

文章编号: 0253-2239(2010)06-1673-07

二维实小波变换在空间载频条纹相位分析中的应用

李思坤 苏显渝 陈文静

(四川大学光电科学技术系, 四川 成都 610064)

摘要 将二维实小波变换和希尔伯特变换相结合应用到空间载频条纹相位分析中。首先对载频条纹进行希尔伯特变换构造解析信号,然后对其解析信号进行二维实小波变换,提取小波脊处对应的小波变换系数的相位信息即可得到有效的物体高度调制信息。给出了详细的理论分析。计算机模拟和实验表明当条纹中相位存在突变和快变的区域时,采用二维实小波变换比一维实小波和复小波提取相位精度更高,即使在存在噪声污染的情况下也表现出良好的可靠性,体现出了二维实小波提取相位的优势。

关键词 光学测量;小波变换轮廓术;二维小波变换;希尔伯特变换;相位分析

中图分类号 O439 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103006.1673

Applications of Two-Dimensional Wavelet Transform on Phase Analysis of Spatial Carrier-Fringe Patterns

Li Sikun Su Xianyu Chen Wenjing

(Department of Opto-Electronic, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

Abstract Two-dimensional (2D) wavelet transform is applied to phase analysis of spatial carrier-fringe patterns. Hilbert transform is firstly performed on carrier-fringe patterns to get the complex signals, in which the phase information is included. And then two-dimensional wavelet transform is carried out on the signals. Finally, the phase information demodulated by the height of object can be gotten from the wavelet transform coefficients at the wavelet ridge position. The result performs better than that of one-dimensional wavelet transform method, especially when there is much noise in the fringe patterns. Computer simulation and experiments verify the validity of the proposed method.

Key words optical measurement; wavelet transform profilometry; two dimensional wavelet transform; Hilbert transform; phase analysis

1 引 言

随着计算机技术的发展,空间载频条纹相位分析技术被应用到各个领域。其中傅里叶变换轮廓术是应用最为广泛的方法之一。在光学三维测量中,傅里叶变换轮廓术^[1~3]由于其单帧获取、实时快速的特点备受关注。但是由于傅里叶变换缺乏局部分析的能力,因此局部条纹的不完善所引起的相位计算误差会传递到全场。当有用频谱和其他频谱成

分相混叠时,可能无法提取出正确的相位信息^[3]。进一步发展了窗口傅里叶变换轮廓术^[4,5],但是由于固定的窗口大小,仍然不能最优化地解决上述问题。小波变换由于具有优秀的时频分析特性而被应用到相位分析技术中来,出现了小波变换轮廓术^[6~9]。该方法很好地弥补了傅里叶变换和窗口傅里叶变换存在的缺陷,较好地解决了局部相位误差传递和频谱混叠问题。

收稿日期: 2009-06-29; 收到修改稿日期: 2009-07-17

基金项目: 国家自然科学基金(60838002,60677028)资助课题

作者简介: 李思坤(1982—),男,博士研究生,主要从事三维面形测量和机器视觉等方面的研究。

E-mail: lisk0409@126.com

导师简介: 苏显渝(1944—),男,教授,博士生导师,主要从事光学三维传感与机器视觉、光电信息技术及应用等方面的研究。E-mail: xysu@scu.edu.cn(中国光学学会会员号:6100105)

通常的小波变换轮廓术采用 Morlet 复小波作为母小波对空间载频条纹进行一维连续小波变换,通过提取小波脊处小波变换系数的相位信息,得到物体高度调制的相位信息。但是由于 Morlet 复小波不是严格紧支撑的,需要较多的震荡次数和采样点,这使得载频条纹中相位突变和快变的地方被平滑,丢失了有用信息。为了进一步提高母小波的空域局部化能力,最近一维实小波变换也被应用到载频条纹相位分析中^[10]。首先对载频条纹进行希尔伯特变换构造解析信号,然后对其解析信号进行一维实小波变换,提取小波脊处对应的小波变换系数的相位信息即可得到有效的物体高度调制信息,该方法常用来分析细节和突变。本文把二维实小波变换应用到载频条纹相位分析中,可以有效地提取物体高度调制的相位信息,在相位存在突变和快变处提取精度优于一维实小波变换方法和 Morlet 复小波方法。即使在有噪声存在的情况下,也表现出良好的可靠性。计算机模拟和实验验证了所提方法的可行性。

