

文章编号: 0253-2239(2010)06-1639-06

基于压缩感知的变步长自适应匹配追踪重建算法

高 睿 赵瑞珍 胡绍海

(北京交通大学信息科学研究所, 北京 100044)

摘要 压缩感知是针对稀疏或可压缩信号进行采样的同时即可对信号数据进行适当压缩的新理论, 重建算法是其中关键的一部分, 对采样过程中的准确性验证有着重要的意义。在研究和总结目前已有重建算法的基础上, 提出了一种新的基于贪婪追踪的变步长自适应匹配追踪(VssAMP)算法。该算法通过可变步长及双重阈值控制重建精度, 在信号稀疏度未知的前提下, 即可对信号进行精确重建。实验结果表明, 在相同条件下该算法的主客观重建效果均优于现有同类方法。

关键词 信号处理; 重建算法; 匹配追踪; 压缩感知; 稀疏表示

中图分类号 TN911.7 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103006.1639

Variable Step Size Adaptive Matching Pursuit Algorithm for Image Reconstruction Based on Compressive Sensing

Gao Rui Zhao Ruizhen Hu Shaohai

(Institute of Information Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract Compressive sensing (CS) is a novel signal sampling theory under the condition that the signal is sparse or compressible. It has the ability of compressing a signal during the process of sampling. Reconstruction algorithm is one of the key parts in compressive sensing, and it is of great significance to verify the sampling accuracy. In this paper, properties of the existing reconstruction algorithms are firstly analyzed. And then a new variable step size adaptive matching pursuit (VssAMP) algorithm based on greedy pursuit is presented by introducing an idea of variable step size. The proposed algorithm could control the accuracy of reconstruction by both variable step size and double thresholds although the sparsity of a signal is unknown. The experimental results show that the proposed algorithm can get better reconstruction performances and is superior to other algorithms both visually and objectively.

Key words signal processing; reconstruction algorithm; matching pursuit; compressive sensing; sparse representation

1 引 言

近两年, 信号处理领域诞生了一种新的压缩感知(Compressive/Compressed Sensing)理论^[1], 极大地吸引了相关研究人员的关注。该理论在信号获取的同时, 就对数据进行适当地压缩, 而传统采样方式必须遵循奈奎斯特采样定理, 采样数据量大, 先采样后压缩, 既浪费传感元, 又浪费时间和存储空间,

相较之下, 压缩感知理论针对可稀疏表示的信号, 能够将数据采集和数据压缩合二为一, 这使其在信号处理领域有着突出的优点和广阔的应用前景^[2]。

重建算法的关键是从压缩感知得到的低维数据中精确地恢复出原始的高维数据, 因此对采样过程准确性的验证有着至关重要的意义。目前国外已有多篇关于稀疏重建的论文发表, 主要包括基于 l_1 范

收稿日期: 2009-06-19; 收到修改稿日期: 2009-09-09

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项基金(2009JBM022)资助课题。

作者简介: 高 睿(1986—), 女, 硕士研究生, 主要从事基于压缩感知的重建算法方面的研究。

E-mail: 07120492@bjtu.edu.cn

导师简介: 赵瑞珍(1975—), 男, 博士, 副教授, 主要从事图像处理、小波变换、压缩感知等方面的研究。

E-mail: rzhzhao@bjtu.edu.cn(通信联系人)

数最小的基追踪(BP)^[3]算法;基于 l_0 范数最小的贪婪追踪系列算法,如 MP(Matching Pursuit), OMP(Orthogonal Matching Pursuit)^[4], StOMP(Stagewise OMP)^[5], ROMP(Regularized OMP)^[6], SP(Subspace Pursuit)^[7], CoSaMP(Compressive Sampling MP)^[8], SAMP(Sparsity Adaptive MP)^[9];求解 l_0 范数问题的迭代阈值法^[10]等。在研究和总结这些算法的基础上,结合 SAMP 方法自适应的思想和 StOMP 方法分阶段的思想,针对 SAMP 固定步长所带来的精度不够以及过度估计问题,提出了一种新的变步长自适应匹配追踪(VssAMP)算法。

