

文章编号: 0253-2239(2010)06-1634-05

# 基于非局部曲率驱动扩散的图像修复

王卫卫 李 莉 韩 雨

(西安电子科技大学学院数学科学系, 陕西 西安 710071)

**摘要** 将空间非局部算子引入曲率驱动扩散方程, 建立了一个基于非局部曲率驱动扩散的图像修复模型。与原模型的主要差别在于, 原模型利用待修复像素的空间局部信息来估计丢失像素, 而新模型利用和待修复像素相似的所有像素来估计丢失像素, 充分利用了图像的全局信息。数值实验表明, 新模型在图像修复, 尤其是纹理图像的修复方面非常有效。

**关键词** 图像处理; 曲率驱动; 非局部算子; 图像修复

**中图分类号** TP391 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20103006.1634

## Image Inpainting Based on Nonlocal Curvature-Driven Diffusion

Wang Weiwei Li Li Han Yu

(Department of Mathematics, School of Science, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract** A nonlocal image inpainting model is proposed by incorporating the nonlocal differential operators into the curvature-driven diffusion model. The new model differs from the original model in that pixels of similar structures rather than pixels in the local neighborhood (the case for the original model) are utilized to estimate the lost pixels. This difference makes the new model perform very efficiently in inpainting images, especially textured images.

**Key words** image processing; curvature-driven diffusion; nonlocal operator; image inpainting

### 1 引 言

数字图像修复是利用缺损图像中的有效信息按一定算法对缺损区域进行信息填充的过程<sup>[1]</sup>, 是数字图像处理、视觉分析和影视制作等领域中的重要技术。最初用于恢复绘画、照片和电影胶片中的裂缝、划痕和污点等, 后来又推广到去遮挡、文字去除、制作特效以及图像通信中恢复丢失块等方面。近年来基于偏微分方程(PDE)和变分的方法被广泛应用于图像修复<sup>[2~9]</sup>。这类方法根据图像特征, 沿特定的方向将周边的已知信息扩散到未知区域中。典型的方法包括最早的(BSCB)模型<sup>[2]</sup>用三阶 PDE 模拟平滑传输过程, 基于总变差(TV)的模型<sup>[3]</sup>, 基于曲率驱动的扩散(CDD)模型<sup>[4,5]</sup>等。其中 CDD 模型中扩散强度不仅依赖于灰度的梯度值, 而且考虑了轮廓等照度线的曲率的影响, 扩散由二者共同控制。在等照度线有较

大曲率处扩散更加强烈, 随着曲率的减小扩散逐渐减弱, 克服了 TV 修复模型不能保持“视觉连通性”准则<sup>[4,5]</sup>的缺点。该模型能很好地修复非纹理图像并保持其边缘信息, 但对纹理图像修复效果欠佳。这是由于模型中采用的都是局部算子, 对修复区域每点的扩散只考虑了该点周围的局部信息, 而纹理是图像像素值在空间上的某种周期性的变化模式<sup>[10~12]</sup>, 即纹理区域有较强的全局相似性, 所以对纹理图像的修复采用非局部算子会产生较佳效果。

本文利用 Gilboa 定义的非局部微分算子<sup>[13]</sup>, 构造了一种非局部的曲率驱动偏微分方程模型, 通过计算待修复区域中像素点的非局部梯度与曲率, 来选取全局最优的扩散方向, 从而能够解决纹理图像的修复问题。数值实验表明, 新模型不仅能够继承 CDD 模型的“连通性”, 更重要的是对于含有纹理区

收稿日期: 2009-06-18; 收到修改稿日期: 2009-09-03

基金项目: 国家自然科学基金(60872138)资助课题。

作者简介: 王卫卫(1970—), 女, 博士, 教授, 主要从事图像处理的变分、偏微分方程及多尺度几何分析等方法和建模等方面的研究。E-mail: wwwang@mail.xidian.edu.cn

域的图像有非常好的修复效果。

## 2 非局部曲率驱动扩散模型

文献[4,5]中给出的 CDD 模型如下,仅考虑修补,不考虑去噪,因此去掉了忠诚项:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{|k|}{|\nabla u|}\nabla u\right), & \mathbf{x} \in D, t \in (0, T) \\ u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D^c, t \in [0, T] \end{cases} \quad (1)$$

