

文章编号: 0253-2239(2010)08-2377-06

初始波前曲率对强非局域介质中光束演化的影响

王玉青 钟东洲 黄 东

(五邑大学信息工程学院, 广东 江门 529020)

摘要 通过变分法,研究了在真实的非局域介质中当响应函数为 e 指数衰减型时具有初始波前曲率的光束的传输特性,并得到了光束各参数演化的解析解。研究发现,不论初始输入功率大小如何,正的初始波前曲率均会导致光束先展宽,而负的初始波前曲率则导致光束先压缩。对于具有不同初始波前曲率的光束,在某一确定的输入功率处,其束宽的演化曲线周期性的相交,而这些交点处恰是无初始波前曲率的光束压缩或展宽的极值处,通过和 Snyder 等提出的强非局域孤子模型的结果进行了比较,发现这种现象是 Snyder-Mitchell 的线性模型中所不存在的。

关键词 非线性光学;非局域非线性薛定谔方程;变分法;空间光孤子;波前曲率

中图分类号 O437.5 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103008.2377

Influence of Phase-Front Curvature for an Optical Beam in Strongly Nonlocal Media

Wang Yuqing Zhong Dongzhou Huang Dong

(School of Information Engineering, Wuyi University, Jiangmen, Guangdong 529020, China)

Abstract The evolution of the optical beam with initial phase-front curvature is studied in the strongly nonlocal nonlinear media with exponential-decay response. The analytical solutions are obtained by employing the variational approach. It is found that no matter how high the input power is, the beam is initially expanded for the positive phase-front curvature, and initially contracted for the negative phase-front curvature. For a fixed input power, the curves of the beam width with different initial phase-front curvatures intersect periodically, and interestingly, at these very cross points the optical beams with zero phase-front curvatures happen to either expand to its maximum or contract to its minimum, which do not exist in the Snyder-Mitchell linear model through the comparison between our model with Snyder's strong nonlocal solitons model.

Key words nonlinear optics; nonlocal nonlinear Schrödinger equation; variational method; spatial optical soliton; phase-front curvature

1 引 言

非局域介质中,空间光孤子的传输由非局域非线性薛定谔方程(NNLSE)描述。自从 Snyder 和 Mitchell^[1]的革命性创举后,由于其在全光信息处理方面的潜在应用^[2,3],无论是从理论上^[4~12]还是实验上^[13~15]空间光孤子都得到了广泛的研究。

迄今为止,对光孤子的研究主要集中在束腰入射的情况,而实际上使光束完全在束腰处入射非常困难。郭旗等^[6]在对 Snyder-Mitchell 模型中有初

始波前曲率的光束的传输特性进行研究后发现:当光束的初始波前曲率不为零时,即使在临界功率处入射也不存在孤子状态传输,因此初始波前曲率在光束的演化过程中起着举足轻重的作用,不能被忽略。众所周知,当初始入射功率小于(或大于)临界功率时光束将会先展宽(或压缩)^[1,4],并且据文献^[6,16]知,正的波前曲率将使展宽效应大于压缩效应而使光束先展宽,而负的波前曲率将使压缩效应大于展宽效应而使光束先压缩,但是这些结果的得

收稿日期: 2009-10-13; 收到修改稿日期: 2010-01-04

基金项目: 广东高校优秀青年创新人才培养项目(30717003)资助课题。

作者简介: 王玉青(1982—),女,硕士,助教,主要从事非线性光学传输方面的研究。E-mail: wangyq123@163.com

出都基于非线性响应函数为高斯分布情况,那么若响应函数为 e 指数衰减型分布光束又将如何演化,本文将对具有初始波前曲率的光束在此类介质中的传输特性进行详细研究。

2 传输模型

傍轴光束在非局域非线性介质中的传输遵循非局域非线性薛定谔方程^[4,16,17]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \psi \int R(x-x') |\psi(x',z)|^2 dx' = 0, \quad (1)$$

式中 $\psi(x,z)$ 为归一化的傍轴近似光束函数, x 是按光束初始束宽归一化之后的横向空间坐标, z 是按瑞利距离归一化的纵向传输坐标, $R(x)$ 是实对称的非线性响应函数,且 $R(x)$ 满足归一化条件 $\int R(x) dx = 1$ 。

对于(1+1)维的向列相液晶,响应函数具有 e 指数衰减型 $R(x) = \frac{1}{2a_m} \exp\left(-\frac{|x|}{a_m}\right)$, 其中 a_m 代表响应函数的特征宽度, a_m 越大,非局域程度越强,反之越弱。

