

文章编号: 0253-2239(2010)06-1767-05

自由曲面零补偿计算全息图离散相位的 B 样条拟合

苏 萍 谭峭峰 康果果 金国藩

(清华大学精密测试技术与仪器国家重点实验室, 北京 100084)

摘要 在设计自由曲面光学元件零补偿检测的计算全息图(CGH)时,利用光线追迹可得到散乱分布的离散相位点,需通过插值得到连续的相位分布函数,以计算 CGH 刻线位置。采用双三次 B 样条插值法,对散乱分布的离散相位点进行拟合并用较少的采样点满足精度要求。利用双三次 B 样条的矩阵表达式及 CGH 加工相位函数在所加载频方向单调递增的性质,简化了求解插值曲面与 $x-y$ 平行平面精确交线的方法,高精度地求取了相位型 CGH 的上下沿刻线位置。最后给出了一例用于自由曲面干涉零补偿检测的 CGH 图样。

关键词 光学设计;计算全息;双三次 B 样条插值;零补偿检测;自由曲面

中图分类号 O438.1;O174.42 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20103006.1767

B-Spline Interpolation of Scattered Phase Data of Computer Generated Hologram for Null Test of Freeform Surface

Su Ping Tan Qiaofeng Kang Guoguo Jin Guofan

(State Key Laboratory of Precision Measurement Technology and Instruments, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract Designing methods of null test computer generated hologram (CGH) for freeform surface optical element are researched. Bicubic non-uniform B-spline interpolation is used to fit a continuous phase function from scattered phase compensation data, which is calculated by universal ray tracing numerical method. Matrix representation of bicubic B-spline and monotonicity of CGH phase function are used to calculate the precise intersection lines of planes paralleling to $x-y$ plane and the interpolated B-spline surface, and the positions of fringes of a phase-only CGH are solved with high accuracy. Finally a design example of null test CGH for freeform surface optical element is presented.

Key words optical design; computer generated hologram (CGH); bicubic B-spline interpolation; null test; freeform surface

1 引 言

随着信息技术和机械加工技术的发展,自由曲面光学元件已越来越多地应用在集成的光学系统中^[1,2],但测量技术的落后限制着自由曲面光学元件的应用。干涉零补偿方法已经广泛应用于非球面光学元件的加工检测中^[3~9]。将零补偿方法应用于光学自由曲面,其中一个难点是补偿用计算全息图(CGH)的设计。目前有两种设计方法:1)根据自由曲面的数学表达式,推导 CGH 的相位补偿函数^[10];2)以几何光学为基础,编写光线追迹程序计算 CGH

上每点的相位补偿量^[11]。其中第二种方法适用范围更广,但得到的是离散相位分布,为了得到 CGH 的加工数据,需要拟合得到连续的相位分布。光线追迹法得到的相位点通常是在拓扑矩形域内分布,且间隔散乱。多项式拟合需凭经验选取项数,且阶次较高时算法不稳定并且精度有可能降低。双三次 B 样条曲面已用于拟合计算全息的相位函数,B 样条曲面是二阶连续的,阶次低(三次),拟合算法简单、稳定,精度高于多项式曲面^[12]。制作相位型 CGH 时,需要精确求解出刻线位置;对于双三次 B

收稿日期: 2009-07-10; 收到修改稿日期: 2009-09-02

作者简介: 苏 萍(1984—),女,博士研究生,主要从事自由曲面光学检测方面的研究。

E-mail: sup@mails.tsinghua.edu.cn

导师简介: 金国藩(1929—),男,中国工程院院士,博士生导师,主要从事光学信息处理和二元光学等方面的研究。

E-mail: jgf-dpi@tsinghua.edu.cn

样条插值曲面,就涉及到参数曲面与平面求交的问题。常见的精确求交算法有离散分割法和数值迭代法。离散分割法精度较低,所需存储量大;而数值迭代法不可避免的问题是初值选取和迭代收敛性^[13]。