式中  $u(\mathbf{x}, t)$  是  $t$  时刻的修复图像,初始条件  $u_0(\mathbf{x})$  是已知的待修复图像,  $D$  和  $D^c$  分别为待修复区域和已知区域,图像定义域  $\Omega = D \cup D^c$ ,  $k$  为等照线的曲率,  $\nabla u$  为  $u$  的梯度,  $|\nabla u|$  为  $\nabla u$  的模。

CDD 模型是对 TV 修复模型<sup>[3]</sup>  $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$  的改进,即在扩散系数中加入了等照度线的曲率,从而使扩散强度受到图像中多重空间几何信息的控制,在等照度线曲率较大的区域扩散更快,随着曲率的减小,扩散逐渐减弱,这使得修复过程能够消除大曲率而稳定小曲率,从而满足视觉连通性准则<sup>[4,5]</sup>。正如 Chan 等<sup>[4,5]</sup> 指出的那样,该模型是局部的低层修复模型,有一个本质的缺点:Chan 从人类认知的角度将其提出的局部修复模型(包括 CDD 模型)称为低层修复模型,这些局部模型在修复图像时只利用了填充区域周围的局部信息,对非纹理图像有很好的修复效果,但对含有丰富纹理的图像效果却很不理想。如图 1 所示,对左边待修复的图像,待修复区域是中心方块,由于视觉连续性,通常人们会判断左图为一个完整的十字,将待修复区域填充成黑色。但若把左图嵌入到右图,人们会判断该图是棋盘的一部分,将待修复区域填充成白色,之所以做出这种判断,是由于人类会根据全局信息来识别。而文献[3,4]中的低层修复模型只利用局部信息进行修复,对图 1 中的右图其修复结果仍为黑色而非白色,也就是说局部模型对右图的修复结果是错误的。

利用 Gilboa 的非局部微分算子<sup>[13]</sup> 给出一个非局部的曲率驱动扩散模型,即非局部 CDD 模型,在

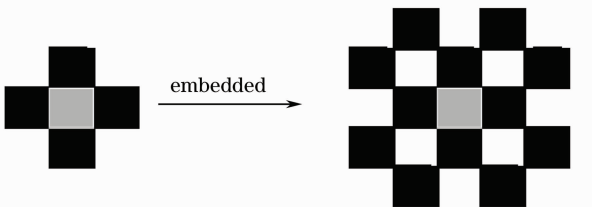


图 1 纹理修复

Fig. 1 Texture inpainting

扩散过程中,由于利用了空间上全局的相似信息,模型能够识别全局的结构化模式。实验结果表明,非局部 CDD 模型对于纹理图像有很好的修复效果。

基于非局部算子和模型 1,给出如下扩散方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}_w\left(\frac{|k_w|}{|\nabla_w u|}\nabla_w u\right), & \mathbf{x} \in D, t \in (0, T) \\ u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D^c, t \in [0, T] \end{cases} \quad (2)$$

当模型中所有的空间导数都采用传统导数时,就是 CDD 模型<sup>[4,5]</sup>,这里考虑非局部导数。 $\nabla_w$  为非局部梯度算子,  $\operatorname{div}_w$  为非局部散度算子,  $k_w$  为非局部的曲率,分别定义如下<sup>[13]</sup>:

设图像函数  $u(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$ , 图像定义域  $\Omega \subset R^2$  是一个有界开区域。函数  $u(\mathbf{x})$  在点  $\mathbf{x}(x_1, x_2) \in \Omega$  相对于点  $\mathbf{y}(y_1, y_2) \in \Omega$  的方向导数为

$$\partial_y u(\mathbf{x}) = [u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})] \sqrt{\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}, \quad (3)$$

式中  $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  是权重,且满足对称性:  $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ 。 $u(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}(x_1, x_2)$  点的非局部梯度  $\nabla_w u(\mathbf{x})$  为  $u(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}(x_1, x_2)$  点相对于所有点  $\mathbf{y} \in \Omega$  的方向导数构成的向量

$$(\nabla_w u)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})] \sqrt{\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}, \quad \mathbf{y} \in \Omega. \quad (4)$$