2 原 理

2.1 小波变换轮廓术

小波变换轮廓术的测量光路如图 1 所示。

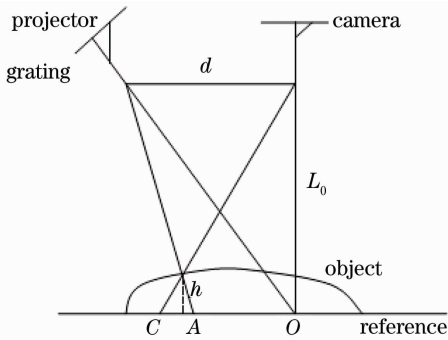


图 1 测量系统原理图

Fig. 1 Schematic diagram of measuring system

投影装置投影一幅正弦结构光场到被测物体表面,成像装置从另一个角度获得的变形结构光场为 $g(x, y) = A(x, y) + B(x, y) \cos[2\pi f_0 x + \phi(x, y)]$,

(1)

式中 $A(x, y)$ 为条纹的背景光场, $B(x, y)$ 为衬比度,二者和投影光场相比通常是缓慢变化的可以近似为常数; f_0 为投影光栅的基频, $\phi(x, y)$ 为物体高度分布 $h(x, y)$ 引起的调制相位。设 $g(x, y)$ 在沿条纹结构方向上的一维分布表示为 $f(x)$, 采用复小波对其进行连续小波变换

$$W_f(s, b) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{s}\right) dt = f(x) * \bar{\psi}(x). \quad (2)$$

对应的频域表达式为

$$W_f(s, b) = \frac{\sqrt{s}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \bar{\psi}(s\omega) \exp(j\omega b) d\omega, \quad (3)$$

式中 $*$ 为卷积运算, $\bar{\psi}(x)$ 为母小波函数的复共轭, $F(\omega)$ 和 $\psi(\omega)$ 分别表示 $f(x)$ 和 $\psi(t)$ 的傅里叶变换, s 为小波函数的尺度因子,表示与频率有关的伸缩, b 为位移因子, j 为虚数单位。对于给定位置 b , 在不同的尺度 s 下对信号进行多分辨率分析。由(3)式结合傅里叶变换的尺度性质,可以把小波变换看作基本频率特性为 $\psi(\omega)$, 相对带宽恒定的带通滤波器在不同的尺度 s 下对信号进行滤波的结果。

沿尺度轴方向上,小波变换幅值的最大值的连线定义为小波变换的“脊”^[11]。“脊”对应于有效频带的信息。提取“脊”所对应的小波变换系数的相位信息 $\phi_{\text{ridge}}(x, y)$ 。移走被测物体,投影光栅到参考平面上,做相同的处理,得到相位分布为 $\phi_0(x, y)$, 式中 $\phi_0(x, y)$ 为参考平面的相位信息。则由物体高度引起的相位变化为

$$\Delta\phi = \phi_{\text{ridge}}(x, y) - \phi_0(x, y), \quad (4)$$

用一定的方法进行相位展开后,可以得到其连续的调制相位 $\phi(x, y)$ 。

在远心光路条件下, $L_0 \gg h(x, y)$, 被测物体的高度分布与调制相位关系为

$$h(x, y) = -\frac{L_0}{2\pi f_0 d} \phi(x, y), \quad (5)$$

式中 L_0, d 都为系统结构参量。

2.2 实小波变换在空间载频条纹相位分析中的应用

实小波变换只能从幅值角度对实信号进行分析,无法提取信号的相位信息^[12],通过希尔伯特变换^[13,14]构造解析信号来获得相位信息。

给定一个信号 $f(x)$, 其希尔伯特变换定义为

$$H[f(x)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{x - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x - \tau)}{\tau} d\tau = f(x) * \frac{1}{\pi x}, \quad (6)$$

由希尔伯特变换构造 $f(x)$ 的解析信号可以表示为 $z(x) = f(x) + jH[f(x)] = a(x) \exp[j\phi(x)]$, $a(x) = \{f^2(x) + H^2[f(x)]\}^{1/2}$, $\phi(x) = \arctan\{H[f(x)]/f(x)\}$, 分别为解析信号的幅值和相位。如果信号 $f(x)$ 是