在自由曲面检测的零补偿 CGH 设计中,光线追迹得到的补偿相位数据点通常是在拓扑矩形域内分布,且间隔散乱。为此本文采用双三次 B 样条曲面插值得到了连续的加工相位函数,并可用较少的采样点满足精度要求。利用 CGH 的加工相位函数沿载频方向单调递增的性质以及双三次 B 样条的矩阵表达式,简化了双三次 B 样条曲面与 $x-y$ 平行平面的精确求交算法,通过求解一系列初值范围已知的一元三次方程,得到了 CGH 精确的刻线位置。

2 零补偿检测技术简述

典型的干涉零补偿检测光路如图 1 所示。干涉仪测量臂上的球面波经零补偿 CGH 透射和待测面反射并经 CGH 再次衍射后,通过针孔返回干涉仪的波前是携带了待测面加工误差信息的球面波,与参考臂的标准平面或球面波前干涉,分析干涉图可以得到待测面的加工误差信息。零补偿 CGH 的设计,包括计算相位补偿量和刻线位置,是自由曲面零补偿检测中的关键问题。

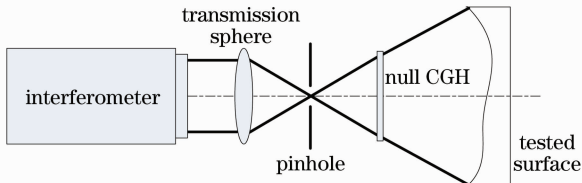


图 1 透射式 CGH 零补偿检测的光路图

Fig. 1 Optical layouts of transmission null CGH test

选择满足采样定理的采样点,对待测面上进行均匀采样。计算采样点处光线的相对相位差,可得到 CGH 面上的相位分布。由于自由曲面的不规则,此相位分布是散乱分布的离散数据点。详细计算方法参见文献^[11]。为了将有用的+1 或-1 级衍射级次与其它衍射级次分离,需要在原相位分布上加线性载频^[14],将加载频后的相位函数称为 CGH 的加工相位函数。相位型透射式 CGH 的加工需要得到刻线位置的数据。设 CGH 的相位补偿函数为 $\varphi(x,y)$,在 x 方向加空间频率为 $1/T$ 的载频,取占空比为 0.5,此时衍射效率最高^[14],则需要求解方程式

$$2\pi x/T - \varphi(x,y) = 2\pi(m \pm 1/4), m \text{ is integer (1)}$$

以得到刻线位置坐标,其中 m 的取值范围由 x 及 $\varphi(x,y)$ 的取值范围决定。(1)式等号右边取“+”号

时,得到的位置坐标 (x_1, y_1) 为刻线的下沿坐标;取“-”号时得到的坐标 (x_2, y_2) 为刻线的上沿坐标。

3 双三次 B 样条插值法获得 CGH 的连续加工相位函数

光线追迹得到的 CGH 加工相位数据是呈拓扑矩形非均匀采样阵列上的空间型值点阵 $\{Q_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{M,N} \in \mathcal{R}^3, \mathcal{R}^3$ 表示三维实数空间用双三次 B 样条插值法获得 CGH 的连续加工相位函数,即求经过所有型值点的双三次 B 样条曲面。B 样条曲面是分段曲面,每个曲面片由 16 个控制顶点及三次参数多项式决定。求解双三次 B 样条插值曲面,就是已知有序型值点反求 B 样条曲面控制顶点的反算问题。

应选取适当的参数化方法使型值点与参数域内的节点一一对应。为了得到较高的插值精度,应该根据 CGH 的相位函数的性质及数据点之间的间距比例选择合适的数据点参数化方法。常用的参数化方法有均匀参数化法和双向平均积累弦长参数化法两种^[15]。均匀参数化法是指所有的参数节点等间距分布;而积累弦长参数化指参数节点间距与对应的型值点间距成正比,相应的参数样条称为均匀或非均匀 B 样条。文献^[16]报道了 B 样条曲线的一般矩阵形式,为非均匀三次 B 样条的广泛应用奠定了基础。

