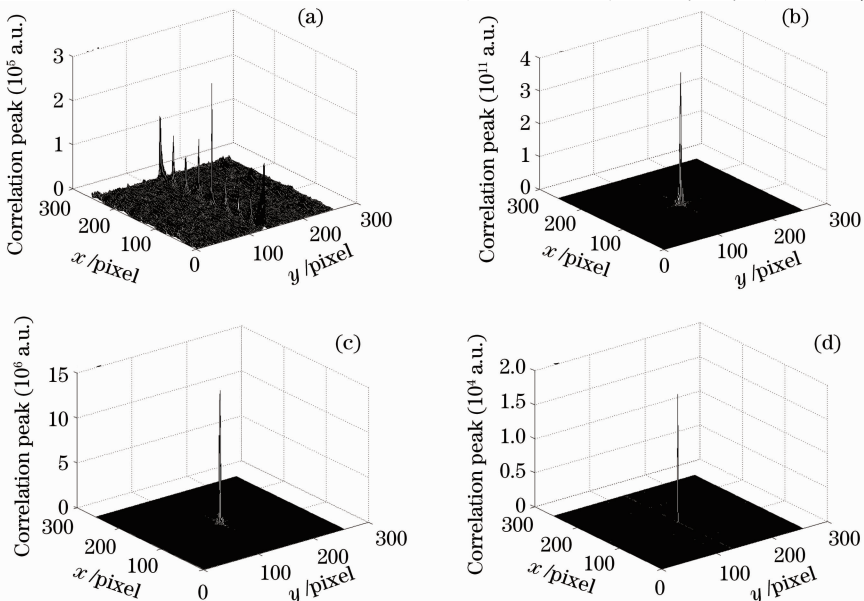


图 4 FDNC 与 DNC 的输出结果比较。(a) DNC 输出结果, (b), (c), (d) FDNC 输出结果

Fig. 4 Outputs of FDNC and DNC. (a) output of DNC, (b), (c) and (d) output of FDNC

同的量级，而其 PCE 值可以和 PPC 同量级。图 4(c)和 4(d)分别为  $L=1, M=0, \alpha_1=0.6, \alpha_2=1$  以及  $L=-2, M=2, \alpha_1=1, \alpha_2=0.005$  时 FDNC 的输出。同样具有较高较锐的相关峰值。表 2 给出了几组 FDNC 的 COPI 和 PCE 典型值。

表 2 FDNC 与 DNC 的相关峰性能比较

Table 2 Performances of the correlation output peak of FDNC and DNC

Correlation type				Performance comparison	
$\alpha_1$	$\alpha_2$	$L$	$M$	$f_{COPI}$	$f_{PCE}$
0.5	1	1	1	$3.9994 \times 10^{11}$	0.1063
0.6	1	1	0	$1.4718 \times 10^7$	0.1252
0.8	1	0	0	$1.8718 \times 10^4$	0.2856

### 3.2 可调节的分辨能力

DNC 和 FDNC 最大的优点为其分辨能力可以由非线性操作来控制。对于 FDNC 而言，分数傅里叶变换的阶次也可以作为调节参数，从而增加了调控的自由度。分辨能力定义为

$$f_{DC} = \left| 1 - \frac{f_{CC}}{f_{AC}} \right|, \quad (11)$$

式中  $f_{CC}$  和  $f_{AC}$  分别表示互相关和自相关的强度值。在文中，设定一个阈值  $U=0.5$ ，当输入的待识别目

标和参考目标的互相关峰强度值与参考目标的自相关峰强度值的差大于参考目标的自相关峰强度值的 50% 时(即  $f_{DC} > U$ )，表示系统认为输入目标与参考目标不一样，即系统不能识别输入目标；反之，表示系统认为输入目标与参考目标一样，即系统能够识别输入目标。

DNC 可以通过调节  $L$  和  $M$  的值来控制其分辨能力，但这种调节能力在识别带有不同纹理的图形时会产生较大的偏差。表 3 是以  $E_0$  作为参考目标，在  $L$  和  $M$  取不同值时 DNC 相关的结果。表 3 带下划线的值表示输入目标被认为与参考目标相同，即系统不能分辨出输入目标和参考目标。由此可见，通过调节 DNC 的分辨能力来进行不同精度的目标识别不太方便。

由于 FDNC 增加了分数阶次参数  $\alpha_1, \alpha_2$ ，因此在某种程度上改善了相关器的调控性能。这种调控操作源于信号的分数傅里叶变换谱。表 4 是用 FDNC 识别的结果。其中  $E_0$  仍作为参考目标对其他字符图像进行判别，此处  $T(\nu)=1$  和  $\alpha_1=1/2$  保持不变。让  $\alpha_2$  从 6/16 到 12/16，以步长 1/16 递增。由表 4 可见，输入图像可以被逐一地分辨出来。