梯度模定义为

$$|\nabla_w u|(\mathbf{x}) = \sqrt{\int_{\Omega} [u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})]^2 \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}}.$$

对于矢量  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times \Omega$ , 非局部散度  $\operatorname{div}_w \mathbf{v}(\mathbf{x})$  为

$$(\operatorname{div}_w \mathbf{v})(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} [\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \sqrt{\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})} d\mathbf{y}. \quad (5)$$

类似的,定义非局部曲率

$$k_w = \operatorname{div}_w\left(\frac{\nabla_w u}{|\nabla_w u|}\right) = \int_{\Omega} [u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})] \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \left[ \frac{1}{|\nabla_w u|(\mathbf{x})} + \frac{1}{|\nabla_w u|(\mathbf{y})} \right] d\mathbf{y}. \quad (6)$$

非局部 CDD 模型的非局部性体现在,对任一点  $\mathbf{x} \in \Omega$ , 其微分运算涉及到图像中所有点  $\mathbf{y} \in \Omega$ ,  $\mathbf{y}$  点对  $\mathbf{x}$  点的贡献依赖于权重  $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , 权重取决于这两点之间的灰度相似性或空间距离。采用文献[13]中给出的基于块的相似性度量

$$d_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\Omega} G_{\alpha}(s) |u(\mathbf{x} + s) - u(\mathbf{y} + s)|^2 ds, \quad (7)$$

式中  $G_{\alpha}(s)$  是标准差为  $\alpha$  的高斯函数。(7)式实际上是分别以  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  为中心的圆形区域所包含的像素点

的灰度值之间的平均相似性。不论这两点的空间距离远近,只要其周围像素点的灰度值足够相似,它们就是相近的。而一般的局部处理方法只考虑了某个像素点的周围按欧氏距离度量相近的点,这是两类方法的本质区别。在图像修复中,待修复区域中点的权值计算是基于块的局部信息(即块中已知像素点的灰度值)来计算的,块的中心点是未知的。根据像素点之间的相似性度量,来确定模型 2 中的权重  $w(x, y)$ :灰度值越相近的点(即块距离越小),说明二者周围的信息越相似,权值应取得大一些,即权值是块距离的减函数,常用二值函数或负指数函数等<sup>[14]</sup>。为简单起见,这里采用二值函数,任一点  $y \in \Omega$  与点  $x$  的权定义为

$$w(x, y) = \begin{cases} 1, & y \in A(x) \text{ or } x \in A(y) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

为了减少计算量,通常将  $y$  限制在包含点  $x$  的一个较大邻域内,邻域的尺寸远大于(7)式中高斯函数的尺度  $\alpha$ ,在此邻域内找出最相似的若干个点  $y$ ,记其全体为  $A(x)$ ,规定其权重为 1,其它点的权重为 0。 $A(x)$ 的定义如下:在  $x$  的一个较大邻域  $S(x) \subset \Omega$  内,找一个点集  $A$  满足

$$A(x) = \arg \min_{A \subset S(x)} \left\{ \int_A d_a(x, y) dy, |A| = \gamma \ll |S(x)| \right\}, \quad (9)$$

式中  $|\cdot|$  为平面区域的面积,在离散情况下,是  $A$  中像素点的个数。图 2 所示是相似块示意图,图中白色区域为待修复区域,实线块为包含有部分已知信息的待修复块,虚线块为找到的几个内部信息与红色块中已知区域信息相似的块。