设参数化方法得到的节点矢量为 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_{M-2}, u_{M-1}, u_M)$ 和 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_{N-2}, v_{N-1}, v_N)$,扩展的节点矢量为 $\mathbf{U} = (u_1, u_1, u_1, u_2, \dots, u_{M-1}, u_M, u_M, u_M)$, $\mathbf{V} = (v_1, v_1, v_1, v_2, \dots, v_{N-1}, v_N, v_N, v_N)$ 。根据插值条件计算出阶次为 $(M+2) \times (N+2)$ 的控制顶点矩阵 $\{P_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{M+2,N+2}$,即可得到分段双三次 B 样条曲面的解析表达式。对于在 (u_i, v_j) 和 (u_{i+1}, v_{j+1}) 区间之内的节点矢量 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) ,分段双三次 B 样条曲面的矩阵表达式为^[16]

$$\mathbf{c}^{i,j}(s,t) = [1 \quad s \quad s^2 \quad s^3] \times \begin{bmatrix} P_{i,j} & P_{i,j+1} & P_{i,j+2} & P_{i,j+3} \\ P_{i+1,j} & P_{i+1,j+1} & P_{i+1,j+2} & P_{i+1,j+3} \\ P_{i+2,j} & P_{i+2,j+1} & P_{i+2,j+2} & P_{i+2,j+3} \\ P_{i+3,j} & P_{i+3,j+1} & P_{i+3,j+2} & P_{i+3,j+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

定义单位矢量 \mathbf{I}_{M-1} 及 \mathbf{I}_{N-1} ,分别代表有 $M-1$ 和 $N-1$ 个元素的单位行向量。式中 $\mathbf{s} = (\mathbf{U} - U_{i+2} \cdot \mathbf{I}_{M-1}) / (U_{i+3} - U_{i+2}), i=1,2,\dots,M-1; \mathbf{t} = (\mathbf{V} - V_{j+2} \cdot \mathbf{I}_{N-1}) / (V_{j+3} - V_{j+2}), j=1,2,\dots,N-1$ 。

L_U^i, L_V^i 形式为

$$L_U^i = \begin{bmatrix} \frac{(U_{i+3} - U_{i+2})^2}{(U_{i+3} - U_{i+1})(U_{i+3} - U_i)} & 1 - l_{1,1} - l_{1,3} & \frac{(U_{i+2} - U_{i+1})^2}{(U_{i+4} - U_{i+1})(U_{i+3} - U_{i+1})} & 0 \\ -3l_{1,1} & 3l_{1,1} - l_{2,3} & \frac{3(U_{i+3} - U_{i+2})(U_{i+2} - U_{i+1})}{(U_{i+4} - U_{i+1})(U_{i+3} - U_{i+1})} & 0 \\ 3l_{1,1} & -3l_{1,1} - l_{3,3} & \frac{3(U_{i+3} - U_{i+2})^2}{(U_{i+4} - U_{i+1})(U_{i+3} - U_{i+1})} & 0 \\ -l_{1,1} & l_{1,1} - l_{4,3} - l_{4,4} & l_{4,3} & \frac{(U_{i+3} - U_{i+2})^2}{(U_{i+5} - U_{i+2})(U_{i+4} - U_{i+2})} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

式中 $l_{4,3} = -l_{3,3}/3 - l_{4,4} - (u_{i+3} - u_{i+2})^2 / [(u_{i+4} - u_{i+2})(u_{i+4} - u_{i+1})]$; $l_{p,q} = L_{V_{p,q}}^i$, 式中 $p, q=1, 2, 3, 4$ 。