3 解析结果

尽管 e 指数的响应函数在其中心处不可导,强非局域情况下仍可将其进行泰勒展开,则 $R(x)$ 的表达式变为^[17]

$$R(x) \approx \frac{1}{2a_m} \left(1 - \frac{|x|}{a_m} + \frac{x^2}{2a_m^2}\right). \quad (2)$$

已有研究表明,强非局域介质中稳定传输的光束具有高斯型分布,因此,假设方程(1)具有高斯型试探解:

$$\psi(x,z) = A(z) \exp\left[-\frac{x^2}{2a(z)^2} + ic(z)x^2 + i\theta(z)\right], \quad (3)$$

式中 $a(z)$ 为光束的束宽, $c(z)$ 为光束的波前曲率, $A(z)$ 为试探解的振幅, $\theta(z)$ 为试探解的相位。

根据变分原理,方程(1)可由如下的拉格朗日密度函数描述^[8,9,12,17]:

$$L_d = \frac{i}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^2 \int R(x-x') |\psi(x',z)|^2 dx'. \quad (4)$$

将(2)式和(3)式代入方程(4),对横向坐标进行积分并运用变分法可得各试探解参数所服从的拉格朗日欧拉方程,经整理可得各参数满足的演化方

程^[8,9,12,17]:

$$A^2 = \frac{P_0}{\sqrt{\pi}a}, \quad (5)$$

$$\frac{da}{dz} = 2ac, \quad (6)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{1}{2a^2} - \frac{P_0}{8a_m^3} (4\sqrt{\pi}a_m^2 - 3\sqrt{2}a_m a + \sqrt{\pi}a^2), \quad (7)$$

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = \frac{1}{a^3} - \frac{P_0}{2\sqrt{\pi}a_m^3} (\sqrt{2}a_m - \sqrt{\pi}a). \quad (8)$$

方程(8)可等效为经典力学中的牛顿第二定律,其中等效粒子的质量为 1, a 和 z 分别可等效为空间和时间坐标,等效力 $F = \frac{1}{a^3} - \frac{P_0}{2\sqrt{\pi}a_m^3} (\sqrt{2}a_m - \sqrt{\pi}a)$, 由于 F 为保守力,则等效势能 V 可由保守力 F 推导得出^[4] $F(a) = -dV(a)/da$ 。

如果光束恰在其束腰处入射,则光束的初始曲率半径为无穷大,因此其初始曲率为零,束宽函数的切线方向和传输方向相平行,初始速度 $\left. \frac{da}{dz} \right|_{z=0} = 0$,

此时若 $F=0$,则光束在演化过程中其束宽将保持不变,即 $a=1$,从而形成空间光孤子状态,称此时光束的功率为临界功率,有 $P_c = \frac{2\sqrt{\pi}a_m^3}{\sqrt{2}a_m - \sqrt{\pi}}$;若光束偏离其束腰处入射,则光束的曲率半径和曲率值均为有限值,束宽函数的切线方向和传输方向不相平行,

则初始速度 $\left. \frac{da}{dz} \right|_{z=0} = B \neq 0$,此时若 $F=0$,光束将具有初始动能 $T_0 = B^2/2$ 。考虑一般情况,即 $B \neq 0$ 时光束的传输特性。

根据能量守恒原理 $T+V=T_0$,可得^[4,17]:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{da}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{a_b^4} - \frac{P_0}{2a_m^3} \right) [(a-a_b)^2 - (1-a_b)^2] = \frac{B^2}{2}, \quad (9)$$

式中 $a_b = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + t} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\delta}$, $\sigma = -\frac{2a_m}{\sqrt{2\pi}}$,

$$\delta = \left(\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + t} \right)^2 - 2t + \frac{\sigma t}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + t}},$$

$$t = \sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} - \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}},$$

$$p = -\frac{8a_m^3}{P_0}, \quad q = \frac{4a_m^5}{\pi P_0}.$$

解方程(9)可得光束束宽的演化满足如下规律:

$$a(z) = a_b + \frac{B}{\beta} \sin(\beta z) + (1 - a_b) \cos(\beta z), \quad (10)$$