表 3 DNC 在不同参数下识别能力比较

Table 3 Discrimination capability for DNC with different parameters

Correlation					$f_{DC}$					
$L$	$M$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$T$	$E_0$	$E_S$	$E_R$	$F_0$	$F_S$	$O_S$
2	2	1	1	1	0	0.0710	0.0996	0.0784	0.1315	0.0831
1	1	1	1	1	0	0.0263	0.0372	0.0290	0.0495	0.0694
1	0	1	1	1	0	0.0407	0.1204	0.0782	0.1225	0.3527
1	-1	1	1	1	0	0.215	0.2309	0.0881	0.0787	0.2769
0	0	1	1	1	0	0.2816	0.9002	0.1159	0.3429	0.8096
0	1	1	1	1	0	0.0675	0.2444	0.0574	0.1147	0.3958
-1	1	1	1	1	0	0.2359	0.9304	0.0379	0.2596	0.8484

表 4 FDNC 不同的相关模式下识别能力比较

Table 4 Discrimination capability for some filtering methods included in the FDNC model

Correlation					$f_{DC}$					
$L$	$M$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$T$	$E_0$	$E_S$	$E_R$	$F_0$	$F_S$	$O_S$
-1	1	1/2	6/16	1	0	1.0004	1.7243	9.3949	4.3767	21.319
-1	1	1/2	7/16	1	0	0.3763	0.9601	5.1694	2.7655	12.069
-1	1	1/2	8/16	1	0	0.1561	0.3411	2.9171	1.5015	6.4534
-1	1	1/2	9/16	1	0	0.0460	0.0662	1.4063	0.5171	3.0049
-1	1	1/2	10/16	1	0	0.0649	0.0796	0.6991	0.3138	1.0836
-1	1	1/2	11/16	1	0	0.0177	0.0518	0.3237	0.0682	0.6339
-1	1	1/2	12/16	1	0	0.0165	0.0675	0.0691	0.0468	0.3706

通过上面的讨论可以看出,FDNC 是 DNC 很好地改进和扩展,有效地提高了 DNC 的分辨能力和识别精度,而且调节起来较方便。

### 3.3 抗噪能力分析

FDNC 不仅具有较好的可控目标识别能力,同时具有良好的噪声稳健性。图 5(a)以 Lena 图像(128 pixel×128 pixel)作为数值模拟的参考图像,它被放置在 256 pixel×256 pixel 的背景框中央。图 5(b)是一幅 256 pixel×256 pixel 的输入图像,其中除了 Lena 图像之外,还包含了一幅 Elaine 图。在输入图像中加入强度为 0.5 的椒盐噪声,如图 5(c)所示,利用参考图像 5(a)进行识别。

相关识别的结果由图 6 给出。图 6(a)是在无噪声条件下得到的输出结果,相关峰值  $6.5538 \times$

$10^{13}$ ,锐度为 0.0509,可易识别出正确目标和错误目标,且峰值很高。图 6(b)为存在噪音情况下识别的结果,此时选择  $L=-1, M=1, \alpha_1=0.5, \alpha_2=0.005$ 。在此情况下,目标图像仍然可以精确地识别出,其相关峰的峰值和锐度基本保持在原来的量级。在错误目标的位置上的相关峰也有所提高,但其影响完全可以忽略。取 50 个强度均为 0.5 的椒盐噪声输入样品,可得其信噪比 SNR 为 35.1053,而 CMF 处理相同情况的信噪比仅为 4.4879,即使抗噪能力较好的 POF 的信噪比也仅为 5.5507。由此可以看出具有多个调节参数的 FDNC 的抗噪声性能较高。如果进一步增加非线性系数的值或分数阶再减小,会有更佳的效果。



图 5 测试 FDNC 抗噪性能时采用的参考图像(a),待识别图像(b)和加入椒盐噪音的待识别图像(c)  
Fig. 5 Reference image (a), images to be recognized (b) and the input image with salt-pepper noise (c) for testing the noise robustness of FDNC