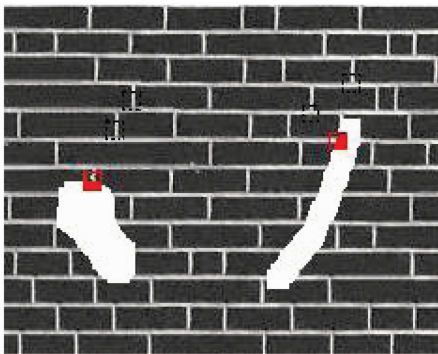


图 2 待修复区域相似块示意图

Fig. 2 Similar blocks for pixels to be inpainted

对于非局部 CDD 模型,由于从图像的已知区域找到最相似的信息进行填充,从而对周期性很强的纹理图像有很好的修复效果,实验结果也表明该模型满足视觉连通性准则。

### 3 新模型的修复算法

#### 3.1 新模型的离散化

设  $u_i$  表示待修复区域  $\Omega$  中某一  $i$  点的灰度值,对于非局部 CDD 模型,采用时间显式差分格式来迭代求解

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot \operatorname{div}_{\omega} \left( \frac{|k_{\omega}^n| |\nabla_{\omega} u_i^n|}{|\nabla_{\omega} u_i^n|} \right) \\ u^0 = u_0 \end{cases} \quad (10)$$

式中  $\Delta t$  为时间步长。 $\omega_{ij}$  为  $w(x, y)$  的离散化,与  $i$  点相似的点  $j$  构成一个非局部邻域:  $j \in N_i = \{j: \omega_{ij} > 0\}$ ,  $\nabla_{\omega}$  的离散化记为

$$\nabla_{\omega} (u_i) = (u_i - u_j) \sqrt{\omega_{ij}}, j \in N_i, \quad (11)$$

$\operatorname{div}_{\omega}$  离散化为

$$\operatorname{div}_{\omega} (p_{i,j}) = \sum_{j \in N_i} (p_{i,j} - p_{j,i}) \sqrt{\omega_{ij}}, \quad (12)$$

$|\nabla_{\omega} u|$  离散化为

$$|\nabla_{\omega} u|_i = \sqrt{\sum_{j \in N_i} (u_j - u_i)^2 \omega_{ij}}, \quad (13)$$

$k_{\omega}$  离散化为

$$k_{\omega} = \sum_{j \in N_i} (u_i - u_j) \omega_{ij} \left( \frac{1}{|\nabla_{\omega} u|_i} + \frac{1}{|\nabla_{\omega} u|_j} \right). \quad (14)$$

类似于文献[15],可以证明,当时间步长满足  $0 \leq \Delta t \leq \frac{1}{\|\operatorname{div}_{\omega}\|_{L^2}^2}$  时,(10)式的差分格式是数值稳定的。

为了进一步说明非局部 CDD 模型与局部 CDD 模型的本质不同,对两个模型的离散格式进行比较。若对局部 CDD 模型也采用时间显式有限差分离散,其离散格式为

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \sum_{j \in \{N, S, E, W\}} c_j^n (u_j^n - u_i^n), \\ u^0 = u_0, \end{cases} \quad (15)$$

式中  $N, S, E, W$  是指与像素点  $i$  在垂直和水平方向相邻的北、南、东、西 4 个像素,  $c_j^n$  为该模型整理后  $u_j^n - u_i^n$  的系数项。而非局部 CDD 模型的离散格式为

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \sum_{j \in N_i} c_j^n (u_j^n - u_i^n), \\ u^0 = u_0, \end{cases} \quad (16)$$

式中  $N_i = \{j: \omega_{ij} > 0\}$  是与像素点  $i$  最相似的所有像素点,而  $c_j^n$  为新模整理后  $u_j^n - u_i^n$  的系数项。两个模型的主要差别在于,原模型利用待修复像素的空间局部信息来估计丢失像素,而新模型利用和待修复像素较大范围内相似的所有像素来估计丢失像素,充分利用了图像的全局信息。

### 3.2 新模型的算法描述

经过上文的离散化后,现将新模型的算法归纳如下:

初始化:设置搜索窗大小,块大小,相似块个数  $k$  以及迭代次数;

1) 对修复区域中的像素点  $i$ ,计算权值  $w_{i,j}$ : 在以像素点  $i$  为中心的搜索窗内,检查以窗内每个像素为中心,大小为  $\gamma$  的小块,找出和像素点  $i$  最相似的  $k$  个像素,置其权为 1,其它像素点权置 0;

2) 利用(10)~(14)式计算像素点  $i$  的灰度值  $u_i^n$ ,  $n$  为迭代次数;

3) 对修复区域中的所有像素点,重复 1)和 2),完成一次迭代;

