

文章编号: 0253-2239(2010)06-1761-06

# 非简并光学参变振荡器的混沌控制

田晓华 郭奇志

(上海大学物理系, 上海 200444)

**摘要** 提出了一种实现非简并光学参变振荡器混沌控制的方法,用正弦信号调制非简并光学参变振荡器的驱动场和基模衰减率,使非简并光学参变振荡器从混沌态输出转化为周期态输出。基于李雅普诺夫(Lyapunov)指数谱、相图和时间序列的数值模拟结果表明,选择适当的调制幅度和调制角频率,只要满足系统最大的 Lyapunov 指数不大于 0,即可将系统中的混沌控制到期望的周期轨道。

**关键词** 非线性光学;非简并光学参变振荡器(NOPO);混沌控制;李雅普诺夫指数

**中图分类号** O437 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20103006.1761

## Controlling Chaos in Nondegenerate Optical Parametric Oscillator

Tian Xiaohua Guo Qizhi

(Department of Physics, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract** A method of controlling chaos in nondegenerate optical parametric oscillator (NOPO) is presented in this paper. The chaotic state of NOPO can be converted into periodic state by modulating the driving field and the reduced decay rate of the fundamental mode with a sinusoid wave. The numerical simulation results based on the Lyapunov exponent spectrum, phase portraits as well as time series show that there are different periodic states for the chaos of NOPO system corresponding to different modulating amplitude and modulating angular frequency only if the maximum Lyapunov exponent of the system is nonpositive.

**Key words** nonlinear optics; nondegenerate optical parametric oscillator; controlling chaos; Lyapunov exponents

### 1 引 言

早在 20 世纪 60 年代初激光器问世不久,光学混沌现象就已被观测到,随后人们在光学二次谐波、四波混频、相位共轭波、光折变以及受激拉曼散射、受激布里渊散射等非线性光学现象中都观察到了混沌现象。光学混沌包含极为丰富的信息,因而在光信息技术方面有很大的应用潜力<sup>[1]</sup>。光学混沌的控制尤其是激光器的混沌控制,在保密通信中具有重要的应用前景,关于这方面的研究近十几年取得了很大进展,成为当前非线性科学领域内的研究热点之一。国内外陆续有关于固体激光器<sup>[2,3]</sup>、气体激光器<sup>[4~7]</sup>、掺铒光纤激光器<sup>[8~14]</sup>以及半导体激光器<sup>[15~18]</sup>中混沌控制的报道。自 1991 年控制混沌的 OGY 方法<sup>[19]</sup>被提出

后,出现了一系列控制混沌的技术和方法,诸如偶然正比反馈技术、连续变量反馈控制方法、自适应控制法、参数共振微扰法与外部周期微扰法等。尽管混沌控制的研究取得了一些成果,但仍处于初级阶段。冯秀琴等<sup>[20~25]</sup>对简并光学参变振荡器的混沌控制及其同步做了深入的研究,在文献<sup>[26]</sup>中研究了非简并光学参变振荡器的混沌行为。

本文提出了一种控制非简并光学参变振荡器中混沌的方法,即利用正弦信号调制非简并光学参变振荡器的驱动场(抽运光场)和基模(抽运光模)衰减率,使系统由混沌输出转化为周期态输出。通过大量的数值模拟和计算发现,适当选取调制幅度和调制角频率,可以使非简并光学参变振荡器由混沌态