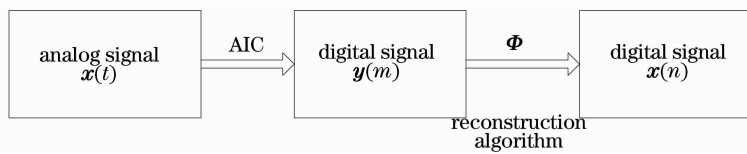


图1 压缩感知过程

Fig. 1 Process of compressive sensing

图1中,信号通过 AIC(Analog-to-Information Conversion)^[11]过程获取,得到 $y(m)$ 之后,根据(1)式中稀疏重建的关系,由传感矩阵 Φ 和适当的重建算法可实现 $x(n)$ 的重建。因此,重建算法对于压缩传感采样过程准确性的验证和后期 $x(n)$ 的重建均有着重要的意义。可以通过求解下面的问题,以便从测量向量 y 中重建出未知信号 x 的逼近 \hat{x} :

$$\min \|x\|_0, y = \Phi x. \quad (2)$$

可将其转化为一个较简单的近似形式求解,

$$\min \|x\|_0, \|y - \Phi x\|_2 < \xi, \quad (3)$$

式中 ξ 是一个极小的常量。在重建中, l_0 范数最小使得结果尽可能地稀疏,但是求解 l_0 范数最小是一个不确定多项式(NP)难问题,而 l_2 范数最小很难使结果稀疏,因此有算法考虑将(2)式中 l_0 范数转化为 l_1 范数进行求解^[1]。

目前已有的稀疏重建算法中,BP算法是在线性规划(LP)下求解 l_1 范数最小问题。它需要最少的测度,但其高算法复杂性可能会影响到实际大规模应用。有一些快速凸松弛算法得到或逼近了BP的解,比如梯度投影方法(GPSR)^[12],该方法速度较快,重建效果也较好。

还有另一系列的基于迭代贪婪追踪的稀疏重建算法,它们解决的是 l_0 范数最小问题,最早的有 MP 和 OMP,其中 OMP 算法在重建时每次迭代得到 x 的支撑集 F 的一个原子。之后又出现了 StOMP 和 ROMP,它们在每次迭代时得到 F 的一组原子,因此

2 压缩感知与重建算法

设 $x(n)$ 为传统采样所得到的 N 维数字信号,如果它是一个 K -稀疏(仅有 K 个非零元, $K \leq N$)或是可压缩(通过变换可成为 K -稀疏)的信号,那么它在线性变换下仅用少量的系数即可很好地估计出来。而通过压缩感知过程可直接得到 M 维信号 $y(m)$ ($M < N$),称之为测量向量,它们之间的关系为^[1]

$$y = \Phi x, \quad (1)$$

式中 Φ 称为传感矩阵或测量矩阵,大小为 $M \times N$ 。当 K, M, N 之间满足 $M \geq K \lg(N)$ 时, $x(n)$ 即可置信重建。压缩感知过程如图1所示。

速度比 OMP 快。这些算法的重建复杂性大致都在时间复杂度 $O(KMN)$ 附近,远低于 BP 算法,但它们的性能较差,只有 M 较大时才能取得较好的重建效果。最近又出现了引入回溯思想的 SP 和 CoSaMP 算法,它们理论重建质量与 LP 相当,同时重建复杂度低,但是这些算法都是建立在稀疏度 K 已知的基础上。然而实际应用中, K 往往是未知的,由此出现了稀疏度 K 自适应的 SAMP 算法,它通过固定步长 s 逐步逼近进行重建,可以在 K 未知的情况下获得较好的重建效果,速度也远快于 OMP 算法。提出的 VssAMP 算法,也是一种在 K 未知的情况下,解决 l_0 范数最小问题的贪婪迭代算法。