单分量信号, 则其对应解析信号的相位就具有了物理意义。

由(1)式知, 空间载频信号由两个分量组成, 式中 $A(x, y)$ 为条纹的背景光场, $B(x, y)\cos[2\pi f_0 x + \phi(x, y)]$ 表示物面反射的正弦结构光场, 并且在实际测量中通常会存在噪声等因素, 使得空间载频信号是多分量的。因此直接用希尔伯特变换构造其解析信号不能提取到有用的调制相位信息。由于小波变换具有多分辨率分析的功能, 可以将信号随着尺度因子的伸缩划分为不同的频带, 所以将二者结合起来, 先利用希尔伯特变换构造解析信号获得相位信息, 然后对其进行小波变换提取有用频带相位信息, 有利于有效调制相位信息的提取。

对信号 $f(x)$ 的希尔伯特变换进行小波变换, 由(2)式和(6)式可得到

$$W\{H[f(x)]\} = \left(f * \frac{1}{\pi x}\right) * \bar{\psi} = (f * \bar{\psi}) * \frac{1}{\pi x} = H\{W[f(x, s)]\}, \quad (7)$$

这说明小波变换可以和希尔伯特变换交换次序。进而解析信号的小波变换可以表示为

$$W[z(x)] = W\{f(x) + jH[f(x)]\} = W[f(x)] + W\{jH[f(x)]\} = W[f(x)] + jH[W[f(x)]]. \quad (8)$$

(8)式说明解析信号的小波变换仍然是解析信号, 并且其实部表示原信号的小波变换, 虚部为其实部的希尔伯特变换。这意味着可以通过解析信号的小波变换系数提取特定频带的相位信息。

令 $I(x) = \frac{1}{\pi x}$, 则 $jI(x) = \frac{j}{\pi x}$ 的傅里叶变换是符号函数 $\text{sgn}(\omega)$, 可得 $I(x)$ 的傅里叶变换为

$$H(j\omega) = -j\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases}, \quad (9)$$

对 $z(x)$ 两边进行傅里叶变换并由上公式得 $Z(j\omega) = \begin{cases} 2F(j\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$, 这表示解析信号只含有正频率部分, 且不改变原信号的频率分布^[14]。这一性质保证了用小波对解析信号进行频域划分结果和对原信号进行频域划分结果一致。因此, 应用实小波对空间载频条纹进行相位分析, 首先对条纹信号进行希尔伯特变换构造解析信号, 获得相位信息, 然后采用实小波进行小波变换, 通过提取“脊”处对应的小波变换系数相位信息, 即可得到有用的调制相位信息。

2.3 二维小波变换和 Mexican hat 小波

对变形结构光场的二维小波变换可以表示为

$$W_g(b_x, b_y, s, \theta) = \frac{1}{s} \iint g(x, y) \phi\left(\frac{x-b_x}{s}, \frac{y-b_y}{s}, r_\theta\right) dx dy. \quad (10)$$

式中 $r_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 表示旋转因子, 以角度 θ 进行坐标旋转; b_x 和 b_y 分别为 x 方向和 y 方向的位移因子; s 为尺度因子。和一维小波变换相比, 二维小波变换在进行伸缩和平移的同时还进行坐标旋转, 因此它不但具有缩放能力, 还具有方向选择性, 进一步提高了小波变换的多分辨率分析能力。对二维信号进行二维小波变换得到的系数是四维的, 如图 2 所示为 $s = [1, 2, 3, 4]$, $\theta = [0, 0.5, 1]$, 对一幅 512×512 的图像做二维小波变换得到的系数分布示意图。

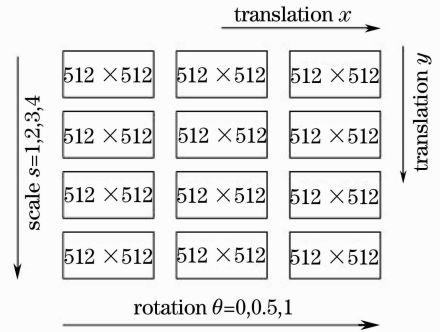


图 2 二维小波变换系数示意图

Fig. 2 Illustration of 2D wavelet transform coefficient

和一维小波变换一样, 二维小波变换可以看作是带通滤波器, 它除了两个方向上的伸缩、平移以外, 还具有方向性。这使得二维小波变换具有良好的抑制噪声的能力。运用二维小波变换对空间载频条纹进行相位分析, 能够取得很好的效果, 特别在有噪声污染的情况下, 能够取得优于一维小波变换相位提取方法的效果。