根据插值条件 $c^{i,j}(0, 0) = Q_{ij}$ 可得到一组线性方程组。由于控制顶点矩阵比型值点阵多了两行两列, 需要添加边界条件。为计算简单起见, 采用自由端边界条件^[15], 一维的边界条件的计算公式为

$$\begin{cases} \frac{d^2}{du^2}c^1(0) = 6 \times \left[\frac{u_2}{u_3}(P_3 - P_2) - P_2 + P_1 \right] = 0, \\ \frac{d^2}{du^2}c^M(1) = 6 \times \left[P_{M+2} - P_{M+1} + \frac{1 - u_{M-1}}{1 - u_{M-2}} \right] = 0. \end{cases} \tag{4}$$

4 CGH 刻线位置的精确计算

设加载频后的加工相位分布函数(以加 x 方向的载频为例) $2\pi x/T\varphi(x, y)$ 沿 x 轴方向单调递增。由于型值点对应了曲面片上的节点, 沿 v 参数方向的刻线位置必然在某两个相邻的参数节点 u_i 和 u_{i+1} 之间。因此对于某个指定的 m 值, 刻线位置坐标的计算过程如下:

- 1) 对所有的 j , 找到所有的下标 k , 使 $Q_{k,j} \leq 2\pi(m \pm 1/4) \leq Q_{k+1,j}$;
- 2) 写出参数节点为 $(u_k, v_j), (u_k, v_{j+1}), (u_{k+1}, v_j)$ 及 (u_{k+1}, v_{j+1}) 的曲面片的解析表达式;
- 3) 求解关于 $u_x (u_k \leq u_x \leq u_{k+1})$ 的一元三次方程 $c_x^{k,j}(s_x, t) = 2\pi(m \pm 1/4)$, 式中 $s_x = (u_x - u_i)/(u_{i+1} - u_i), t$ 见(2)式;
- 4) 将 (u_x, v_j) 值代入矩阵形式的 B 样条曲面表达式 $c_x^{k,j}, c_y^{k,j}$ 中, 得到位置坐标 (x, y) 。

该方法充分利用了 B 样条插值曲面的性质, 相对于计算量较大的通用的参数曲面与平面的精确求交算法, 仅需简单的判断, 及求解初值范围已知的一元三次方程, 就可以得到平面与参数曲面的一系列精确交点。通常若曲面的采样点满足采样定理, 计算出平面与插值曲面的节点网格的交点就已足够,

刻线位置精确计算的示意图, 如图 2 所示。

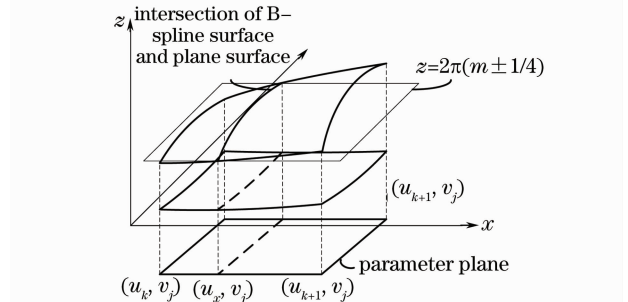


图 2 CGH 刻线位置精确计算的示意图

Fig. 2 Schematic of precise calculation of CGH fringes

5 插值精度估计

由于补偿用 CGH 的相位分布函数的解析表达式未知, 不能用来检验插值精度。为此构造了一个非圆对称的连续函数, 左半部分相位深度变化较大, 右半部分为圆柱函数, 以对插值精度进行估计。设 CGH 的相位分布函数为

$$\varphi(x, y) = 0.5\exp(-x - 0.005y^2) + 150\sqrt{1 - \left(\frac{x-5}{15}\right)^2} - 130, \quad -5 \leq x, y \leq 5 \tag{5}$$

