

文章编号: 0253-2239(2010)06-1622-07

等光程非球面子午截线的参数方程

陈喜文

(无锡市南长区槐古豪庭 5-1402, 江苏 无锡 214040)

摘要 以入射光束“孔径高度”为参数,根据等光程原理,通过光线追迹法建立了参数和坐标点(两个分量)一一对应的关系式,称为等光程参数方程。在该方程中,参数是连续的实变量,参数方程给出的曲线是连续的实线,即非球面子午截线,截线的轴旋转曲面为光学系统的等光程折射面。子午截线是“孔径高度”的高次曲线,等光程参数方程分别为二元二次方程(出射光聚焦一点)或二元一次方程(光线平行出射),该方程不用二次模拟曲线和高次修正项,能准确地描写多拐点的曲线,如长焦距系统,大口径系统,施密特校正板等,并且都能实现零球差设计。

关键词 几何光学;零球差系统;参数曲线;参数方程

中图分类号 O435 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103006.1622

Aplanatic Parametric Equation for the Intersecting Line of Aspheric Meridional Ray

Chen Xiwen

(Huaiqihuoting 5-1402, Nangchang District, WuXi, Jiangsu 214040, China)

Abstract The aplanatic parametric equation, that describes the one-one correspondence relation of ray parameter and coordinator, is established with the aperture height of the incident light as the variant, based on the aplanatic principle and ray tracing method. The intersecting line of aspheric meridional ray presented by the equation is a continuous real curve since the parameter is also a continuous real variable. The rotating surface of the intersecting line is an aplanatic refraction surface. Meridional intersecting line is a high-order curve of the aperture height. The parametric quadratic equation in two variables refers to the convergent emergent rays and in one variable refers to the parallel emergent rays. Without analytic hyperbolic curve or high-order correction item, this parametric equation can realize zero spherical aberration design for the curves with multi-turning points, such as long focal distance system, large aperture system and Schmidt corrector.

Key words geometric optics; zero-spherical-aberration system; parametric curve; parametric equation

1 引 言

在几何光学中,常规的光学设计是二次模拟曲线(圆、双曲线、抛物线和椭圆等)组合加上高次修正项,但理论上也不能使光线通过透镜后聚焦在同一点上。提出的非球面透镜子午截线参数方程所描述的曲线,与常规光学设计所惯用的思路不同,它无须修正,仅用一个等光程“参数曲线”,即可达到光学透镜或光学系统的零球差设计。用参数方程所描写的曲线,简称为参数曲线,命名为 C 曲线; C 曲线的绕轴旋转面,简称为“参数曲面”,命名为 C 曲面。参

数曲面给出的系统,是理论上的零球差系统。

2 零球差透镜

零球差透镜由球面和参数曲面构成,第一入射面为球面,光线的人口高度设定为已知量(参变量 h_K),球面不遵守等光程定律,而参数曲面则遵守等光程定律,把球面产生的球差给与修正,得出一个零球差透镜。

2.1 参数与参数曲面

如图 1 所示参变量 h_K 为球面和非球面组成透

收稿日期: 2009-08-25; 收到修改稿日期: 2009-09-10

作者简介: 陈喜文(1938—),男,高级工程师,主要从事光学物理方面的研究。E-mail: wxchenxiwen@163.com

方程的解为

$$X_C = x(h_K) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (19)$$

由(10)式可得

$$Y_C = y(h_K) = h_K - (X_C - X_K) \tan E. \quad (20)$$

(19)式与(20)式为C曲线的数学表示式,它可方便准确地描写多拐点的的面形,对长焦距、大口径的光学系统,通过改变L, L'或h₀几何尺寸,方程就给出相应的C曲线。这样的透镜,在光线追迹时,如光点在A,则它发出的光线满口径的通过透镜,所有光线完全交于一点A',是零球差透镜。这是C曲线的作用。表1是(19)式与(20)式的计算实例,表格数据只列取正值。图2是表1数据的坐标曲线。