应用小波变换进行条纹分析, 母小波的选择具有特殊重要的意义。和 Morlet 复小波相比, Mexican hat 小波因为具有较少的震荡次数和更好的空域局部化能力而选择作为母小波应用于相位提取中^[10], 在条纹图相位存在突变和快变的区域表现出更高的精度。文中相应的选取二维 Mexican hat 小波^[14, 16]作为母小波, 其在空域和频域的表达式分别为

$$\psi(x, y) = [2 - (x^2 + y^2)] \exp[-(x^2 + y^2)/2], \quad (11)$$

$\hat{\psi}(\omega_x, \omega_y) = 2\pi(\omega_x^2 + \omega_y^2) \exp[-(\omega_x^2 + \omega_y^2)/2]$, (12) 它在空域和频域的波形分别如图 3 所示。二维 Mexican hat 小波满足径向性质, 它具有同样良好的空

域局部化特性和较少的震荡次数。因此采用二维 Mexican hat 小波作为母小波进行二维小波变换相位提取在条纹图存在相位突变和快变区域的提取精度更

高,特别在有噪声污染的情况下能够取得明显优于二维 Mexican hat 小波变换方法的效果。

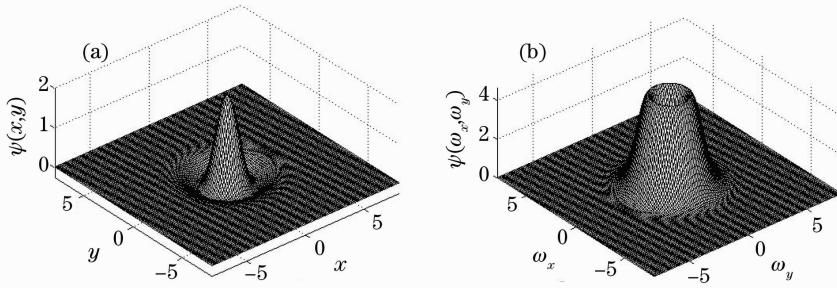


图3 二维 Mexican hat 小波(a)空域波形图和(b)频域波形图

Fig.3 2D Mexican hat wavelet in spatial domain (a) and frequency domain (b)

3 模拟和实验

对于相位存在突变或者快变的条纹图,计算机模拟调制相位的表达式为

$$\phi(x,y) = \begin{cases} (\pi/80) \sqrt{200^2 - (x-256)^2 - (y-256)^2}, & (x-256)^2 + (y-256)^2 \leq 200^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > 200^2 \end{cases} \quad (13)$$

模拟载频条纹如图 4(a)所示,图片大小为 512 pixel × 512 pixel,可见调制相位在圆形边缘,即满足 $(x-256)^2 + (y-256)^2 = 200^2$ 的位置附近产生了明显的突变。分别用 Morlet 复小波、一维 Mexican hat 小波和二维 Mexican hat 小波对载频条纹图进行分析,提取脊上对应的相位信息恢复出的条纹图第 256 行调制相位信息如图 4(b)所示,实线表示模拟调制相位,点线代表 Morlet 复小波提取结果,点画线和虚线分别代表一维和二维 Mexican hat 小波相位分析结果,图 4(c)为对应的误差分布。可见二维 Mexican hat 小波分析法在相位存在突变和快变处精度更高。