收稿日期: 2009-08-11; 收到修改稿日期: 2009-09-01

基金项目: 上海市重点学科建设项目(S30105)资助课题。

作者简介: 田晓华(1986—),女,硕士研究生,主要从事光学混沌方面的研究。E-mail: tianxiaohua@shu.edu.cn

导师简介: 郭奇志(1967—),女,博士,副教授,主要从事非线性光学与量子光学等方面的研究。

E-mail: guoqizhi@163.com

转化为期望的周期态。

## 2 非简并光学参变振荡器及其混沌

非简并光学参变振荡器是非线性光学系统,描述非简并光学参变振荡器的动力学方程为<sup>[27]</sup>

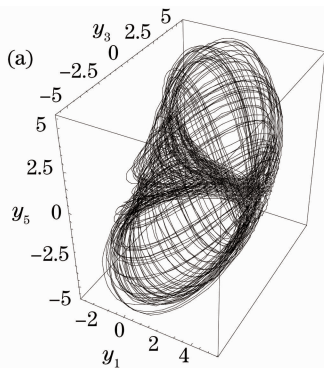
$$\begin{cases} \frac{d\alpha_1}{dt} = E_A - (\gamma_1 + i\Delta_1)\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3 \\ \frac{d\alpha_2}{dt} = -(\gamma_2 + i\Delta_2)\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^* \\ \frac{d\alpha_3}{dt} = -(\gamma_3 + i\Delta_3)\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^* \end{cases}, \quad (1)$$

式中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  分别表示抽运光、信号光和闲频光 3 个模的复振幅,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  分别为三个模的衰减率,  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  依次为三个模的调谐参数,  $E_A$  为抽运光场强度, 正比于相干驱动场振幅, 假设为实数。

为数值分析方便, 做如下变换

$$\begin{cases} y_1 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_1^*)}{2} & y_2 = \frac{-i(\alpha_1 - \alpha_1^*)}{2} \\ y_3 = \frac{(\alpha_2 + \alpha_2^*)}{2} & y_4 = \frac{-i(\alpha_2 - \alpha_2^*)}{2} \\ y_5 = \frac{(\alpha_3 + \alpha_3^*)}{2} & y_6 = \frac{-i(\alpha_3 - \alpha_3^*)}{2} \end{cases}. \quad (2)$$

将系统(1)式的复数方程化为实数方程



$$\begin{cases} dy_1/dt = E_A - \gamma_1 y_1 + \Delta_1 y_2 - y_3 y_5 + y_4 y_6 \\ dy_2/dt = -\gamma_1 y_2 - \Delta_1 y_1 - y_3 y_6 - y_4 y_5 \\ dy_3/dt = -\gamma_2 y_3 + \Delta_2 y_4 + y_1 y_5 + y_2 y_6 \\ dy_4/dt = -\gamma_2 y_4 - \Delta_2 y_3 - y_1 y_6 + y_2 y_5 \\ dy_5/dt = -\gamma_3 y_5 + \Delta_3 y_6 + y_1 y_3 + y_2 y_4 \\ dy_6/dt = -\gamma_3 y_6 - \Delta_3 y_5 - y_1 y_4 + y_2 y_3 \end{cases}. \quad (3)$$

在文献[26]中, 通过计算系统(3)式的 Lyapunov 指数随驱动场  $E_A$  的变化情况, 研究了该系统的混沌行为, 结果表明当系统参数取  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = -5, \Delta_3 = 1$ , 初始条件为  $\alpha_1^0 = 0.1 + i0.1, \alpha_2^0 = 0.1 + i0.1, \alpha_3^0 = 0.1 + i0.1$  时, 当抽运强度  $7.74 \leq E_A \leq 7.78, 8.36 \leq E_A \leq 100$  时, 系统有至少一个正的 Lyapunov 指数, 处于混沌或超混沌态。特别当  $40 \leq E_A \leq 62$  和  $71 < E_A \leq 100$  时系统有两个正的 Lyapunov 指数, 因而处于超混沌态。

当  $E_A = 9.4$  时, 计算出系统的 6 个 Lyapunov 指数分别为 0.458, 0.003, 0, -2.864, -2.903 和 -3.351, 可以认为只有一个正的 Lyapunov 指数, 因而系统处于混沌态。混沌吸引子如图 1(a)所示, 图 1(b)为相应基模的时间序列。

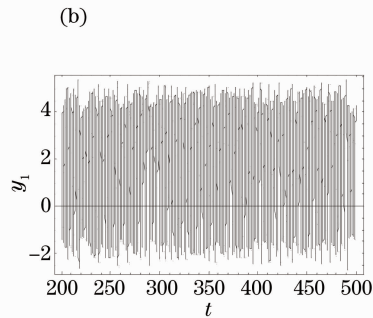


图 1  $E_A = 9.4$  时系统的 (a) 混沌吸引子和 (b) 混沌时间序列

Fig. 1 (a) Chaotic attractor and (b) chaotic time series of NOPO system at  $E_A = 9.4$