相位的三维分布如图 3 所示。

通常商用干涉仪的检测精度为 $\lambda/10$, 当波面再

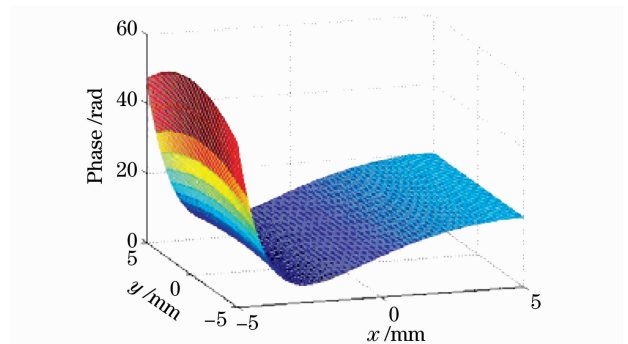


图 3 相位的三维分布图

Fig. 3 Tree-dimensional distribution of phase

现精度优于 $0.06 \text{ rad}(\lambda/100)$ 时,对测量结果几乎无影响。在零补偿 CGH 的设计中,光线追迹得到的散乱的相位点在相位函数曲率变化较大的位置比较密集,而在平缓的位置比较稀疏。因此,用一定密度的等高线在 $x-y$ 平面上的投影近似得到散乱采样点,来模拟光线追迹得到的散乱数据点分布。符合采样定理的均匀采样点数为 310×19 ,而实际上无需这么多的采样点数。以 213 条等高线为例,由于 y 方向变化缓慢,因此取 y 方向等间距分布的 10 条采样网格线,求解这些等高线在 $x-y$ 平面上投影与 y 方向的采样网格的交点,得到 213×10 个散乱的采样点,如图 4 所示。在此需强调的是,等高线法得到的采样点并不能说明数据点在 $x-y$ 平面上的实际分布,仅用来示例非均匀采样时的插值特性。

分别采用均匀和双向平均积累弦长参数化法对采样点进行参数化。用 B 样条插值曲面逼近加载频后的相位分布函数,插值曲面的误差分布如图 5 所示,均满足精度要求。更细致的分析(表 1)表明,

如果采样点组成的拓扑矩形变形量较大,如图 5 中间部分,采用均匀参数化法的插值精度更高;而在拓扑矩形变形量小,并且每行和每列的数据点之间间隔近似相等时,如图 5 左边和右边部分,采用双向平均积累弦长参数化法可以得到精度较高的结果。

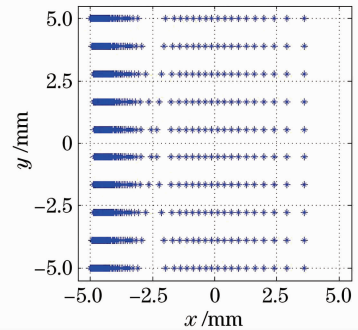


图 4 等高线法模拟光线追迹得到的 $x-y$ 平面上散乱采样点示意图

Fig. 4 Schematic of scattered data projecting to $x-y$ plane, gotten by contour method to simulate ray tracing

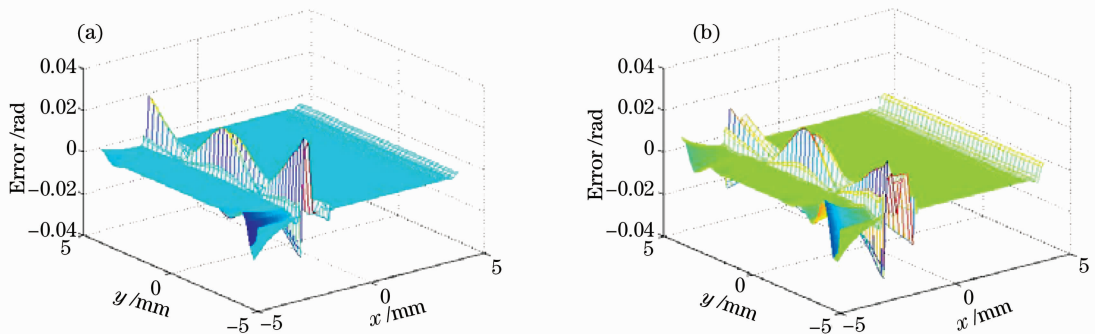


图 5 插值曲面的误差分布。(a)双向平均积累弦长参数化法;(b)均匀参数化法

Fig. 5 Error distributions of interpolated surfaces. (a) accumulation of chord length parameterization; (b) equally spaced parameterization