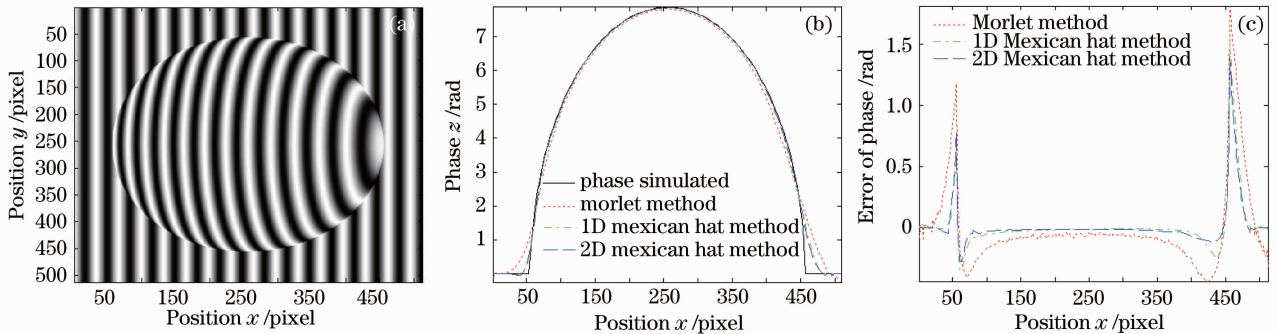


图4 (a)相位存在突变时模拟的变形条纹图,(b)采用三种小波对第 256 行相位提取的结果和对应误差分布(c)

Fig.4 (a) Simulated fringe pattern with phase mutation, (b) restored phase of the 256th row and its error distribution (c)

图 5(a)所示为对人脸模型进行实际测量,采集到的变形条纹图。可见在下巴和头顶部位由于高度变化陡峭引起了条纹相位突变。分别用 Morlet 复小波、一维 Mexican hat 小波和二维 Mexican hat 小波对变形条纹图进行相位提取,提取的结果分别如图 5(b)、图 5(c)和图 5(d)所示。对比三者可见二维 Mexican hat 小波分析法在相位存在突变和快变处精度更高。

对于有噪声存在的情况,模拟图像大小为 512 pixel × 512 pixel,模拟复杂物体的相位函数由 Matlab 数据库中的 peaks 函数提供。设置 $\phi(x,y) = 3\text{peaks}(x,y)$,如图 6(a)所示。投影正弦光栅到物体表面,并在变形光栅基础上,加入标准差可调的正态分布的随机高斯噪声 $N(x,y)$,得到的变形光栅函数为 $g(x,y) = 1 + \cos[2\pi f_0 x + \phi(x,y)] + N(x,y)$, (14)

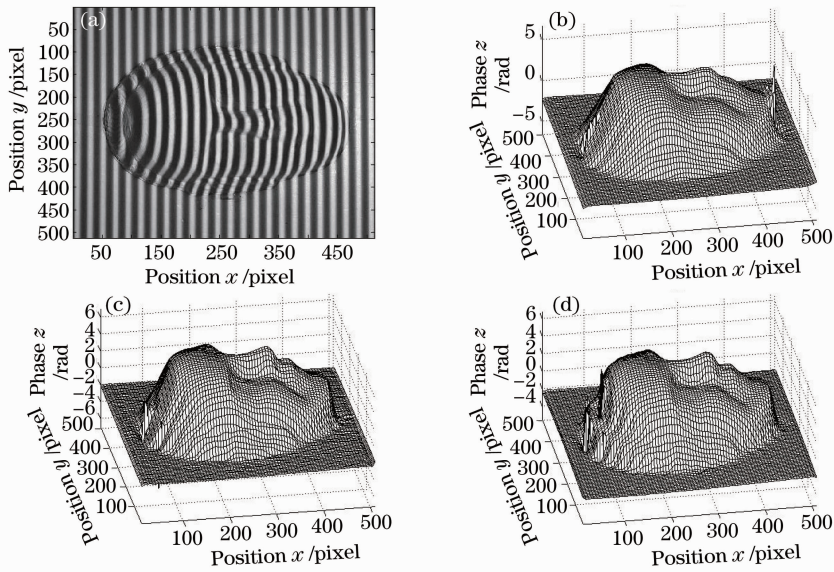


图 5 实验中(a)CCD 拍摄的变形条纹图 (b)Morlet 复小波法恢复的相位(c)一维 Mexican hat 小波变换方法恢复相位和(d)二维 Mexican hat 小波变换方法恢复的相位

Fig. 5 (a) Deformed fringe pattern taken by CCD, (b) phase retrieved by Morlet complex wavelet transform (CWT) method, (c) phase retrieved by 1D Mexican hat method, and (d) phase retrieved by 2D Mexican hat method in the experiment