## 3 非简并光学参变振荡器的混沌控制

对于以上处于混沌态的系统, 发现用正弦信号调制驱动场和基模的衰减率, 可将系统的正 Lyapunov 指数转化为 0, 系统可从混沌态转化为周期态, 从而实现非简并光学参变振荡器的混沌控制。

### 3.1 调制驱动场控制非简并光学参变振荡器中的混沌

对非简并光学参变振荡器的抽运强度进行调制, 使其满足如下的正弦规律

$$E_A = E_0 [1 + \mu \sin(\omega t)], \quad (4)$$

式中  $E_0 = 9.4$  为未加调制时的抽运强度,  $\mu$  为调制幅度,  $\omega$  为调制角频率。通过调节  $\mu$  和  $\omega$  的值调制驱动场, 即可实现非简并光学参变振荡器的混沌控制。

分别讨论调制幅度和调制角频率, 对非简并光学参变振荡器的混沌控制的效果, 参数仍取:  $E_0 = 9.4, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = -5, \Delta_3 = 1$ , 初始条件:  $\alpha_1^0 = 0.1 + i0.1, \alpha_2^0 = 0.1 + i0.1, \alpha_3^0 = 0.1 + i0.1$ 。

### 3.1.1 调制角频率

考虑通过调节角频率  $\omega$  的值调制驱动场, 从而实现非简并光学参变振荡器的混沌控制, 取  $\mu = 0.5$ , 计算系统的最大 Lyapunov 指数随  $\omega$  的变化关系, 如图 2 所示。

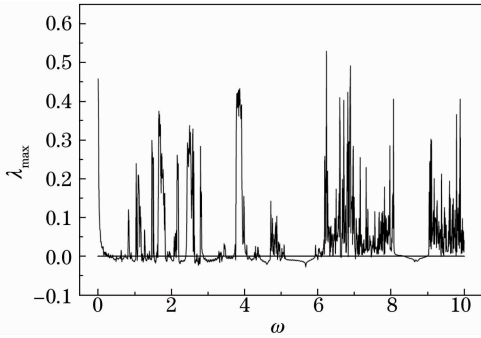


图 2 最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  随调制角频率  $\omega$  的变化

Fig. 2 Evolution of the largest Lyapunov exponent

$\lambda_{\max}$  versus  $\omega$

由图 2 可知: 当  $0.02 < \omega < 1.04$ ,  $2.82 < \omega < 3.77$ ,  $4 < \omega < 6.19$ ,  $7.97 < \omega < 9.04$  时, 系统的最大 Lyapunov 指数接近于 0, 即角频率  $\omega$  在这些区间取值时, 可以将系统控制到周期态, 通过计算系统相图和输出的时间序列也证实了这一点。通过大量的数值模拟发现, 取不同的参数值, 可以将系统控制到不

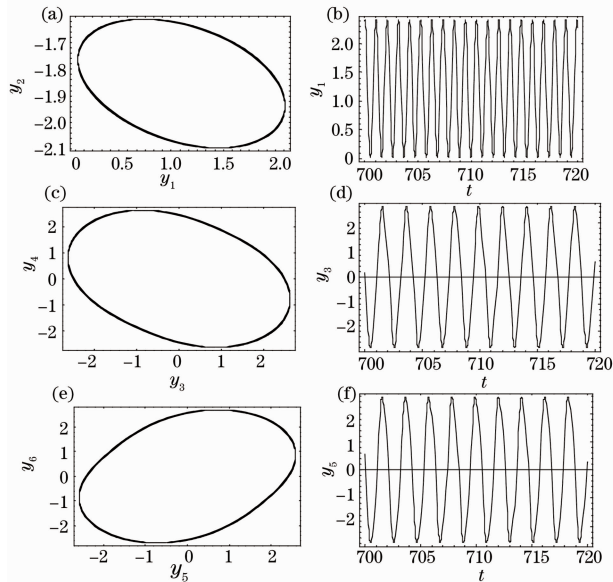


图 3  $\omega = 6$  时的周期态输出。(a) 抽运光模的周期 1 相图; (b) 抽运光模的时间序列; (c) 信号光模的周期 1 相图; (d) 信号光模的时间序列; (e) 闲频光模的周期 1 相图; (f) 闲频光模的时间序列