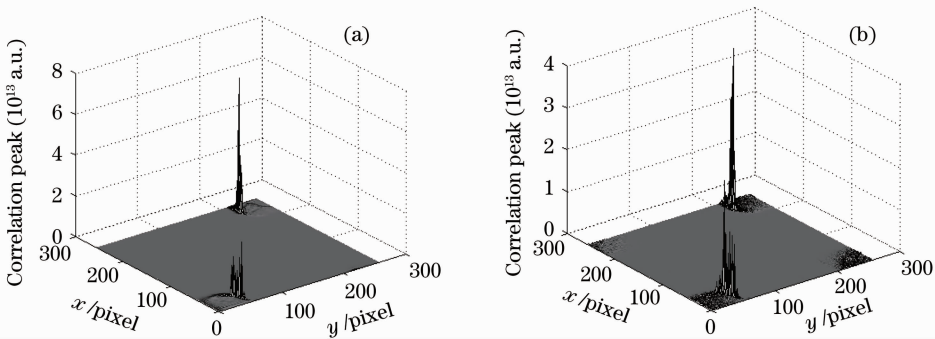


图 6 无噪音 (a) 和有噪音 (b) 情况下 FDNC 相关输出的结果  
Fig. 6 Correlation output of FDNC without noise (a) and with noise (b)

## 4 结 论

研究了一种基于分数傅里叶变换的双重非线性相关器—分数双重非线性相关器,讨论了 FDNC 与其他相关器的联系和区别,提出实现分数双重非线性相关器的光电混合装置。通过数值模拟分析了分数双重非线性相关器的性能,特别是和双重非线性相关器的性能作了一些比较。分数双重非线性相关

器比双重非线性相关器具有更尖锐的相关峰,并具有更多可调节的参数,分辨能力有所提高。我们还对分数双重非线性相关器的抗噪声特性进行了数值研究,结果表明分数双重非线性相关器具有较强的抗噪声本领。

### 参 考 文 献

- 1 B. Javidi. Nonlinear joint power spectrum based optical

- correlation[J]. *Appl. Opt.*, 1989, **28**(12): 2358~2367
- 2 A. Vander Lugt. Signal detection by complex spatial filtering [J]. *IEEE Trans. Info. Theory*, 1964, IT-10: 139~145
- 3 B. Javidi, C. Kuo. Joint transform image correlation using a binary spatial light modulator at the Fourier plane [J]. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(4): 663~665
- 4 M. S. Alam, O. Perez, M. A. Karim. Preprocessed multi-object joint transform correlation [J]. *Appl. Opt.*, 1993, **32**(17): 3102~3107
- 5 Deng Shaogeng, Liu Liren, Lang Haitao *et al.*. Space-variant Fresnel joint transform correlator[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(4): 621~624  
邓绍更, 刘立人, 郎海涛 等. 空变菲涅耳联合变换相关器[J]. *光学学报*, 2006, **26**(4): 621~624
- 6 D. Cheng, P. Andres, F. T. S. Yu. Removal of intra-class associations in joint transform power spectrum [J]. *Opt. Commun.*, 1993, **99**(1): 7~12
- 7 Chen Huaixin, Chen Zhenpei, Liu Xin. Joint transform correlation based on double second-order differentials[J]. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(10): 1342~1348  
陈怀新, 陈祯培, 刘馨. 基于双二次微分的联合变换相关识别[J]. *光学学报*, 1998, **18**(10): 1342~1348
- 8 B. Zhu, S. Liu, L. Han *et al.*. Nonlinear joint fractional transform correlator [J]. *Appl. Opt.*, 2001, **40**(17): 2836~2843
- 9 L. P. Yaroslavsky, E. Marom. Nonlinearity optimization in nonlinear joint transform correlators [J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(20): 4816~4822
- 10 E. Pérez, M. S. Millán, K. Chalasinska-Macukow. Pattern recognition with variable discrimination capability by dual nonlinear optical correlation [J]. *Opt. Commun.*, 1999, **161**(1-3): 115~122
- 11 E. Pérez, M. S. Millán, K. Chalasinska-Macukow. Optical pattern recognition with adjustable sensitivity to shape and texture [J]. *Opt. Commun.*, 2002, **202**(4-6): 239~255
- 12 D. Mendlovic, H. M. Ozaktas. Fractional Fourier transform and their optical implementation I [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(9): 1875~1881
- 13 W. Lohmann. Image rotation, Wigner rotation and the fractional Fourier transform [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(10): 2181~2186
- 14 D. Mendlovic, H. M. Ozaktas, A. W. Lohmann. Fraction correlation [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(2): 303~309
- 15 D. Menklovic, Y. Bitran, R. G. Dorsch. Optical fractional correlation: experimental results [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, **12**(8): 1665~1670
- 16 I. Yamaguchi, T. Zhang. Phase-shifting digital holography [J]. *Opt. Lett.*, 1997, **22**(16): 1268~1270