3 变步长自适应匹配追踪算法

匹配追踪系列算法的基本思想是在每一次的迭代过程中,从测量矩阵里选择出一些与信号最匹配的原子形成信号的支撑集 F ,来重建出信号并计算出与原信号之间的残差 r 。通过该残差选择更匹配的原子,来对支撑集进行更新。通过这样的迭代过程,该系列的算法实现了信号的重建。

该系列的大部分算法在迭代时,均需要将 K 作为先验知识来控制算法的迭代次数。当 K 未知时,算法需要设计合适的停止迭代条件,以代替 K ,并达到较好的重建效果。通过步长 s 逐步逼近 K 进行重建是一个较好的想法,可将迭代重建过程分为多个阶段,每个阶段所对应的支撑集 F 的大小 L 之差即

为步长 s , 由此 L 不断增大, 可以在未知的前提下逼近 K . 在每个阶段中, \mathbf{x} 重建所需的支撑集 F 的大小 L 不发生改变, 通过传感矩阵 Φ 和残差 \mathbf{r} 的积 $|\Phi\mathbf{r}|$ 最大的一些值形成候选集 C , 再经过迭代从候选集 C 中选取支撑集 F 中的原子. 当该支撑集 F 的大小 L 不能满足重建要求时, 以步长 s 来增大它的规模.

由于 K 未知, 所以步长 s 取一个较小值是最稳妥的选择, 但重建速度将大为下降, 耗费大量的时间. 如何更加精确地重建信号, 在运算时间和效果中取得平衡, 需要根据信号对 s 进行合理选择.

通过对大小为 $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$ 的 Lena, Boat, Barbara 图像, 采样率 (M/N) 分别选取 0.5, 0.4, 0.3 进行实验, 发现当支撑集大小不断增加但又未达到 K 时, 相邻两个阶段中重建信号的能量差 $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|_2$ 是不断减小的, 如图 2 所示.

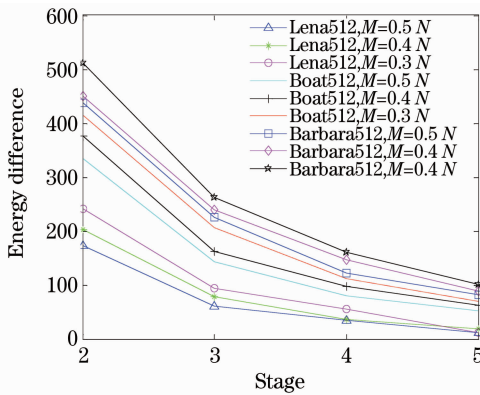


图 2 相邻阶段重建信号的能量差

Fig. 2 Reconstructed signal's energy difference between two consecutive stages

相邻阶段重建信号的能量差在最初的阶段中下降很快, 之后下降幅度减小, 最后基本上稳定在某一范围内, 这说明重建出的信号能量趋于稳定, 基本可视重建完成, 这为设计算法停止迭代条件提供了保证.

如前所述, 为了提高重建效果, 且不明显增加重建时间, 根据相邻阶段重建信号的能量差, 提出设定双重阈值, 以“大步长快速接近、小步长逐步逼近”重建信号的设想. 算法中, 根据双阈值设计了双重停止迭代条件. 停止迭代条件 1 中设置阈值 T_1 , 当相邻阶段重建信号的能量差接近该阈值时, 说明算法通过大步长快速接近了重建目标信号, 可以减少重建的时间; 停止迭代条件 2 中设置阈值 T_2 , 且阈值 T_2 的值小于 T_1 , 当信号的能量差接近 T_2 时则说明算法通过小步长逐步逼近了 \mathbf{x} , 这样可以提高重建

精度.