$$\text{式中 } \beta = \sqrt{\frac{3}{a_b^4} - \frac{P_0}{2a_m^3}}.$$

将(10)式代入方程(6)和(7)中可分别解得

$$\begin{aligned} \theta(z) = & -\frac{B\beta a_b [1 - \cos(\beta z)] + [B^2 + \beta^2 (1 - a_b)] \sin(\beta z)}{2[B^2 + \beta^2 (1 - a_b)][\beta a_b + B \sin(\beta z) + \beta(1 - a_b) \cos(\beta z)]} + \\ & \frac{\beta^2 a_b \left\{ \arctan\left(\frac{B}{\sqrt{-B^2 - \beta^2 + 2\beta^2 a_b}}\right) - \arctan\left[\frac{B + (2a_b - 1) \tan(\beta z/2)}{\sqrt{-B^2 - \beta^2 + 2\beta^2 a_b}}\right] \right\}}{(-B^2 - \beta^2 + 2\beta^2 a_b)^{3/2}} - \\ & \frac{\sqrt{\pi} P_0 B (1 - a_b) \cos(2\beta z)}{16\beta^2 a_m^3} + \frac{\sqrt{\pi} P_0 [\beta^2 (a_b - 1)^2 - B^2] \sin(2\beta z)}{32\beta^2 a_m^3} - \\ & \frac{[BP_0 \cos(\beta z) - \beta P_0 (1 - a_b) \sin(\beta z)] (2\sqrt{\pi} a_b - 3\sqrt{2} a_m)}{8\beta^2 a_m^3} + \frac{\sqrt{\pi} P_0 z}{2a_m} + \\ & \frac{\sqrt{\pi} P_0 [B(1 + Bz + 3a_b) + \beta^2 z(1 - 2a_b + 3a_b^2)] - 6\sqrt{2} a_m P_0 (B + \beta^2 a_b z)}{16\beta^2 a_m^3}. \quad (12) \end{aligned}$$

初始 $z=0$ 时, $c(0)=B/2, \theta(0)=0$, 所以光束的初始相位为 $\varphi(0)=B/2x^2$. 将方程(10)~(12)代入到方程(3)中可得到解的具体形式, 其中 a, c 和 θ 分别由方程(10), (11)和(12)表示. $z=0$ 时满足初始条件:

$$\psi(x, 0) = A(0) \exp\left[-\frac{x^2}{2a(0)^2} + ic(0)x^2\right]. \quad (13)$$

4 对解析结果的讨论

由以上分析可看出, 当 $B \rightarrow 0$ 时, 此结果和文献[17]的结果一致, 此时若初始入射功率 P_0 等于临

参数:

$$c(z) = \frac{B \cos(\beta z) - \beta(1 - a_b) \sin(\beta z)}{2\left[a_b + \frac{B}{\beta} \sin(\beta z) + (1 - a_b) \cos(\beta z)\right]}, \quad (11)$$

界功率 P_c , 光束即保持孤子状态传输, 但是对于更普遍的情况 $B \neq 0$ 时, 光束在传输过程中将具有和孤子不同的特性.

4.1 波前曲率对光束演化的影响

光束束宽的演化如图 1 所示. 为方便, 以下所有图中保持非局域长度 $a_m = 10$ 不变.

由图 1 分析可知, 无论初始入射功率多大, 对于正的波前曲率, 光束均会先展宽, 而对于负的波前曲率, 光束均会先压缩, 波前曲率越大, 光束展宽得越厉害, 反之则压缩得越厉害. 这一结论和高斯响应情况一致^[6].

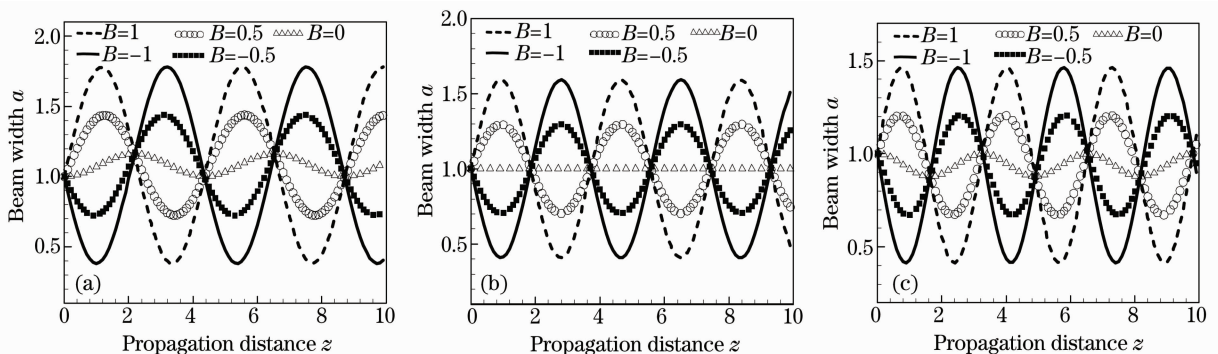


图 1 当 (a) $P_0/P_c=0.8$, (b) $P_0/P_c=1$ 和 (c) $P_0/P_c=1.2$ 时束宽的演化图

Fig. 1 Evolution of the beam width for (a) $P_0/P_c=0.8$, (b) $P_0/P_c=1$ and (c) $P_0/P_c=1.2$