表1 C曲线的点对点参数

Table 1 Point-to-point parametric of curve C

<i>h_K</i> /mm	<i>X_C</i> /mm	<i>Y_C</i> /mm	<i>W</i> /π
36	22.244	34.880	0.331
32.4	21.342	31.421	0.185
28.8	20.908	28.071	0.078
25.2	20.780	24.757	0.004
21.6	20.853	21.425	-0.044
18	21.050	18.038	-0.069
14.4	21.307	14.573	-0.077
10.8	21.571	11.025	-0.070
7.2	21.797	7.400	-0.053
3.6	21.947	3.716	-0.028
0	22.000	0.000	0.000

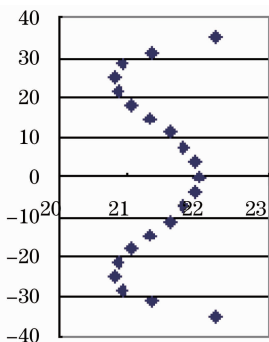


图2 表1数据的坐标曲线(*Y_C*取±)

Fig. 2 Coordinates of the data in Table 1

2.2 出射光线平行于光轴的C曲面

出射光线平行于光轴则如图3所示, *G₀*, *R₀*, *R₁*不变。出射光线平行于*X*轴,所以*R₂* = *L'* - *X_C*,代入(12)式可得

$$X_C = x(h_K) = \frac{nTX_K + d_1(n-1) - L - R_0}{nT - 1}, \quad (21)$$

$$Y_C = y(h_K) = h_K - (X_C - X_K) \tan E, \quad (22)$$

是与*L'*无关的二元一次方程,同样是可以描写多个拐点的曲线。

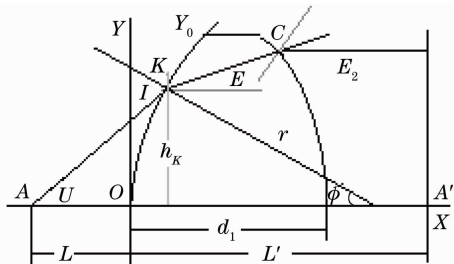


图3 平行于光轴の出射光线

Fig. 3 Emergent ray parallel to the optical axis

3 C曲线的特征参数W, R

用坐标点的法线于光轴的夹角*W*来描述曲面的斜率;直接把相邻两个法线的交点确定为参考圆的圆心,圆心到坐标点的距离为半径*R*。半径对数控加工很有意义。

3.1 C曲线的法线与光轴的斜角W

一个确定的曲面,各点都有一个确定的曲率半径和法线斜率,给出法线的斜率便于光线的追迹,给出曲率半径便于加工。

在图4中, C曲线是一个确定了的曲线,所以*X_C*, *Y_C*, *E*为已知条件。出射光线与*X*轴的夹角

$$U' = \arctan \frac{Y_C}{L' - X_C}, \quad (23)$$

光线由*E*转至*U'*给出折射角转向方程

$$\begin{aligned} I'_2 - I_2 &= E - U', \\ (U' - E) + I'_2 &= I_2. \end{aligned} \quad (24)$$

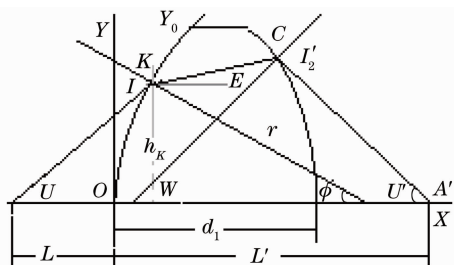


图4 C曲线法线的斜率

Fig. 4 Slope of the normal of curve C

*I*与*I'*的关系由折射定律给出

$$I_2 = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin I'_2\right),$$

代人(24)式得*I'₂*的方程

$$(U' - E) + I'_2 = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin I'_2\right),$$

