

文章编号: 0253-2239(2010)05-1441-06

驱动场对非简并光学参变振荡器动力学特性的影响

田晓华 费佳 郭奇志

(上海大学物理系, 上海 200444)

摘要 研究了驱动场对非简并光学参变振荡器动力学行为的影响, 通过计算系统的李雅普诺夫(Lyapunov)指数, 发现当驱动场变化时, 系统会出现定态、周期态、混沌态和超混沌态, 并得到与各状态相应的驱动场取值范围。基于相图、Lyapunov 指数谱和时间序列图的数值模拟也证实了计算结果, 为进一步研究该系统的混沌反控制奠定了基础。

关键词 非线性光学; 非简并光学参变振荡器; Lyapunov 指数; 混沌; 超混沌

中图分类号 O437 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20103005.1441

Influence of Driving Field on Dynamic Characteristics in Nondegenerate Optical Parametric Oscillator

Tian Xiaohua Fei Jia Guo Qizhi

(Department of Physics, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract The influence of driving field on dynamics characteristic in nondegenerate optical parametric oscillator (NOPO) is investigated. The Lyapunov exponents of nondegenerate optical parametric oscillator system are calculated, and also the steady state, periodic state, chaotic state and the hyperchaotic state with certain system parameters are obtained. The simulation results based on the Lyapunov exponent spectrum, phase diagrams as well as time series confirm our calculations. The results will be used in studying the anti-control of the nondegenerate optical parametric oscillator system.

Key words nonlinear optics; nondegenerate optical parametric oscillator (NOPO); Lyapunov exponents; chaos; hyperchaos

1 引言

光学参变放大与振荡是典型的非线性光学效应, 属于二阶非线性光学混频过程, 可以放大弱的光信号。光学参变振荡器是在参量放大原理基础上发展起来的, 其实际意义是把抽运光的能量转变为相干的, 在较大范围内波长可调的信号光及闲频光输出, 最大特点是其输出频率可以在一定范围内连续改变。不同的非线性介质和不同的抽运源, 可以得到不同的调谐范围^[1~3]。

自 1965 年 J. A. Giordmaine 和 R. C. Miller 制成第一台光学参变振荡器^[4]以来, 人们对光学参变振荡效应进行了大量的理论与实验观察。20 世纪 80 年代, 光学混沌(包括时间混沌和时空混沌)的研究逐步进入快速发展时期, 因此, 众多学者积极投入到混沌的研究。

1988 年 L. A. Lugiato 等^[5]对简并光学参变振荡器的不稳定性进行了全面的讨论, 他们发现简并光学参变过程在一定的条件下存在双稳态、自脉冲和混沌现象。1989 年 N. P. Pettiaux 等^[6]对简并光学参变振荡器的不稳定性及 Hopf 分岔进行了研究。近年来, 国内的冯秀琴等^[7~12]对简并光学参变振荡器系统的混沌及其控制也进行了研究, 赵超樱等^[13]对简并光学参变振荡器的量子起伏做过相关研究。但这些研究仅限于简并光学参变振荡器, 在很长一段时间里人们并没有对非简并光学参变振荡进行过全面、系统的研究。B. Coutinho dos Santos 等^[14]曾对注入信号的非简并光学参变振荡器(NOPO)进行了量子分析。王海等^[15]对非简并光学参变振荡腔非稳特性进行过研究报告, 随后张天才等^[16]又对环形腔非简并光学参变振荡过程中内

收稿日期: 2009-05-18; 收到修改稿日期: 2009-07-07

作者简介: 田晓华(1986—), 女, 硕士研究生, 主要从事光学混沌方面的研究。E-mail: tianxiaohua@shu.edu.cn

导师简介: 郭奇志(1967—), 女, 博士, 副教授, 主要从事非线性光学与量子光学等方面的研究。

E-mail: guoqizhi@163.com

腔信号场和抽运场的强度随外抽运场的变换情况进行了研究。描述非简并光学参变振荡器系统的非线性方程较简并系统更为复杂,其动力学行为也较之丰富,关于此系统中的混沌行为,迄今还未见有相关系统的研究。