Fig. 3 Phase portrait of periodic-1 of (a) pump mode; (c) signal mode; (e) idle mode and the time series of NOPO of (b) pump mode; (d) signal mode; (f) idle mode at  $\omega = 6$

同的周期轨道, 有时基模 (抽运光模) 和两个谐波模 (信号光模和闲频光模) 处于相同的周期态, 有时则处于不同的周期态。比如  $\omega = 6$  和  $\omega = 9$  时系统的三个模均处于周期 1 态,  $\omega = 1$  时系统 3 个模均为周期 3 态。图 3 和图 4 分别为  $\omega = 6$ ,  $\omega = 1$  时非简并光学参变振荡器的相图和输出时间序列。

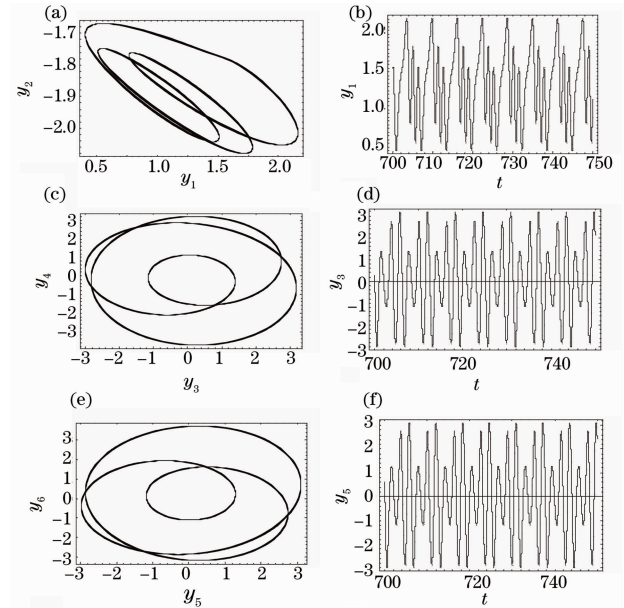


图 4  $\omega = 1$  时的周期态输出。(a) 抽运光模的周期 3 相图; (b) 抽运光模的时间序列; (c) 信号光模的周期 3 相图; (d) 信号光模的时间序列; (e) 闲频光模的周期 3 相图; (f) 闲频光模的时间序列

Fig. 4 Phase portrait of periodic-3 of (a) pump mode; (c) signal mode; (e) idle mode and the time series of NOPO of (b) pump mode; (d) signal mode; (f) idle mode at  $\omega = 1$

### 3.1.2 调制幅度

考虑通过调节幅度  $\mu$  的值调制驱动场, 从而实现非简并光学参变振荡器的混沌控制, 取  $\omega = 3.8$ , 系统的最大 Lyapunov 指数随  $\mu$  的变化关系如图 5 所示。

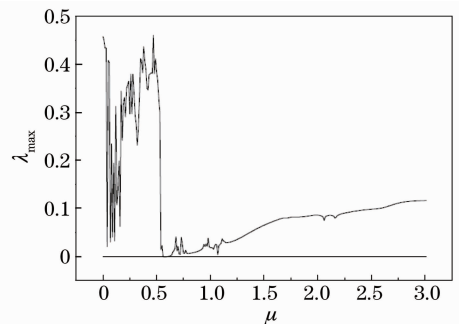


图 5 最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  随调制幅度  $\mu$  的变化图

Fig. 5 Evolution of the largest Lyapunov exponent

$\lambda_{\max}$  versus  $\mu$

当  $0.54 \leq \mu \leq 3.0$  时,系统的最大 Lyapunov 指数接近 0,在此范围内,基模始终为周期 1,而谐波模未发现周期态,始终处于混沌态。图 6 给出了不同  $\mu$  值对应的基模周期轨道,尽管都处于周期 1 态,但调制幅度过深会导致轨道发生扭曲。