由此方程式求得

$$I'_2 = \arctan \left[\frac{\sin(U' - E)}{\frac{1}{n} - \cos(U' - E)} \right], \quad (25)$$

$$W = I' + U'. \quad (26)$$

3.2 曲率中心和曲率半径

由(26)式可以写出相邻两法线的直线方程

$$Y_R = Y_{C1} - (X_R - X_{C1}) \tan W_1, \quad (27)$$

$$Y_R = Y_{C2} - (X_R - X_{C2}) \tan W_2. \quad (28)$$

为了模具加工 $(X_{C1}, Y_{C1}), (X_{C2}, Y_{C2})$ 可以为相邻两点,为了准确描写曲率半径,也可以把 (X_{C2}, Y_{C2}) 作为 (X_{C1}, Y_{C1}) 的微分增量。在图 5 中曲率中心 (X_R, Y_R) 的曲率半径为 R 。

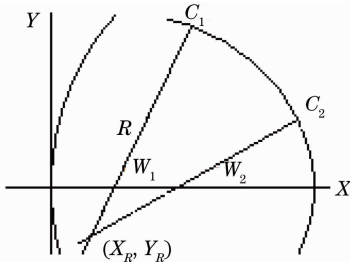


图 5 曲率中心和曲率半径

Fig. 5 Center and radius of curvature

C 曲线上的两个坐标点 $(X_{C1}, Y_{C1}), (X_{C2}, Y_{C2})$ 由(27)式和(28)式可得曲率中心的坐标

$$X_R = \frac{Y_{C1} - Y_{C2} + X_{C1} \tan W_1 - X_{C2} \tan W_2}{\tan W_1 - \tan W_2}, \quad (29)$$

$$Y_R = Y_{C1} - (X_R - X_{C1}) \tan W_1, \quad (30)$$

坐标点到曲率中心的距离为该点的近似曲率半径

$$R_C = \pm \sqrt{(X_{C1} - X_R)^2 + (Y_{C1} - Y_R)^2}. \quad (31)$$

如果 $X_R < X_{C1}$ 则 R_C 为正,反之则为负。曲率中心和曲率半径都是近似值。

4 光线在 C 曲面上发生的方向变化

在确定了 C 曲面上,光线发生折射,完全依赖于(26)式给出的 W 。光线在 C 曲面上的交点坐标、光线的出射方程,都是由光线追迹来给出的,参数系统的光线追迹于传统的光线追迹不同,以光线方程来描写的。

4.1 光线追迹

在图 6 中,光线追迹是在 B 点与 X 轴所决定的平面上进行。由 B 发出的光线在球面任意点 b 入射,折射后与 C 曲线相交于 c 。入射光线与光轴的夹角

$$u = \arctan \frac{h_b - B}{L_B - X_b}, \quad (32)$$

球面法线与 X 轴的夹角

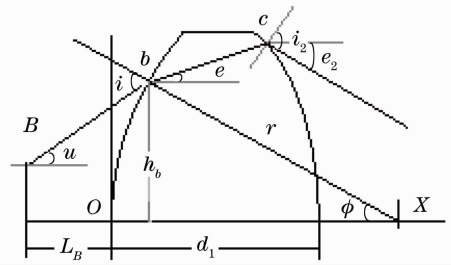


图 6 折射光方程示意图

Fig. 6 Schematic of equation for refractive ray

$$\phi = \arcsin \frac{h_b}{r},$$

$$X_b = r(1 - \cos \phi), \quad (33)$$

在 b 的入射角

$$i = \phi - u, \quad (34)$$

折射角

$$i' = \arcsin \left(\frac{1}{n} \sin i \right). \quad (35)$$

折射光线与 X 轴的夹角

$$e = u + (i - i'), \quad (36)$$

折射光线 bc 的直线方程

$$Y_c = h_b - (X_c - X_b) \tan e. \quad (37)$$

4.2 折射光线于 C 曲线的交点

折射光线由(37)式给出, C 曲线坐标点在 Y 轴投影为

$$Y_C = h_K - (X_C - X_K) \tan E. \quad (38)$$

在 bc 与其投影的交点上有 $Y_c = Y_C, X_c = X_C$,

$$f(h_K) = Y_c - Y_C = 0, \quad (39)$$

或者写成

$$f(h_K) = h_b - h_K - X_c (\tan e - \tan E) + X_b \tan e - X_K \tan E = 0.$$

(39)式是光线与 C 曲线交点上的迭代方程,其中 h_b 是已知的追迹光线入射高度, X_b, e 是 h_b 的函数。 X_K, X_c, E 是 h_K 的函数, h_K 是试代实根。以不同的 h_K 值代入(39)式,找出能使 $f(h_K) \approx 0$ 的 h_K 值,则该值给出的 X_c, Y_c 点为所求的光线于 C 曲线的交点 c 。图 7 中 h_K 是预求交点坐标的参数。用