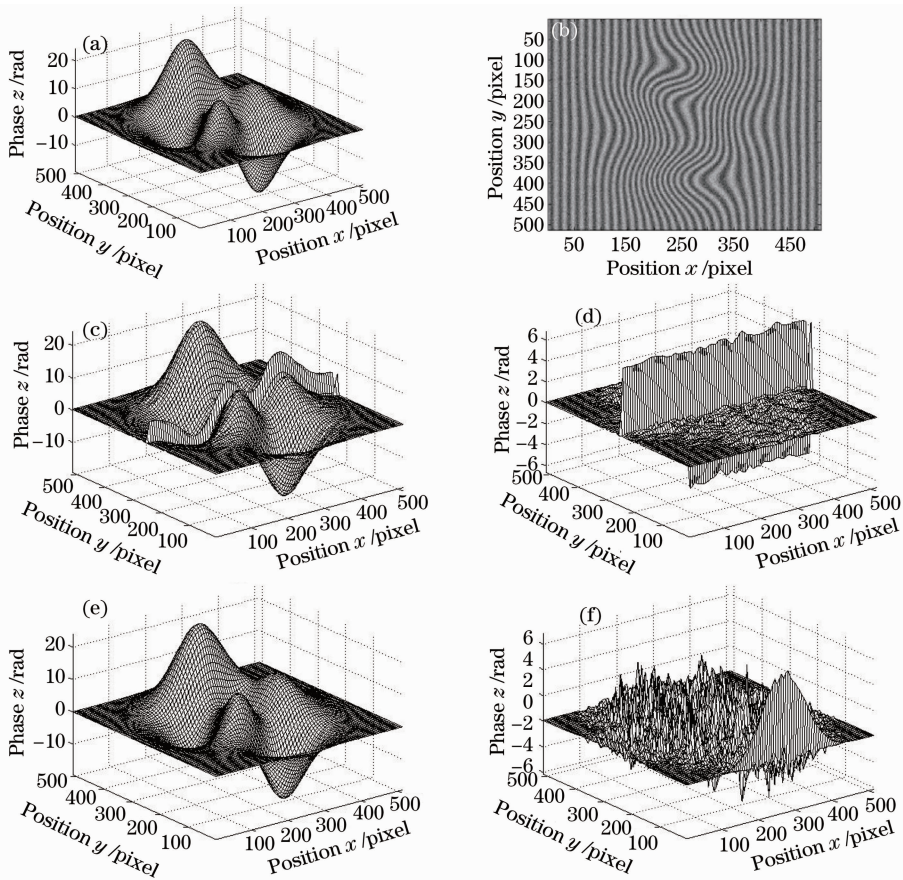


图 6 (a)模拟相位(b)含噪声的变形结构光场, 一维小波变换恢复的(c)相位和(d)误差分布,(e)二维小波变换恢复的相位分布和(f)误差分布

Fig. 6 (a) Phase simulated, (b) deformed fringe pattern with noise, (c) phase retrieved by 1D CWT method, (d) error of 1D CWT method, (e) phase retrieved by 2D CWT method, (f) error of 2D CWT method

将噪声标准差设为 0.4, 得到的含有噪声的变形条纹图如图 6(b) 所示, 为了便于对比分析, 分别采用一维 Mexican hat 小波变换方法和二维 Mexican hat 小波变换方法对其进行相位提取。如图 6(c) 所示由于噪声的存在一维小波变换方法不能准确的提取变形条纹的有效相位信息, 造成了较大的误差传递, 恢复相位存在较大的误差, 如图 6(d) 所示。其误差标准差达到 0.63。图 6(e) 和图 6(f) 分别为采用二维 Mexican hat 小波变换方法恢复的物体相位图及其误差分布图, 其误差标准差为 0.082。可见在噪声污染较严重的情况下, 和一维 Mexican hat 小波变换方法相比, 二维 Mexican hat 小波变换可以有效地提取变形条纹相位信息。

进一步改变噪声标准差的大小, 设置标准差从 0 到 1 变化, 每次增加 0.05, 重复模拟 20 次。由于二维 Mexican hat 小波变换对噪声的抑制作用更强, 如图 7 所示二维 Mexican hat 小波变换方法恢复的相位误差标准差曲线要平滑的多。在噪声标准差小于 0.4 的时候一维 Mexican hat 小波变换方法可以提取到有效相位信息, 当噪声标准差大于 0.4 的时候, 一维 Mexican hat 小波变换方法就有很大的误差了, 而这时候二维 Mexican hat 小波变换方法仍然能够得到比较满意的结果, 其能够允许的噪