非简并光学参变振荡作为产生谐波、亚谐波以及非经典光场的重要工具,已经引起了人们的极大重视。研究发现,在强输入光作用下,非简并光学参变振荡系统输出会处于混沌或超混沌态,因而研究非简并光学参变振荡器的混沌或超混沌特性及控制,具有重要的应用价值。

本文通过计算非简并光学参变振荡器系统的李雅普诺夫(Lyapunov)指数,发现驱动场强度不同时,系统会出现定态、周期态、混沌态或超混沌态。计算结果为进一步研究该系统的混沌反控制奠定了基础。

2 非简并光学参变振荡器

非简并光学参变振荡器是非线性光学系统,描述非简并光学参变振荡器的动力学方程为^[17]

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_1}{dt} = E_A - (\gamma_1 + i\Delta_1)\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3 \\ \frac{d\alpha_2}{dt} = -(\gamma_2 + i\Delta_2)\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^* \\ \frac{d\alpha_3}{dt} = -(\gamma_3 + i\Delta_3)\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^* \end{cases}, \quad (1)$$

式中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别表示抽运光、信号光和闲频光三个模的复振幅; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 分别为三个模的衰减率; $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 分别为三个模的调谐参数; E_A 为抽运光场强度,正比于相干驱动场振幅,假设为实数。

为数值分析方便,做如下变换

$$\begin{cases} y_1 = (\alpha_1 + \alpha_1^*)/2 & y_2 = -i(\alpha_1 - \alpha_1^*)/2 \\ y_3 = (\alpha_2 + \alpha_2^*)/2 & y_4 = -i(\alpha_2 - \alpha_2^*)/2 \\ y_5 = (\alpha_3 + \alpha_3^*)/2 & y_6 = -i(\alpha_3 - \alpha_3^*)/2 \end{cases}, \quad (2)$$

将系统的复数方程(1)式化为实数方程

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = E_A - \gamma_1 y_1 + \Delta_1 y_2 - y_3 y_5 + y_4 y_6 \\ \frac{dy_2}{dt} = -\gamma_1 y_2 - \Delta_1 y_1 - y_3 y_6 - y_4 y_5 \\ \frac{dy_3}{dt} = -\gamma_2 y_3 + \Delta_2 y_4 + y_1 y_5 + y_2 y_6 \\ \frac{dy_4}{dt} = -\gamma_2 y_4 - \Delta_2 y_3 - y_1 y_6 + y_2 y_5 \\ \frac{dy_5}{dt} = -\gamma_3 y_5 + \Delta_3 y_6 + y_1 y_3 + y_2 y_4 \\ \frac{dy_6}{dt} = -\gamma_3 y_6 - \Delta_3 y_5 - y_1 y_4 + y_2 y_3 \end{cases}, \quad (3)$$

3 李雅普诺夫指数分析

在混沌动力学中,为了定量地刻画混沌系统相邻的两点随时间而指数式地吸引或分离的程度,人们引入了李雅普诺夫指数。

考虑一维非线性微分方程系统: $\frac{dX}{dt} = F(X)$,

式中 $F(X)$ 是非线性函数。设 X_0 为定态,为了研究稳定性,令 $X(t) = X_0 + \delta X(t)$, $\delta X(t)$ 表示偏差。则 $|\delta X|$ 在长时间($t \rightarrow \infty$)的平均变化可表示为

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta X(X_0, t)|}{|\delta X(X_0, 0)|}, \quad (4)$$

λ_L 称为李雅普诺夫指数。

对于一个 N 维系统,有 N 个分量,也就有 N 个李雅普诺夫指数,故也把它们称为谱,可以用 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ 表示,对应描述轨道沿每个分量方向的指数靠近或发散的快慢。把所有的李雅普诺夫指数按其大小可以排列成李雅普诺夫指数谱: $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$, 用来刻画系统的稳定性。如果系统有一个正的李雅普诺夫指数,说明在一个具有有界轨线的动力系统中存在着一种混沌运动;如果有两个或两个以上正的李雅普诺夫指数,说明系统处于超混沌状态;如果系统的所有李雅普诺夫指数全为负值,说明系统处于定态;如果系统最大的李雅普诺夫指数为 0 或接近于 0,则说明系统处于周期态。