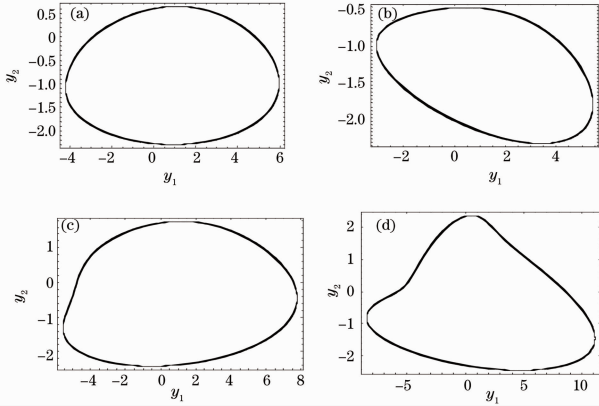


图 6  $\mu$  取不同值时 NOPO 的基模周期 1 轨道。

(a)  $\mu=0.54$ ; (b)  $\mu=1$ ; (c)  $\mu=2$ ; (d)  $\mu=3$

Fig. 6 Periodic-1 state of fundamental mode with different  $\mu$  values. (a)  $\mu=0.54$ ; (b)  $\mu=1$ ; (c)  $\mu=2$ ; (d)  $\mu=3$

### 3.2 调制基模衰减率控制非简并光学参变振荡器中的混沌

对非简并光学参变振荡器的基模衰减率同样进行正弦调制,使其基模衰减率满足如下的规律

$$\gamma_1 = \gamma_{10} [1 + \mu \sin(\omega t)], \quad (5)$$

式中  $\gamma_{10} = 1$  为未加调制时的基模衰减率,  $\mu$  为调制幅度,  $\omega$  为调制角频率。通过调节  $\mu$  和  $\omega$  的值来调制基模衰减率,也可将非简并光学参变振荡器由混沌态控制到周期态。

参数取值:  $E_\lambda = 9.4, \gamma_{10} = 1, \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = -5, \Delta_3 = 1$ , 初始条件:  $\alpha_1^0 = 0.1 + i0.1, \alpha_2^0 = 0.1 + i0.1, \alpha_3^0 = 0.1 + i0.1$ 。分别讨论调制幅度和调制角频率对非简并光学参变振荡器的混沌控制。

#### 3.2.1 调制幅度

考虑通过调节幅度  $\mu$  的值来调制基模衰减率,将非简并光学参变振荡器由混沌态控制到周期态。取  $\omega = 3$ , 计算出系统的最大 Lyapunov 指数随  $\mu$  的变化曲线如图 7 所示。

由图 7 可看出,当调制幅度  $0.09 \leq \mu \leq 0.43$  时,系统最大的 Lyapunov 指数为 0,结合相图和时间序列的数值模拟结果表明,在此区间内非简并光学参变振荡器的三个模均为周期 1 态。图 8 给出了  $\mu=0.35$  时系统基模(抽运光模)和信号光模的周期轨道和输出时间序列,闲频光模的情况和信号光模的一致。更多的数值模拟结果表明,当  $\mu$  取  $[2.9, 3.0]$  时系统也