1) 停止迭代条件 1: 相邻两个阶段中重建信号的能量差 $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|_2 \leq T_1$.

2) 停止迭代条件 2: 相邻两个阶段中重建信号的能量差 $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|_2 \leq T_2$ 或 $\|\mathbf{x}_{k-1}\|_2 \leq \|\mathbf{x}_k\|_2$.

核心算法步骤如下:

输入: 传感矩阵 Φ , 采样向量 \mathbf{y} , 步长 s ;

输出: 未知输入信号 \mathbf{x} 的 K -稀疏的逼近 $\hat{\mathbf{x}}$;

初始化: $\mathbf{x} = 0$, 残差 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, 支撑集 $F_0 = \Phi$, 支撑集大小 $L = s, k = 1$;

循环执行步骤 1~8:

步骤 1: 计算 $|\Phi\mathbf{r}_{k-1}|$, 取最大的 L 个值所对应的脚标, 存入集合 S_k , 得到候选集 $C_k = F_{k-1} \cup S_k$;

步骤 2: 计算 $|\Phi_{C_k}^T \mathbf{y}|$, 取最大的 L 个值所对应的脚标, 存入支撑集 F , 计算残差 $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \Phi_F \Phi_F^T \mathbf{y}$;

步骤 3: 判断是否满足停止迭代条件 1, 若满足, 执行步骤 4, 若不满足, 执行步骤 5;

步骤 4: 判断是否满足停止迭代条件 2, 若满足, 则停止迭代, 若不满足, 执行步骤 8;

步骤 5: 判断是否满足 $\|\mathbf{r}\|_2 \geq \|\mathbf{r}_{k-1}\|_2$, 若满足, 执行步骤 6, 若不满足, 执行步骤 7;

步骤 6: 进入到下一阶段, 支撑集 F 的大小增大为 $L = L + s, k = k + 1$;

步骤 7: 更新支撑集 $F_k = F$, 更新残差 $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}, k = k + 1$;

步骤 8: 进入到下一小阶段, 执行步骤 1. 改变步长 $s = s/2$, 支撑集 F 的大小增大为 $L = L + s, k = k + 1$.

4 实验结果

为了检验本文算法的正确性和有效性, 采用大小为 $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$ 的 Lena 图像作为测试图像, 并采用了基于迭代贪婪追踪的稀疏重建算法中的 OMP 算法^[3]、自适应的 SAMP 算法^[9], 以及目前常用的 GPSR 算法^[8]与提出的 VssAMP 算法进行比较.

由算法描述, 可以看出 VssAMP 算法保持了 SAMP 不需要输入稀疏度 K 作为参数的优势, 同时双重阈值的设定优化了算法的效果, 而变步长的思想使得算法能够更加精确地逼近 K . 当步长 s 的初值选取适当时 (与图像大小相比), 算法能够自适应地根据重建出的信号能量来判断是否改变 s , 从而增大支撑集 F 的大小, 这样就降低了过度估计现象出现的可能性, 提高了重建的精度. 由于步长可由算法根据实际情况进行改变, 因此和 SAMP 算法相

同,选取 $s = M/\lceil 2\lg(N) \rceil$ 。另一方面,由于变步长思想的引入,虽然算法重建时间略多于 SAMP 算法和 GPSR,但是仍和二者处于同一数量级,远快于 OMP 算法。

关于阈值的设定,考虑由于阈值与图像本身、以及采样率 (M/N) 有着密切的关系,因此根据大量实验结果, T_1 选取 $\lg(s)(N/M)^4 e^{-5} \|\mathbf{x}_{k-1}\|_2$, T_2 选取 0.2 倍的 T_1 , 即 $0.2\lg(s)(N/M)^4 e^{-5} \|\mathbf{x}_{k-1}\|_2$ 时效果较好。