由图 1 还可看出, 具有不同初始波前曲率的光束的束宽曲线周期性相交, 而这些交点恰是零初始

曲率的光束压缩或展宽的极值点. 这一现象可由方程(10)解释: 当初始波前曲率为零时, $B=0$, 则光束

束宽的演化满足： $a_0(z) = a_b + (1 - a_b)\cos(\beta z)$ ，从中可知，光束束宽在 $Z_s = k\pi/\beta$ ， $(k = 0, 1, 2, \dots, N)$ 处达到极值，即：若初始入射功率 P_0 大于临界入射功率 P_c ，当 k 为偶数时 $a_0(z)$ 取最大值 1，而当 k 为奇数时， $a_0(z)$ 取最小值 $2a_b - 1$ 。与此同时，在这些极值点 $Z_s = k\pi/\beta$ ， $(k = 0, 1, 2, \dots, N)$ 处， $\sin(\beta Z_s) = 0$ ，此时恰有 $a_0(Z_s) = a(Z_s)$ ，所以具有初始波前曲率的光束的束宽演化曲线必然周期性相交，而在这些交点处零初始曲率的光束恰展宽或压缩至其

极值。

4.2 入射功率对光束演化的影响

由图 2 可得，即便初始入射功率大于临界功率，对于正的波前曲率，光束仍然会先展宽，反之，若初始入射功率小于临界功率，对于负的波前曲率，光束也仍然会先压缩。由此可得：在 e 指数响应的非局域介质中，不论初始入射功率大小如何，正的波前曲率总使光束先展宽，而负的波前曲率总使光束先压缩。此结果也和高斯响应情况一致^[6]。

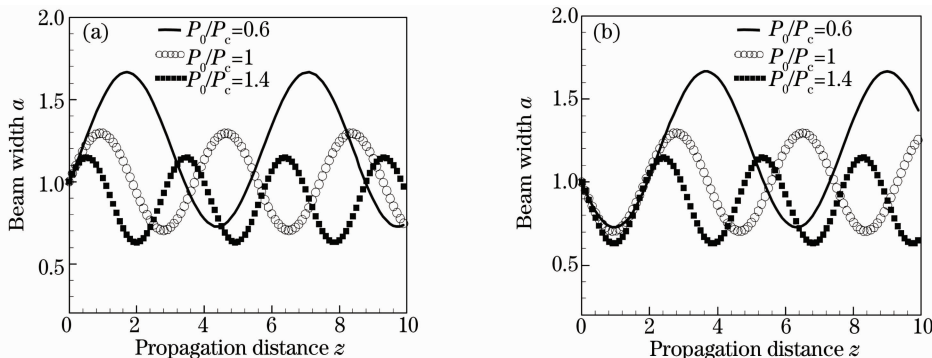


图 2 当(a) $B=0.5$ 和(b) $B=-0.5$ 时束宽的演化

Fig. 2 Evolution of the beam width for (a) $B=0.5$ and (b) $B=-0.5$

4.3 与 Snyder-Mitchell 模型结果的比较

以上已讨论了响应函数在其中心处不可导的情况，但在 Snyder-Mitchell 模型中，响应函数在其中心处二阶可导，其束宽表达式具有如下形式^[6]：

$$a(z) = \frac{B^2 + \tau + 1}{2\tau} + \frac{B}{\sqrt{\tau}} \sin(2\sqrt{\tau}z) + \frac{-B^2 + \tau - 1}{2\tau} \cos(2\sqrt{\tau}z), \quad (14)$$

式中 $\tau = P_0/P_c$ 。

初始波前曲率为零时其束宽的表达式为

$$a_0(z) = \frac{\tau + 1}{2\tau} + \frac{\tau - 1}{2\tau} \cos(2\sqrt{\tau}z). \quad (15)$$

若不同初始波前曲率的光束的束宽曲线同样能周期性相交，则须满足条件 $a(Z_s) = a_0(Z_s)$ ，从而有：

$$Z_s = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \left[\arcsin\left(-\frac{B}{\sqrt{4\tau + B^2}}\right) - \arctan\left(\frac{-B}{2\sqrt{\tau}}\right) \right]. \quad (16)$$