表 1 双向平均积累弦长参数化法和均匀参数化法的插值结果比较

Table 1 Comparison of interpolation results of bidirectional average accumulated chord length parameterization and equally spaced parameterization

	PV /rad		RMS/rad	
	Accumulation of chord length parameterization	Equally spaced parameterization	Accumulation of chord length parameterization	Equally spaced parameterization
Whole area	5.8×10^{-2}	5.6×10^{-2}	5.3×10^{-6}	9.3×10^{-6}
Left area	4.2×10^{-2}	5.2×10^{-2}	5.5×10^{-6}	1.1×10^{-5}
Middle area	5.8×10^{-2}	3.8×10^{-2}	1.1×10^{-4}	6.6×10^{-5}
Right area	2.9×10^{-2}	3.6×10^{-2}	1.1×10^{-6}	2.2×10^{-6}

根据(1)式可计算得到 CGH 刻线位置坐标 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 。计算简单起见,仅求取了平面与沿 u 向参数节点网格的交点。将位置坐标代入(6)式,以 e_1 和 e_2 的值评价求交算法的误差

$$e_1 = \left| \frac{2\pi y_1}{T} - \varphi(x_1, y_1) - 2\pi(m - \frac{1}{4}) \right|, \quad (6)$$

$$e_2 = \left| \frac{2\pi y_2}{T} - \varphi(x_2, y_2) - 2\pi(m + \frac{1}{4}) \right|,$$

e_1 和 e_2 的 PV 值分别是 0.020 rad 和 0.019 rad, 与插值误差相同量级, 由于计算插值曲面误差时取点更密, 因此插值曲面误差略大于求交算法误差。

6 设计实例

采用双三次 B 样条曲面插值可用较少的采样点满足精度要求, 插值误差优于 $\lambda/100$ 。在此以文献[11]中的待测自由曲面为例, 给出 CGH 的完整设计。根据文献[11]中的优化设计结果, d_1 应取大于 145 mm 的值。文中的求交算法只适用于沿坐标轴方面单调递增的插值曲面, 而文献[11]中优化计算时得到的最小线宽并不是沿坐标轴方向的。综合考虑, 取 d_1 为 500 mm, d_2 为 25 mm, 在 y 方向加空间载频为 294 lp/mm (最小线宽 3.4 μm), 得到的计算全息图样如图 6 所示, 图中一条刻线代表实际的 140 条刻线。

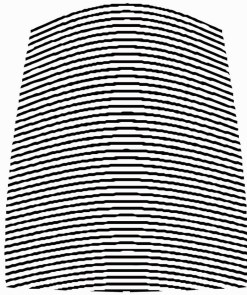


图 6 计算全息图

Fig. 6 Computer generated hologram

7 结 论

在设计自由曲面光学元件的干涉零补偿检测中的 CGH 时, 用插值的方法得到 CGH 连续的相位分布并进而精确求解出 CGH 的加工数据, 是一个亟待解决的关键问题。根据自由曲面光学元件干涉零补偿检测时, 光线追迹得到的 CGH 的散乱的相位采样点分布, 本文采用双三次 B 样条曲面插值的方法, 得到了满足精度要求 (优于 $\lambda/100$) 的连续的 CGH 加工相位函数。根据 B 样条插值曲面的性质, 简化了参数曲面与平面的精确求交算法。通过计算非均匀 B 样条曲面与 $x-y$ 平行的系列平面的交线, 高精度地得到了相位型 CGH 的刻线的上下沿位置。但采用的求交算法只适用于沿坐标轴方面单调递增的插值曲面, 需要进一步改进以适用于不同的自由曲面。