处于周期态,但此时由于调制深度过大,致使相图和时间序列图都发生扭曲,所以导致原来的系统出现了新的动力学行为,如图 9 所示。

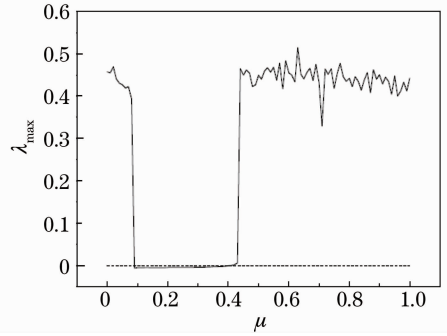


图 7 最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  随调制幅度  $\mu$  的变化

Fig. 7 Evolution of the largest Lyapunov exponent

$\lambda_{\max}$  versus  $\mu$

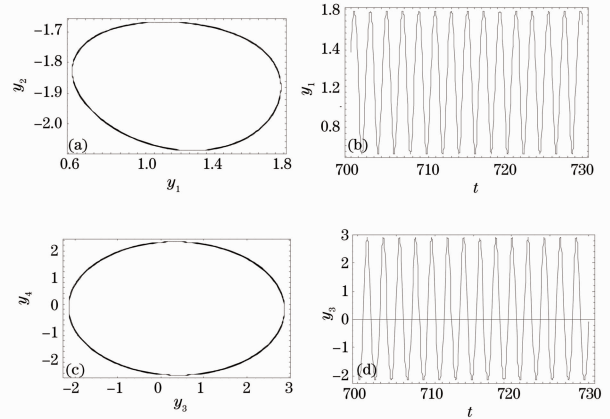


图 8  $\mu=0.35$  时 NOPO 系统的周期 1 相图和时间序列。

(a) 抽运光模的周期 1 相图; (b) 抽运光模的时间序列; (c) 信号光模的周期 1 相图; (d) 信号光模的时间序列

Fig. 8 Phase portrait and time series of periodic-1 state of NOPO at  $\mu=0.35$ . (a) phase portrait of pump mode, (b) time series of pump mode, (c) phase portrait of signal mode and (d) time series of signal mode

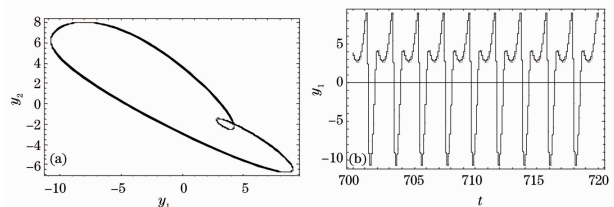


图 9  $\mu=3$  时基模的 (a) 周期相图和 (b) 时间序列

Fig. 9 Periodic state (a) and the time series (b) of the fundamental mode at  $\mu=3$

#### 3.2.2 调制角频率

取基模衰减率  $\gamma_1 = \gamma_{10} [1 + \mu \sin(\omega t)]$  中的调



制幅度  $\mu = 0.5$ , 其他参数和初始条件都不变, 计算系统最大的 Lyapunov 指数随调制角频率  $\omega$  的变化情况如图 10 所示。

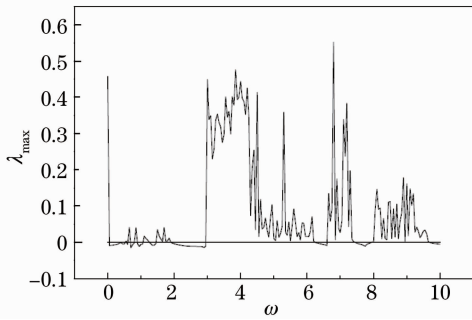


图 10 最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  随调制角频率  $\omega$  的变化  
Fig. 10 Evolution of the largest Lyapunov exponent

$\lambda_{\max}$  versus  $\omega$

由图 10 可见, 当调制角频率在  $0 < \omega < 3$  这一较宽的调制范围内取值时, 系统最大的 Lyapunov 指数均接近于 0; 当  $4.5 < \omega < 6.8$  (除去  $\omega = 5.3$  附近) 和  $7.33 \leq \omega \leq 10$  时, 系统的最大 Lyapunov 指数也可认为接近于 0, 通过数值模拟发现, 在这些范围内适当取  $\omega$  的值, 可以将基模和两个谐波模控制到周期轨道, 有些参数值可能使三个模同时处于相同的周期态 (比如  $\omega = 6, 9$  时三模都处于周期 1 态), 而大部分  $\omega$  的取值可以将 NOPO 的基模控制到周期 1 或周期 2 态, 将谐波模控制到周期 2 或者周期 3 态。