4) 令  $n=n+1$ ,重复 1),2),3)直到预先设定的迭代次数。

## 4 数值实验及分析

在大量数值实验的基础上,给出几个典型的实验结果来说明本模型的良好性能。主要比较了局部 CDD 模型与本文提出的非局部 CDD 模型对纹理图像修复的有效性。

对图 3,图 4 使用提出的非局部 CDD 算法的参数选取如下:在求权值  $w_{i,j}$  时,搜寻窗大小取为  $21 \times 21$ ,像素块大小  $\gamma=5 \times 5$ , $k=10$ 。最佳迭代次数如表 1 所示。

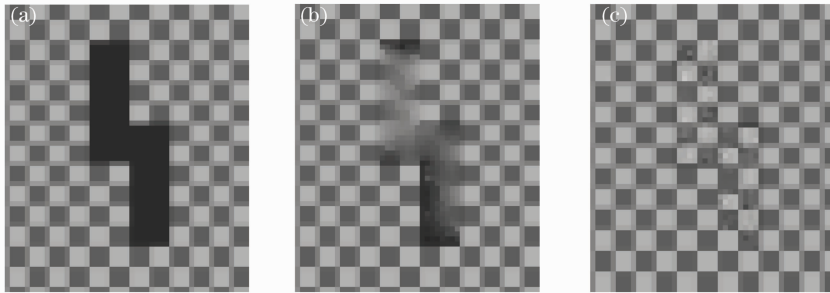


图 3 纹理图像修复的效果。(a)待修复的图像;(b)局部 CDD 的修复结果;(c)非局部 CDD 的修复结果  
Fig. 3 Inpainting results of a textured image. (a) image to be inpainted; (b) result of the local CDD; (c) result of the nonlocal CDD

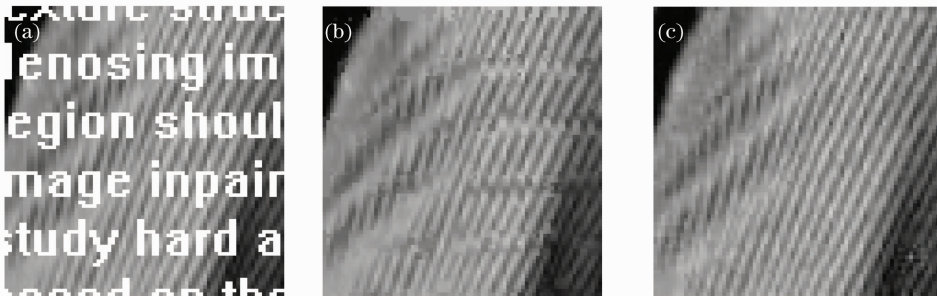


图 4 纹理图像去文字遮挡的效果。(a)待修复的图像;(b)局部 CDD 的修复结果;(c)非局部 CDD 的修复结果  
Fig. 4 Inpainting results of text removal for a textured part of "Barbara" image. (a) image to be inpainted; (b) result of the local CDD; (c) result of the nonlocal CDD

表 1 两种算法相关参数比较

Table1 Comparison of the parameters between two algorithms

	Figure 3		Figure 4	
	Local CDD	Nonlocal CDD	Local CDD	Nonlocal CDD
Number of iteration	5000	20	6000	30
PSNR of the inpainted image	20.9267	30.7956	25.4734	31.8251

图 3 是对一个纹理图像的修复结果比较,原图是一个含有棋盘模式(黑白相间的块)的图像,局部 CDD 模型仅利用局部信息进行扩散,并没有按照全局的模式信息进行修复,而新模型利用全局信息进行修复,有效地将交错的黑白格子修复出来,符合人类的认知结果。图 4 是对一个纹理图像去文字遮挡的结果,很明显,虽然局部 CDD 模型能够去除文字遮挡,但在纹理处留下了明显的痕迹,而非局部模型对裤子纹理的衔接更自然。表 1 对这两种算法的迭代次数和修复后图像的峰值信噪比(PSNR)进行了对比,非局部 CDD 模型的迭代次数要比局部 CDD 模型少很多,但是迭代过程中,由于非局部 CDD 模型是在全局中选取相似点,所以每次迭代时计算量要比局部算法大很多,尽管总的迭代次数少,但是总运算量要比局部模型大得多,从而运算时间比局部模型长。搜寻窗和像素块的选取直接影响了算法性能,选取的相似块范围越大,修复效果越好,但相应的运算时间会更长。所以使用此方法要根据实际情况选取合适参数。