参 考 文 献

1 Yang Bo, Wang Yongtian. Computer aided design of freeform

reflector[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(6): 721~724

杨 波, 王涌天. 自由曲面反射器的计算机辅助设计[J]. *光学学报*, 2004, **24**(6): 721~724

2 Cheng Dewen, Wang Yongtian, Chang Jun *et al.*. Design of a lightweight and wide field-of-view HMD system with free-form-surface prism [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2007, **36**(3): 309~311

程德文, 王涌天, 常 军等. 轻型大视场自由曲面棱镜头盔显示器的设计[J]. *红外与激光工程*, 2007, **36**(3): 309~311

3 Zhishan Gao, Meimei Kong, Rihong Zhu *et al.*. Problems on design of computer-generated holograms for testing aspheric surfaces: principle and calculation[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2007, **5**(4): 241~243

4 Jun Ma, Zhishan Gao, Rihong Zhu *et al.*. Problems on fabrication of computer-generated holograms for testing aspheric surfaces[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2009, **7**(1): 70~73

5 Chang Jun, Li Fengyou, Weng Zhicheng *et al.*. Testing large convex aspherical surface with computer-generated holography [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(10): 1266~1268

常 军, 李凤友, 翁志成等. 用计算全息法检测大口径凸非球面的研究[J]. *光学学报*, 2003, **23**(10): 1266~1268

6 Xie Yi, Chen Qiang, Wu Fan *et al.*. Concave aspherical surface testing with twin computer-generated holograms[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(7): 1313~1317

谢 意, 陈 强, 伍 凡等. 用双计算全息图检测凹非球面[J]. *光学学报*, 2008, **28**(7): 1313~1317

7 Christof Pruss, Stephan Reichelt, Hans Tiziani *et al.*. Computer-generated holograms in interferometric testing[J]. *Opt. Engng.*, 2004, **43**(11): 2534~2540

8 Taehee Kim, James H. Burge, Yunwoo Lee *et al.*. Null test for highly paraboloidal mirror [J]. *Appl. Opt.*, 2004, **18**(43): 3614~3618

9 Kang Guoguo, Xie Jinghui, Liu Yi. Use of virtual medium in designing of the CGH wave front generator for aspheric testing [J]. *J. Beijing Institute of Technology*, 2007, **16**(1): 78~82

10 Xu Yingchao, Zhang Xin, Zhou Ping. Optical design for unsymmetrical aspherical phase plate testing system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(5): 971~975

许英朝, 张 新, 周 平. 一种三次非旋转对称的相位板的检测系统设计[J]. *光学学报*, 2008, **28**(5): 971~975

11 Ping Su, Guoguo Kang, Qiaofeng Tan *et al.*. Estimation and optimization of computer-generated hologram in null test of freeform surface[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2009, **7**(11):

12 Cao Hui, Sun Junqiang, Chen Guojie. Application of bicubic B-spline wavefront fitting technology in computer-generated holograms[J]. *Electronics Optics & Control.*, 2004, **11**(2): 26~28

曹 辉, 孙军强, 陈国杰. 双三次 B 样条波面拟合技术在计算全息中的应用[J]. *电光与控制*, 2004, **11**(2): 26~28

13 Wang Guojin, Wang Guozhao, Zheng Jianmin. Computer Aided Geometric Design[M]. Beijing: China Higher Education Press; Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2001. 159~181

王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计[M]. 北京: 高等教育出版社, 海德堡: 施普林格出版社, 2001. 159~181

14 Yu Zuliang, Jin Guofan. Computer-Generated Hologram[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1984. 69~75

虞祖良, 金国藩. 计算机制全息图[M]. 北京: 清华大学出版社, 1984. 69~75

15 Les Piegl, Wayne Tiller. The NURBS Book 2nd ed. [M]. Heidelberg: Springer. 1997. 361~387

16 Kaihuai Qin. General matrix representations for B-splines[J]. *Visual Computer*, 2000, **16**(3,4): 177~186