声标准差达到 0.85。

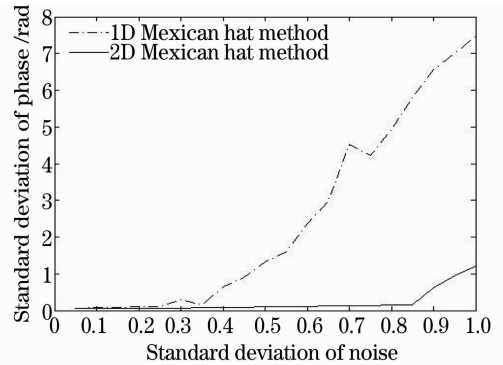


图 7 误差标准差曲线图

Fig. 7 Standard deviation curves

为了进一步验证所提方法的正确性, 对实拍的载频条纹图进行了相位提取。被测物体大致呈圆锥状, CCD 采集到的变形条纹图如图 8(a) 所示, 可见条纹图受到了较严重的噪声污染。由于存在较严重的噪声污染, 一维 Mexican hat 小波变换方法不能较好的提取物体高度调制的相位信息, 造成较大的误差传递如图 8(b) 所示。图 8(c) 所示为二维 Mexican hat 小波变换方法提取到的相位图。对比图 8(b) 和图 8(c) 可见由于二维 Mexican hat 小波变换具有强于一维 Mexican hat 小波变换的抑制噪声的能力, 可以得到较理想的相位信息。

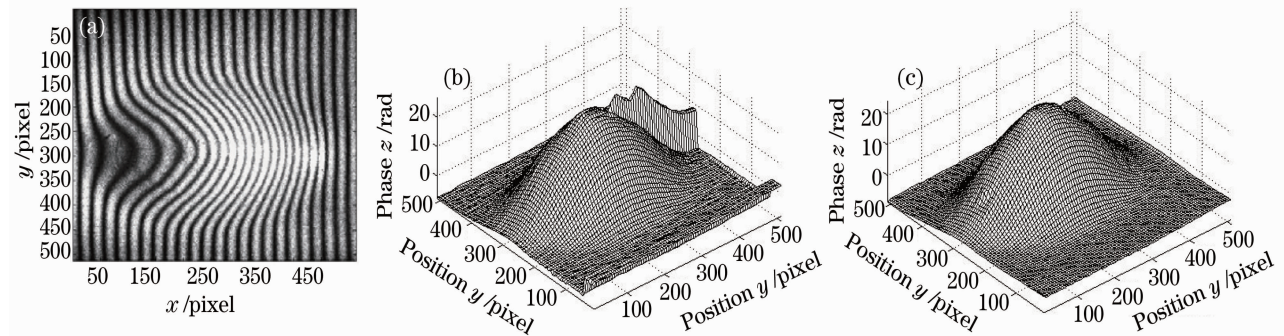


图 8 实验中 (a) CCD 拍摄的变形条纹图, (b) 一维 Mexican hat 小波变换方法恢复的调制相位和

(c) 二维 Mexican hat 小波变换方法恢复的相位信息

Fig. 8 (a) Deformed fringe pattern taken by CCD, (b) modulated phase retrieved by 1D Mexican hat wavelet transform method, and (c) phase retrieved by 2D Mexican hat wavelet transform method in the experiment

4 结 论

二维实小波变换应用到空间载频条纹相位分析中, 对载频条纹进行希尔伯特变换构造解析信号。由于解析信号是单频的, 除了只相差常数 2 以外, 与原实信号具有完全相同的频谱, 保证了小波变换对原信号相同的频域划分效果。对解析信号进行二维 Mexican hat 小波变换, 提取小波脊处对应的小波变

换系数的相位信息即可得到有效地物体高度调制信息。二维小波变换具有在两个方向上的伸缩和旋转特性, 这使得它具有较强的抑制噪声的能力, 在条纹图存在较强的噪声污染的情况下, 能够取得明显优越于一维小波变换方法的效果。同时, 二维 Mexican hat 小波具有较少的震荡次数和良好的空域局部化特性, 在相位存在突变和快变的区域提取