图 11 给出了  $\omega = 1.5$  时系统的周期态相图和输出时间序列, 由图 11 可见, 基模处于周期 1 态, 而信

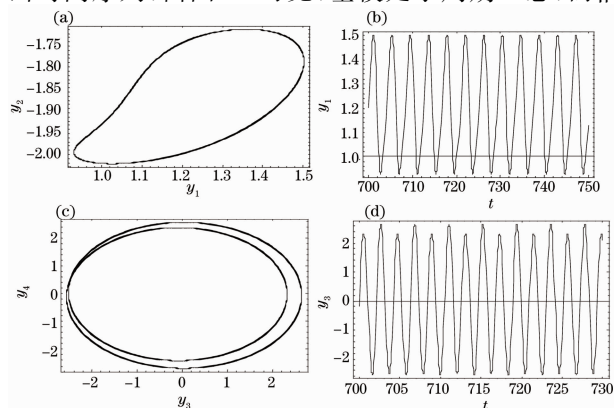


图 11  $\omega = 1.5$  时抽运光模和信号光模的相图和时间序列。(a) 抽运光模周期 1 轨道; (b) 抽运光模输出时间序列; (c) 信号光模周期 2 轨道; (d) 信号光模输出时间序列

Fig. 11 Phase portrait and time series of pump mode and signal mode at  $\omega = 1.5$ . (a) periodic-1 state and (b) time series of pump mode (c) and periodic-2 state and (d) time series of signal mode

号光模处于周期 2 态, 闲频光模的相图和输出时间序列与信号光模类似。

## 4 结 论

提出了一种非简并光学参变振荡器系统混沌控制的方法, 通过对驱动场和基模衰减率进行周期参数调制, 可以将非简并光学参变振荡器中的混沌控制到期望的周期轨道。大量的数值模拟结果证实了此种方法的可行性。由于非简并光学参变振荡器系统较简并光学参变振荡系统, 具有更复杂的动力学行为, 可的参数较多, 因而本文的研究对非简并光学参变振荡的混沌反控制奠定了基础。

## 参 考 文 献

- Shen Ke. Chaos in Optics[M]. Changchun: Northeast Normal University Press, 2000. 1~4  
沈 柯. 光学中的混沌[M]. 长春: 东北师范大学出版社, 2000. 1~4
- Zhou Yun, Zhu Shiqun, Wu Liang. Preference of chaotic synchronization in a coupled laser system [J]. *Commun. Theor. Phys.*, 2005, **44**(6): 1076~1080
- Sun Jian, Zhu Shiqun. Chaotic synchronization of intensities and phases in two multi-mode laser fields [J]. *Chinese J. Quantum Electronics*, 2005, **22**(5): 743~748  
孙 坚, 朱士群. 两台多模激光场强度和相位的混沌同步[J]. 量子电子学报, 2005, **22**(5): 743~748
- Toshiki Sugawara, Maki Tachikawa, Takayuki Tsukamoto et al.. Observation of synchronization in laser chaos [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **72**(22): 3502~3505
- Lü Kecheng, Wang Jiye, Liu Zhiguo et al.. Research on chaotic operation in a 3.39  $\mu\text{m}$  He-Ne laser caused by transverse effects [J]. *Chinese J. Lasers*, 1996, **23**(1): 35~39  
吕可诚, 王继业, 刘志国等. 3.39  $\mu\text{m}$  He-Ne 激光器的横向效应导致混沌运转的研究[J]. 中国激光, 1996, **23**(1): 35~39
- D. Y. Tang, R. Dykstra, M. W. Hamilton et al.. Observation of generalized synchronization of chaos in a driven chaotic system [J]. *Phys. Rev. E*, 1998, **57**(5): 5247~5251
- A. Uchidal, K. Higal, T. Shibal et al.. Generalized synchronization of chaos in He-Ne lasers [J]. *Phys. Rev. E*, 2003, **68**(1): 016215
- Liguo Luo, P. L. Chu, T. Whitbread et al.. Experimental observation of synchronization of chaos in erbium-doped fiber lasers [J]. *Opt. Commun.*, 2000, **176**(1-3): 213~217
- Sungchul Kim, Byoungcho Lee, Dong Hwan Kim. Experiments on chaos synchronization in two separate erbium-doped fiber lasers [J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 2001, **13**(4): 290~292
- Fan Zhang, Pak L. Chu. Effect of coupling strength on chaos synchronization generated by erbium-doped fiber ring laser [J]. *Opt. Commun.*, 2004, **237**(1-3): 213~219
- Fan Zhang, P. L. Chu, R. Lai et al.. Dual-wavelength chaos generation and synchronization in erbium-doped fiber lasers [J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 2005, **17**(3): 549~551
- Yan Senlin. Controlling chaos to produce periodic-pulses and multi-periodic states phenomena in dual-ring Er-doped fiber laser [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(4): 636~643  
颜森林. 双环掺铒光纤激光器混沌控制产生周期脉冲及多周期现象研究[J]. 光子学报, 2008, **37**(4): 636~643