考虑到图像经小波变换可变得稀疏^[13],先重建

出图像的小波系数,然后再用小波反变换恢复出原图像。实验中,采用结构化随机矩阵^[14]作为感知矩阵,选用 Daubechies 双正交 9-7 小波进行正交变换,图 3 给出了 Lena 图像在采样率 (M/N) 为 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 时,利用 VssAMP 算法进行重建的结果。为了验证结果,图 4 给出了采样率 $M/N=0.3$ 时, VssAMP, SAMP, GPSR 和 OMP 算法对 Lena 图像的重建效果对比。为了更加直观地对比不同算法的效果,还给出了 Lena 图像使用不同方法重建后的峰值信噪比 (PSNR) 值,如表 1 所示。



图 3 VssAMP 算法 Lena512 图像的重建效果。(a)原始图像;(b) $M/N=0.5$;(c) $M/N=0.4$;
(d) $M/N=0.3$;(e) $M/N=0.2$;(f) $M/N=0.1$

Fig. 3 Reconstruction effect of VssAMP for Lena512. (a) original image; (b) $M/N=0.5$;
(c) $M/N=0.4$; (d) $M/N=0.3$; (e) $M/N=0.2$; (f) $M/N=0.1$



图 4 不同算法下 Lena512 图像的重建效果 ($M/N=0.3$)。 (a)原始图像; (b) VssAMP 算法;
(c) SAMP 算法; (d) GPSR 算法; (e) OMP 算法

Fig. 4 Reconstruction effect of different algorithms for Lena512. (a) Original image;
(b) VssAMP; (c) SAMP; (d) GPSR; (e) OMP

表 1 Lena 图像使用不同算法重建后的 PSNR 值比较

Table 1 Comparison of PSNRs with different reconstruction methods

M/N	Lena512×512 PSNR/(dB)			
	OMP	GPSR	SAMP	V _{ss} AMP
0.1	19.33	23.86	25.93	25.93
0.2	21.05	27.24	28.54	29.13
0.3	22.49	30.84	32.04	32.11
0.4	24.38	33.34	33.93	33.94
0.5	26.12	35.42	35.37	35.47

由图 3 可见,经 V_{ss}AMP 算法重建后的图像细节保留较好,有着较好的视觉效果,随着采样率的上升,PSNR 值也随之增大。采样率为 0.5 时,PSNR 值达到了 35.47 dB,采样率为 0.1 时,PSNR 值也有 25.93 dB。由图 4 直观看出,V_{ss}AMP,SAMP,GPSR 在采样率为 0.3 时,均具有较好的视觉效果,远超出贪婪算法中较为基础的 OMP 算法。

通过表 1 中四种算法在采样率(M/N)为 0.5~0.1 时 PSNR 值的对比,可以看出 V_{ss}AMP 算法在不同的采样率均具有最好的效果。在 Boat512×512、Barbara512×512 图像上的实验本算法也有类似的结果。实验中 V_{ss}AMP,SAMP,GPSR 的运算时间都在几百秒,远小于 OMP 所需时间。此外,表 2 给出了不同重建算法大致的复杂度,表 3 中给出了不同重建算法在采样率(M/N)为 0.5~0.1 时的重建匹配度对比,作为衡量重建效果的又一指标。其中,重建匹配度(ReMD)定义为 $D_{\text{ReM}} = 1 - \frac{\| \hat{x} - x \|}{\| \hat{x} + x \|}$ 。由此可见,V_{ss}AMP 算法具有速度快、精度高的优越性。

表 2 不同重建算法复杂度的比较

Table 2 Comparison of complexity for different reconstruction algorithms

Algorithm	OMP	GPSR	SAMP	V _{ss} AMP
Complexity	O(KMN)	O(KN)	O[MNK lg(s)/s]	O[MNK lg(s)/s]