精度更高。另外,和一维小波变换逐行的处理条纹图相比,二维小波变换可以直接对整幅图像进行处理,不需要进行循环运算,减少了运算时间,提高了信息处理的自动化程度。

参 考 文 献

- 1 M. Takeda, K. Mutoh. Fourier transform profilometry for the automatic measurement 3-D object shapes[J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(24): 3977~3982
- 2 Xianyu Su, Wenjing Chen. Fourier transform profilometry: a review[J]. *Opt. and Lasers in Engng*, 2001, **35**(5): 263~284
- 3 Li Sikun, Chen Wenjing, Su Xianyu *et al.*. Empirical mode-decomposition method for eliminating extension of zero component in Fourier transform profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(3): 664~669
李思坤, 陈文静, 苏显渝等. 傅里叶变换轮廓术中基于经验模式分解抑制零频的方法[J]. *光学学报*, 2009, **29**(3): 664~669
- 4 Weng Jiawen, Zhong Jingang. Application of dilating Gabor transform to three-dimensional shape analysis[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(6): 725~729
翁嘉文, 钟金刚. 伸缩窗口傅里叶变换在三维形貌测量中的应用[J]. *光学学报*, 2004, **24**(6): 725~729
- 5 Qian Kemao. Windowed Fourier transform for fringe pattern analysis[J]. *Appl. Opt.*, 2004, **43**(13): 2695~2702
- 6 Weng Jiawen, Zhong Jingang. Apply wavelet transform to phase analysis of spatial carrier-fringe pattern[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(4): 454~459
翁嘉文, 钟金刚. 小波变换在载频条纹相位分析法中的应用研究[J]. *光学学报*, 2005, **25**(4): 454~459
- 7 J. G. Zhong, J. W. Weng. Phase retrieval of optical fringe patterns from the ridge of a wavelet transform[J]. *Opt. Lett.*, 2005, **30**(19): 2560~2562
- 8 Li Sikun, Chen Wenjing, Su Xianyu. Phase unwrapping guided by amplitude of wavelet ridge coefficients in wavelet transform profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(4): 715~721
李思坤, 陈文静, 苏显渝. 小波变换轮廓术中用小波脊系数幅值引导相位展开的研究[J]. *光学学报*, 2008, **28**(4): 715~721
- 9 A. Z. Abid, M. A. Gdeisat, D. R. Burton *et al.*. Spatial fringe pattern analysis using the two-dimensional continuous wavelet transform employing a cost function[J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(24): 6120~6126
- 10 Zhou Xiang, Zhao Hong. Three-dimensional profilometry based on Mexican hat wavelet transform[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(1): 197~202
周翔, 赵宏. 基于 Mexican hat 小波变换的三维轮廓术[J]. *光学学报*, 2009, **29**(1): 197~202
- 11 R. A. Carmona, W. L. Hwang, B. Torresani. Characterization of signals by the ridges of their wavelet transforms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, **45**(10): 2586~2590
- 12 Cui Xuemei, Sun Caixin, Li Xin. Analysis of real wavelet and complex wavelet transform in extracting PD signal feature[J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2004, **19**(7): 90~94
崔雪梅, 孙才新, 李新. 实小波与复小波变换对局部放电在线监测中提取信号特征的特点研究[J]. *电工技术学报*, 2004, **19**(7): 90~94
- 13 Lu Jie, Wang Ming, Huan Hai *et al.*. Fringe analysis with Hilbert transform and its application in the measurement of aspheric mirror[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(6): 781~785
吕捷, 王鸣, 宦海等. 希尔伯特变换条纹分析法及其在非球面镜测量上的应用[J]. *光学学报*, 2005, **25**(6): 781~785
- 14 胡广书. 数字信号处理—理论、算法与实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997. 120~121
- 15 Chen Heming, Shi Weihua, Jia Xiaobing. Realization of 2-D optical wavelet transform using a Mexican-hat wavelet matched filter modified by computer-generated holography[J]. *Chinese J. Lasers*, 1999, **26**(5): 420~424
陈鹤鸣, 施伟华, 贾小兵. 用计算全息制作改进的 Mexican-hat 子波匹配滤波器实现二维光学子波变换[J]. *中国激光*, 1999, **26**(5): 420~424
- 16 Tian Fengchun. A research on the characteristics of Mexican-hat mother wavelet used in optic realization [J]. *J. Chongqing University*, 2002, **25**(12): 62~65
田逢春. 光学小波变换中的 Mexican-hat 小波母函数特性[J]. *重庆大学学报*, 2002, **25**(12): 62~65