在某一确定的输入功率处 (τ 为常数)，若使具有任意的初始波前曲率 B 的光束的束宽曲线周期性相交， Z_s 须为周期函数，而由(16)式中可得，反正弦和反正切函数均为单调函数，所以 Z_s 不可能为周期函数，进而在 Snyder-Mitchell 模型中也不存在这

样的点使得有初始波前曲率的光束周期相交于无初始波前曲率的光束压缩或展宽的极值处。

4.4 与数值模拟结果的比较

为验证解析结果的正确性，下面将利用分布傅里叶方法^[18]对非局域非线性薛定谔方程(1)进行数值模拟，设初始输入具有形式

$$\psi(x, 0) = A \exp\{-[(1 - iB)x^2]/2\},$$

其中归一化振幅 A 由方程(5)决定，为清晰起见，图 3 仅给出数值模拟结果，从中可得：对于某一确定的入射功率，数值结果显示，初始曲率不为零的光束周期性相交，而此交点恰为零初始曲率的光束压缩或展宽的极值点，和所得到的解析结果一致。

图 4 显示 $P_0 = P_c$ 时数值结果和解析结果的对比， $B=0.1$ 和 $B=0.3$ 时光束先展宽； $B=0$ 时光束束宽不变； $B=-0.1$ 和 $B=-0.3$ 时光束先压缩。从中可看出在 $B=0$ 处光束保持孤子状态传输，解析结果和数值结果吻合得很好。当 $B = \pm 0.1$ 时，图 4(a) 显示解析结果和数值结果相一致，随着 $|B|$ 的增加，解析解逐渐偏离数值解，如图 4(b) $B = \pm 0.3$ 时所示。这是因为势能的具体表达式的得出是通过在平衡点 a_b 处展开 $V(a)$ 近似而得^[17]，所以 $|B|$ 值越大，偏离平衡点越远，此种近似也将不再精确。