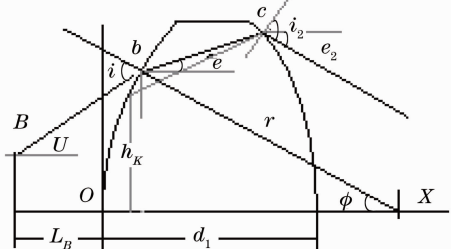


图 7 输出表面参数

Fig. 7 Output surface parameter

弦截法迭代公式解是纯数字计算,易编程序,收敛快。也可用其它数学方法。

4.3 出射光线

折射光线在曲面 (X_{C_1}, Y_{C_1}) 点的入射角

$$i_2 = W - e, \tag{40}$$

折射角

$$i' = \arcsin(ns \sin i_2). \tag{41}$$

光线在曲面 (X_{C_2}, Y_{C_2}) 点的出射角

$$e_2 = e + (i - i'), \tag{42}$$

出射光线方程

$$Y = Y_q - (X - X_q) \tan e_2. \tag{43}$$

如果选择两个适当的入射点,则可以求出两条出射光线的交点 B' , B' 就是 B 的象点,其数学表示式为

$$X_{B'} = \frac{Y_{q1} - Y_{q2} + X_{q1} \tan e_1 - X_{q2} \tan e_2}{\tan e_1 - \tan e_2}, \tag{44}$$

$$Y_B = Y_{q1} - Y_{q2} + (X_{B'} - X_{q1}) \tan e_1, \tag{45}$$

参数系统包括: C 曲线设计;曲线斜率、曲率中心、曲率半径、光线追迹、出射光线方程和象点坐标,这些公式基本可以描写系统的光学特性。

5 施密特校正板的 C 曲线

在图 8 中,球面反射镜右侧放置一块校正板,它的一面是平面,另一面是非球面,用来消除球面反射镜的球差:即平行于光轴的平行光通过校正板入射到球面反射镜,反射光线聚焦于一点。焦距 f ,球面反射镜半径 r 。该校正板称为施密特校正板。施密特校正板的曲面是有两个拐点的曲面,是用一个特定的高次方程来描写的,它是根据实际的球差要求而确定的^[2]:

$$x = \int \tan \phi dy = Ay^2 + By^4 + Cy^6 + \dots + x_0. \tag{46}$$

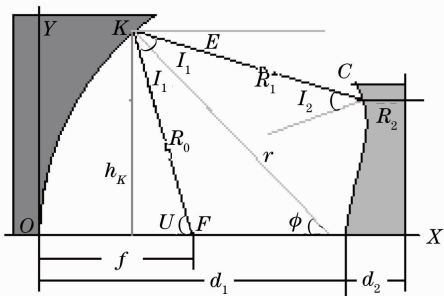


图 8 施密特校正板

Fig. 8 Schmidt corrector

要由不同孔径角的光线入射高度求得方程系数 A, B, C, \dots 来确定(46)式,理论上它仅能使球差大

大减少,但不能为零。用 C 曲面来描写施密特校正板,图 8 中,球面半径为 r, K 点在 Y 轴的投影

$$Y_K = h_K,$$

球面法线于 X 轴的夹角

$$\phi = \arcsin \frac{h_K}{r}, \tag{47}$$

在 X 轴上的投影距离

$$X_K = r(1 - \cos \phi). \tag{48}$$

光线与光轴的夹角

$$U = \arctan \frac{h_K}{f - X_K}, \tag{49}$$

光线在球面上的入射角

$$I_1 = U - \phi,$$

球面反射光线与光轴的夹角

$$E = 2\phi - U. \tag{50}$$

轴上光程

$$G_0 = f + d_1 + nd_2, \tag{51}$$

参数光程

$$G_K = R_0 + R_1 + nR_2,$$

$$R_0 = FK, \quad R_0 = \sqrt{(X_K - f)^2 + h_K^2}, \tag{52}$$

$$R_1 = KC = (X_C - X_K)T,$$

$$T = \sqrt{1 + \tan^2 E}, \tag{53}$$

$$R_2 = (d_1 + d_2 - X_C).$$

等光程方程如下:

$$f(X_C) = R_0 + R_1 + nR_2 - G_0 = 0,$$

可求得解为

$$X_C = x(h_K) = \frac{TX_K + d_1(1 - n) + f - R_0}{T - n}, \tag{54}$$

$$Y_C = y(h_K) = h_K - (X_C - X_K) \tan E. \tag{55}$$

由(54)式可知, X_C 与透镜的厚薄 d_2 无关。所以 d_2 只要求保证机械厚度即可。(54)式与(55)式所描写的曲线为施密特校正板的 C 曲线。对现在通用的(46)式所描写的曲线,这里只用一个二元一

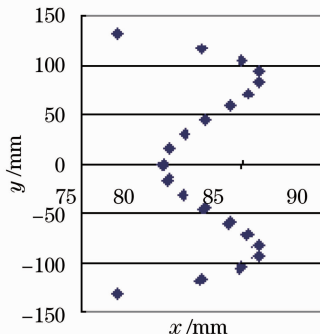


图 9 表 2 数据的坐标曲线(Y_C 取土)

Fig. 9 Coordinates of the data in Table 2

次方程就取而代之，且零球差。(54)式与(55)式所计算的 C 曲线坐标点列如表 2 所示，它是多拐点的曲线，表格数据只是取正值。图 9 是表 2 数据的坐标曲线。

表 2 多拐点的 C 曲线坐标

Table 2 Coordinators of curve C with multi-turning points

$F=78\text{ mm}$	$d_1=80\text{ mm}$	$r=182\text{ mm}$
X_C/mm	Y_C/mm	W/π
77.181	132.036	0.638
82.374	117.095	0.415
84.885	104.972	0.221
85.901	93.850	0.065
85.929	82.766	-0.050
85.245	71.137	-0.124
84.071	58.630	-0.158
82.661	45.121	-0.157
81.318	30.678	-0.125
80.352	15.528	-0.069
80.000	0.000	0.000

6 光学系统的 C 曲线

前文只应用一个球面，其实可以用多曲面组合成光学系统^[3]。扼要写出 C 曲面对光学系统进行等光程化。设定有 $k+1$ 个折射面组成的光学系统，C 曲面为第 $K+1$ 个折射面，如此点 A 到象点 A' 有 $k+2$ 个几何路段，其各个光线路段如下：

$$R_0 = \sqrt{(X_1 - L)^2 + h_1^2}, \tag{56}$$

$$R_1 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}, \tag{57}$$

.....