表 3 Lena 图像使用不同算法重建后的匹配度比较

Table 3 Comparison of matching degree with different reconstruction methods

M/N	Lena512×512 D _{ReM}			
	OMP	GPSR	SAMP	V _{ss} AMP
0.1	0.8959	0.9380	0.9514	0.9514
0.2	0.9151	0.9605	0.9641	0.9664
0.3	0.9304	0.9724	0.9760	0.9762
0.4	0.9437	0.9793	0.9807	0.9807
0.5	0.9503	0.9837	0.9837	0.9838

但根据图像本身,在未知稀疏度的前提下能够快速、精确无误地逼近 K,从而重建出效果更好的图像,这仍是一个值得进一步研究和探讨的问题。

5 结 论

结合 SAMP 的自适应性和 StOMP 的分阶段实现思想,针对固定步长所带来的精度不够以及 OMP 耗时长的问题,在稀疏度 K 未知的情况下,提出了一种新的解决 l₀ 范数最小问题的贪婪迭代算法:变步长自适应匹配追踪算法。实验结果表明,该算法重建效果在不同的采样率上均优于 SAMP,GPSR,OMP 算法,重建所需时间与 SAMP,GPSR 处于同一量级,远小于 OMP,是一种综合性能较好的压缩感知重建算法。为了使图像变得更加稀疏,还可以考虑先用该算法重建出图像在 Contourlet 变换域的系数,再恢复出原图像,以便进一步改善其重建效果。

参 考 文 献

- 1 R. Baraniuk. Compressive sensing [J]. *IEEE Signal Proc. Mag.*, 2007, **24**(4): 118~121
- 2 Zhao Ruizhen, Liu Xiaoyu, Li Chingchung *et al.*. Wavelet denoising via sparse representation [J]. *Sci. China Ser. F.*, 2009, **52**(8): 1371~1377
- 3 S. B. Chen, D. L. Donoho, M. A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. *Siam J. Sci. Comput.*, 1998, **20**(1): 33~61
- 4 J. Tropp, A. Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. *IEEE. T. Inform. Theory*, 2007, **53**(12): 4655~4666
- 5 D. L. Donoho, Y. Tsaig, I. Drori *et al.*. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit (StOMP) [C]. *Tech. Report, Stanford, Department of Statistics*, 2006
- 6 D. Needell, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit [J]. *Found. Comput. Math.*, 2009, **9**(3): 317~334
- 7 W. Dai, O. Milenkovic. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [C]. 2008 5th International Symposium on Turbo Codes and Related Topics, 2008. 402~407
- 8 M. A. T. Figueiredo, R. D. Nowak, S. J. Wright. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems [J]. *IEEE J. Selected Topics in Signal Processing*, 2007, **1**(4): 586~598
- 9 T. T. Do, Lu Gan, Nam Nguyen *et al.*. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing [C]. Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, California, 2008
- 10 T. Blumensath, M. E. Davies. Iterative thresholding for sparse approximation [J]. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2008, **14**(5-6): 629~654
- 11 S. Kirolos, J. Laska, M. Wakin. *et al.*. Analog-to-information conversion via random demodulation [C]. Design, Applications, Integration and Software, IEEE Dallas/CAS Workshop on, 71~74, Oct. 2006
- 12 D. Needell, J. A. Tropp. CoSaMP: Iterative signal recovery

- from incomplete and inaccurate samples [J]. *ACM Technical Report* 2008-01, *California Institute of Technology*, Pasadena, 2008. 7
- 13 Yang Fan, Zhao Ruizhen, Hu Shaohai. Adaptive algorithm for image denoising based on correlation properties of contourlet coefficients[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(2): 357~361
- 杨帆, 赵瑞珍, 胡绍海. 基于 Contourlet 系数相关特性的自适应图像去噪算法[J]. *光学学报*, 2009, **29**(2): 357~361
- 14 T. T. Do, T. D. Trany, L. Gan. Fast compressive sampling with structurally random matrices[C]. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Washington D. C. , USA, 2008, 3369~3372