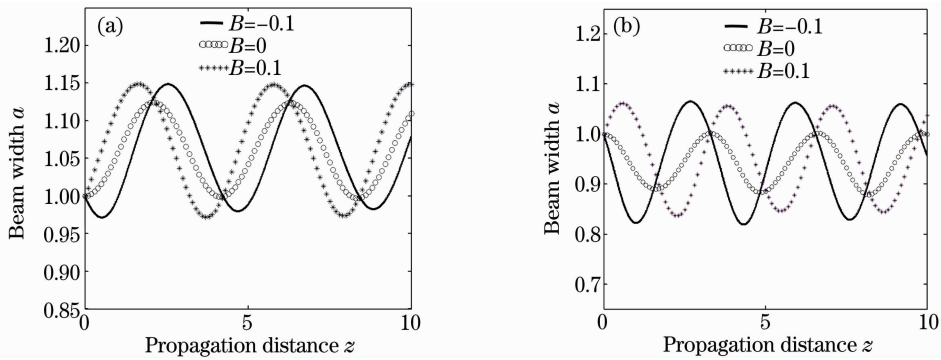


图 3 当 (a) $P_0/P_c=0.85$ 和 (b) $P_0/P_c=1.2$ 时光束束宽的演化

Fig. 3 Evolution of the beam width for (a) $P_0/P_c=0.85$ and (b) $P_0/P_c=1.2$

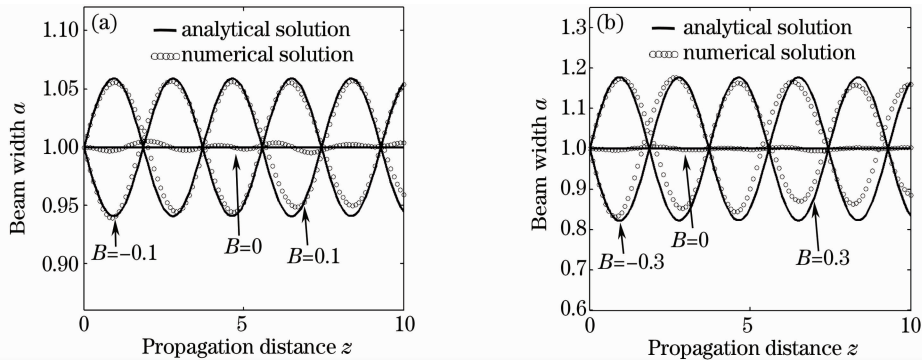


图 4 当 $P_0/P_c=1$ 时光束束宽的演化

Fig. 4 Evolution of the beam width for $P_0/P_c=1$

5 结 论

利用变分法研究了 e 指数衰减响应的非局域介质中具有初始波前曲率的光束演化的解析解。发现无论初始输入功率大小如何,若初始波前曲率为正,光束总是先展宽,而若初始波前曲率为负,光束则总是先压缩。对于某一确定的输入功率,具有不同初始波前曲率的光束的束宽曲线均周期性相交,而这些交点处恰为无初始波前曲率的光束压缩的最小值点处或展宽的最大值点处,此种现象是在 Snyder-Mitchell 的线性模型中所没有的。

参 考 文 献

- 1 A. W. Snyder, D. J. Mitchell. Accessible solitons [J]. *Science*, 1997, **276**(5318): 1538~1541
- 2 M. Peccianti, C. Conti, G. Assanto *et al.*. All-optical switching and logic gating with spatial solitons in liquid crystals [J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2002, **81**(18): 3335~3337
- 3 A. Fratallocchi, G. Assanto. All-optical switching in a liquid crystalline waveguide [J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2005, **86**(5): 051109
- 4 Q. Guo, B. Luo, F. Yi *et al.*. Large phase shift of nonlocal optical spatial solitons [J]. *Phys. Rev. E*, 2004, **69**(1): 016602
- 5 Zhao Xin, Chu Cunkun, Zhang Dongsheng *et al.*. (1+1)-Dimensional higher-order mode breathers in strongly nonlocal nonlinear media [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(5): 965~970

- 6 赵 昕, 楚存坤, 张东升等. (1+1)维强非局域非线性介质中的高阶模呼吸子 [J]. *光学学报*, 2008, **28**(5): 965~970
- 7 Guo Qi, Xu Chaobin. Influence of off-waist incidence on evolution of the Gaussian beam in the nonlocal nonlinear media [J]. *Acta Physica Sinica*, 2004, **53**(9): 3025~3032
- 8 郭 旗, 许超彬. 偏离束腰入射对非局域非线性介质中高斯光束演化的影响 [J]. *物理学报*, 2004, **53**(9): 3025~3032
- 9 Zhong Weiping, Yi Lin. Influence of linear focusing and defocusing effects on interaction between spatial solitons [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(5): 960~964
- 10 钟卫平, 易 林. 线性聚焦和线性散焦效应对空间光孤子间相互作用的影响 [J]. *光学学报*, 2008, **28**(5): 960~964
- 11 Q. Guo, B. Luo, S. Chi. Optical beams in substrongly nonlocal nonlinear media: a variational solution [J]. *Opt. Commun.*, 2006, **259**(1): 336~341
- 12 Y. Huang, Q. Guo, J. Cao. Optical beams in lossy nonlocal Kerr media [J]. *Opt. Commun.*, 2006, **261**(1): 175~180
- 13 S. G. Ouyang, Q. Guo, W. Hu. Perturbative analysis of generally nonlocal spatial optical solitons [J]. *Phys. Rev. E*, 2006, **74**(3): 036622
- 14 Zhang Yiqi, Lu Keqing, Zhang Meizhi *et al.*. Dynamics of incoherent photovoltaic spatial solitons [J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2009, **26**(3): 034212
- 15 Wang Yuqing, Guo Qi. Rotating soliton clusters in nonlocal nonlinear media [J]. *Chinese Phys. B*, 2008, **17**(7): 2527~2534
- 16 C. Conti, M. Peccianti, G. Assanto. Route to nonlocality and observation of accessible solitons [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, **91**(7): 073901
- 17 C. Conti, M. Peccianti, G. Assanto. Observation of optical spatial solitons in a highly nonlocal medium [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **92**(11): 113902

- 15 W. Hu, T. Zhang, Q. Guo *et al.*. Nonlocality-controlled interaction of spatial solitons in nematic liquid crystals [J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2006, **89**(7): 071111
- 16 H. Zhang, L. Li, S. Jia. Pulsating behavior of an optical beam induced by initial phase-front curvatures in strongly nonlocal media [J]. *Phys. Rev. A*, 2007, **76**(4): 043833
- 17 L. Cao, Y. Zhu, D. Lu *et al.*. Propagation of nonlocal optical solitons in lossy media with exponential-decay response [J]. *Opt. Commun.*, 2008, **281**(19): 5004~5008
- 18 G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics* (Third Edition) [M]. Beijing: Academic Press, 2001. 51~55