$$R_{K-1} = \sqrt{(X_K - X_{K-1})^2 + (Y_K - Y_{K-1})^2},$$

$$R_K = (X_C - X_K)T,$$

$$R_{K+1} = \sqrt{(L' - X_C)^2 + Y_C^2}.$$

在第一个折射面上

$$\phi_1 = a \sin \frac{h_1}{r_1}, \tag{58}$$

$$X_1 = r_1(1 - \cos \phi_1), \tag{59}$$

$$U = \arctan \frac{h_1}{L - X_1}, \tag{60}$$

$$I_1 = \phi_1 - U, \tag{61}$$

$$I'_1 = \arcsin \left(\frac{n_0}{n_1} \sin I_1 \right), \tag{62}$$

$$E_1 = U + (I_1 - I'_1). \tag{63}$$

式中 h_1 是给出的参数。折射光线方程为

$$Y_2 = Y_1 - (X_2 - X_1) \tan E_1, \tag{64}$$

与下一个折射面(r_2 的球面)相交的交点方程如下：

$$aX_2^2 + bX_2 + c = 0.$$

式中方程系数为

$$a_1 = 1 + \tan^2 E_1,$$

$$b_1 = -2(C_{r_2} + X_1 \tan^2 E_1 + Y_1 \tan E_1),$$

$$c_1 = (X_1 \tan E_1 + Y_1)^2 - r_2^2 + C_{r_2}^2, \tag{65}$$

式中 $Y_1 = h_1, C_{r_2} = d_1 + r_2$ 是第二球面中心在 X 轴的坐标, r_2 是第二球面半径

$$X_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{66}$$

$$Y_2 = Y_1 - (X_2 - X_1) \tan E_1. \tag{67}$$

按程序逐级追迹下去，可以求得 $(X_3, Y_3), (X_4, Y_4) \dots$ 在第 K 个折射面上

$$\phi_K = \arcsin \frac{Y_K}{r_K}, \tag{68}$$

$$I_K = \phi_K - E_{K-1}, \tag{69}$$

$$I'_K = \arcsin \left(\frac{n_{K-1}}{n_K} \sin I_K \right), \tag{70}$$

$$E_K = E_{K-1} + (I_K - I'_K), \tag{71}$$

$$C_{r_{K+1}} = r_{K+1} + \sum_{k=1}^{K-1} d_K, \tag{72}$$

$$G_0 = -L + \sum_{K=1}^K n_K d_K + (L' - \sum_{K=1}^K d_K), \tag{73}$$

$$J = G_0 - \sum_{K=0}^{K-1} n_K R_K, \tag{74}$$

$$T = \sqrt{1 + \tan^2 E_k}. \tag{75}$$

则(16)式写成如下形式方程：

$$a = [1 - n_c^2] T^2,$$

$$b = 2[n_c J T - L' - X_K \tan^2 E_K + Y_K \tan E_K + n_c^2 T^2 X_K],$$

$$c = L'^2 - [J + n_c X_K]^2 + [Y_K - X_K \tan E_K]^2,$$

n_c 是 C 曲面对空气的折射率。该方程系数是(19)式与(20)式的一般表示式，即描写 C 曲面的参数方程，适合于多个透镜组合成的光学系统。

7 结 论

描述了不用任何模拟曲线和高次修正项，根据光学设计给出的基本已知数据，借用光线追迹的方法，设计等光程曲面的方法。把等光程曲线的高次变量“入射孔径高度”选择为方程参数，以此可以把一个高次曲线简化为二元二次方程或二元一次方程，能够准确方便描写多个拐点，从而方便地设计长焦距、大口径光学系统。用参数方程来描写等光程曲面，一个参数计算出一个坐标点，两个坐标点描写一个环带，多个环带的首尾相连构成一个特征曲面。以设计要求给定的数据，直接追迹出 C 曲线，全过

程为全是数字计算,适合计算机编程序。只要输入已知数据,程序就能给出整个系统一个零球差的 C 曲面。

对不同的光学系统,零球差不一定是最好的,可能对不同孔径高度要求有不同的焦距,才能满足要求, C 曲面也可以由多个子 C 曲面对接而组成。

参 考 文 献

1 Ye Qixiao, Shen Yonghuan. Handbook of Applied Mathematics [M]. 2nd edition. Beijing: Science Press, 2006. 61, 741

- 叶其孝, 沈永欢. 实用数学手册 [M]. 第二版 北京: 科学出版社, 2006, 61, 741
- 2 Gu Peisen. Problems Set of Applied Optics [M]. Beijing: China Machine Press, 1985. 499
- 顾培森. 应用光学例题与习题集 [M]. 机械工业出版社, 1985. 499
- 3 Wang Zijiang. Handbook of Optical Technology [M]. Beijing: China Machine Press, 1987. 1167
- 王之江. 光学技术手册 [M]. 机械工业出版社, 1987. 1167