- 13 Yan Senlin, Chi Zeying, Chen Wenjian. Chaos synchronization through reverse-phase and its encoding in Erbium-doped fiber lasers [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(1): 29~32  
颜森林, 迟泽英, 陈文建. 掺铒光纤激光器反相位混沌同步及其编码[J]. *光学学报*, 2004, **24**(1): 29~32
- 14 Yang Lei, Pan Wei, Luo Bin *et al.*. Synchronization of chaotic Erbium-doped fiber lasers by multivariable unidirectionally couple [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(7): 992~996  
杨磊, 潘伟, 罗斌等. 多变量耦合实现双环掺铒光纤激光器混沌同步[J]. *中国激光*, 2008, **35**(7): 992~996
- 15 Ingo Fischer, Raúl Vicente, Javier M. Buldú *et al.*. Zero-lag long-range synchronization via dynamical relaying [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, **97**(12): 123902
- 16 Brian B. Zhou, Rajarshi Roy. Isochronal synchrony and bidirectional communication with delay-coupled nonlinear oscillators [J]. *Phys. Rev. E*, 2007, **75**(2): 026205
- 17 Dongzhou Zhong, Guangqiong Xia, Zhengmao Wu *et al.*. Complete chaotic synchronization characteristics of the linear-polarization mode of vertical-cavity surface-emitting semiconductor lasers with isotropic optical feedback [J]. *Opt. Commun.*, 2008, **281**(6): 1698~1709
- 18 Fan Li, Xia Guangqiong, Wu Zhengmao. Chaotic parallel synchronization of optoelectronic feedback semiconductor lasers [J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(2): 989~994  
樊利, 夏光琼, 吴正茂. 基于光电反馈的激光混沌并联同步系统研究[J]. *物理学报*, 2009, **58**(2): 989~994
- 19 E. Ott, C. Grobogi, J. A. Yorke. Controlling chaos [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(11): 1196~1199
- 20 Feng Xiuqin, Shen Ke. Controlling hyperchaos in degenerate optical parametric oscillator by modulation [C]. *SPIE*, 2005, **5646**: 126~132
- 21 Feng Xiuqin, Shen Ke. Anti-control of chaos on the degenerate optical parametric oscillator [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(9): 4455~4459  
冯秀琴, 沈柯. 简并光学参变振荡器混沌反控制[J]. *物理学报*, 2006, **55**(9): 4455~4459
- 22 Feng Xiuqin, Shen Ke. Phase synchronization and anti-phase synchronization of chaos for degenerate optical parametric oscillator [J]. *Chinese Phys.*, 2005, **14**(8): 1526~1532
- 23 Feng Xiuqin, Shen Ke. Synchronization of chaotic degenerate optical parametric oscillator by hyperchaotic signal modulating parameter [J]. *Chinese J. Computational Physics*, 2007, **24**(6): 677~682
- 24 Feng Xiuqin, Shen Ke. Controlling hyperchaos and periodic synchronization in DOPO with parameter modulated by an external periodic signal [J]. *Chaos. Soliton. Fract.*, 2008, **35**(3): 506~511
- 25 Xiuqin Feng, Ke Shen. Controlling hyperchaos and synchronizing periodic states in the DOPO [J]. *Opt. Quant. Electron.*, 2005, **37**(7): 695~703
- 26 Tian Xiaohua, Fei Jia, Guo Qizhi. The influence of driving field on dynamical characteristics in nondegenerate optical parametric oscillator [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(5): 1441~1446  
田晓华, 费佳, 郭奇志. 驱动场对非简并光学参变振荡器动力学特性的影响[J]. *光学学报*, 2010, **30**(5): 1441~1446
- 27 K. J. McNeil, C. W. Gardiner. Quantum statistics of parametric oscillator [J]. *Phys. Rev. A*, 1983, **28**(3): 1560~1566