## 5 结 论

将空间非局部微分算子引入 CDD 方程,建立了一个非局部 CDD 模型,讨论了模型的离散格式。通过离散格式对新模型与原模型进行了对比,指出两个模型的主要差别在于,原模型利用待修复像素的空间局部信息来估计丢失像素,而新模型利用和待修复像素相似的所有像素来估计丢失像素,充分利用了图像的全局信息。用数值实验验证了新模型在纹理图像的修复方面的良好性能。

## 参 考 文 献

- 1 Wang Shugen, Zheng Jingling. Image inpainting for information lost area based on the texture matching approach[J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2004, (12): 21~23  
王树根, 郑精灵. 基于纹理匹配的影像缺损信息填充方法[J]. *测绘通报*, 2004, (12): 21~23
- 2 M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles *et al.*. Image inpainting [J]. *Proc. SIGGRAPH 2000, New Orleans, LA*, 2000
- 3 T. F. Chan, J. Shen. Mathematical models for local deterministic inpaintings [J]. *SIAM J. Appl. Math.*, 2002, **62**(3): 1019~1043
- 4 T. F. Chan, J. Shen. Non-texture inpainting by curvature-driven diffusions (CDD) [J]. *J. Visual Communication and Image Representation*, 2001, **12**(4): 436~449
- 5 T. F. Chan, J. Shen. Mathematical models for local nontexture inpainting [J]. *SIAM J. Appl. Math.*, 2002, **62**(3): 1019~1043
- 6 Wang Weiwei, Feng Xiangchu. Anisotropic diffusion with nonlinear structure tensor [J]. *SIAM J. Multiscale Modeling and Simulation*, 2008, **7**(02): 963~977
- 7 Bai Jian, Feng Xiangchu. Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising [J]. *IEEE Trans. Image Processing*, 2007, **16**(10): 2492~2502
- 8 Marcelo Bertalmio, Luminita Vese, Guillermo Sapiro *et al.*. Simultaneous structure and texture image inpainting [J]. *IEEE Trans. on Image Processin*, 2003, **12**(8): 882~889
- 9 S. Esedoglu, J. H. Shen. Digital inpainting based on the Mumford Shah-Euler Image Model [J]. *European Journal on Applied Mathematics*, 2002, **13**(4): 353~370
- 10 Liu Delian, Zhang Jianqi. New texture segmentation-based approach for change detection in remote sensing image [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(8): 1177~1181  
刘德连, 张建奇. 基于纹理分割的遥感图像的变化探测 [J]. *光学学报*, 2006, **26**(8): 1177~1181
- 11 Liu Hong, Mo Yulong. Modified texture segmentation algorithm based on multiresolution model [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(6): 781~786  
刘泓, 莫玉龙. 改进的多分辨纹理图像分割算法 [J]. *光学学报*, 2000, **20**(6): 781~786
- 12 A. Criminisi, P. Perez, K. Toyama. Region-filling and object removal by exemplar-based inpainting [J]. *IEEE Trans. Image Proc.*, 2004, **14**(9): 1200~1213
- 13 G. Gilboa, S. Osher. Nonlocal operators with applications to image processing [J]. *SIAM Multiscale Model. Simul.*, 2008, **7**(3): 1005~1028
- 14 S. Kindermann, S. Osher, P. Jones. Deblurring and denoising of images by nonlocal functionals [J]. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 2005, **4**(4): 1091~1115
- 15 Wang Weiwei, Feng Xiangchu. Fast numerical solutions of the diffusion equations in image processing [J]. *J. Electronics and Information Technology*, 2009, **31**(7): 1736~1740  
王卫卫, 冯象初. 图像处理中扩散方程的快速数值解法 [J]. *电子与信息学报*, 2009, **31**(7): 1736~1740