当系统参数取 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = -5, \Delta_3 = 1$, 初始条件为: $\alpha_1^0 = 0.1 + i0.1, \alpha_2^0 = 0.1 + i0.1, \alpha_3^0 = 0.1 + i0.1$ 时,计算系统(3)式的李雅普诺夫指数随 E_A 的变化情况,如图 1(a) 所示,为更清楚地显示李雅普诺夫指数随 E_A 的变化情况,图 1(b), (c) 分别给出 E_A 在 $[0, 12]$ 以及 $[60, 75]$ 区间的指数谱。

根据上述参数值: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = -5, \Delta_3 = 1$, 计算系统起振时的阈值,由公式^[12]

$$E_A^{\text{th}} = \gamma_1 \gamma_2 \left[1 + \left(\frac{\Delta_2 + \Delta_3}{2\gamma_2} \right)^2 \right]^{1/2} \left[1 + \left(\frac{\Delta_1}{\gamma_1} \right)^2 \right]^{1/2}$$

得 $E_A^{\text{th}} \approx 3.2$ 。

由图 1 可知,当抽运强度 $E_A < 3.2$ 时,系统处于定态,六个李雅普诺夫指数均为负值,特别当 $E_A \leq 2.8$ 时,所有的李雅普诺夫指数都相等,均为 -1.443 。

当 $3.2 \leq E_A < 7.74$ 和 $7.78 < E_A < 8.36$ 时,系统最大的李雅普诺夫指数均接近于 0,其余为负值,因而在这两个区间,系统处于周期态。

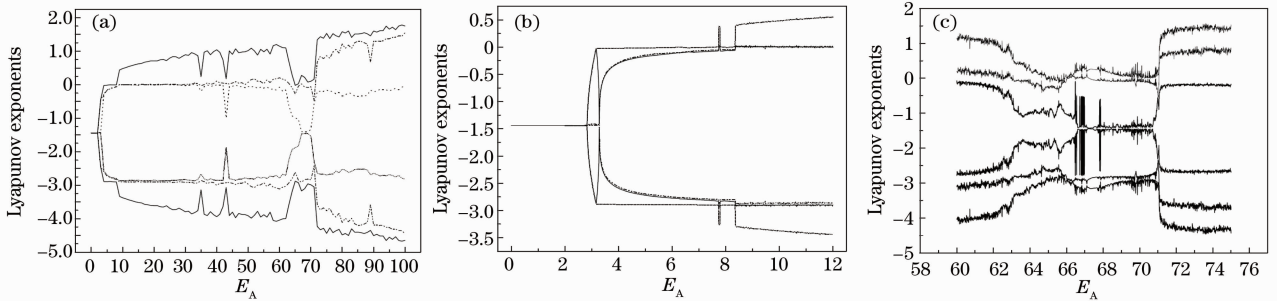


图 1 李雅普诺夫指数随 E_A 的变化关系曲线。(a) $E_A=[0,100]$, (b) $E_A=[0,12]$, (c) $E_A=[60,75]$

Fig.1 Evolution of Lyapunov exponents versus E_A . (a) $E_A=[0,100]$, (b) $E_A=[0,12]$, (c) $E_A=[60,75]$

当 $7.74 \leq E_A \leq 7.78, 8.36 \leq E_A \leq 100$ 时, 系统有至少一个李雅普诺夫指数为正值, 处于混沌或超混沌态。特别当 $40 \leq E_A \leq 62$ 和 $71 < E_A \leq 100$ 时, 系统有两个正的李雅普诺夫指数, 因而处于超混沌态。此外, 当 $64.7 < E_A < 66.8$ 以及 $66.9 \leq E_A \leq 71$ 时, 谐波模(信号光模和闲频光模)处于混沌态, 而基模(抽运光模)则处于周期态。

参变振荡器系统的输出情况进行数值模拟, 得到了不同抽运强度所对应的相图和时间序列谱。

图 2 为 $E_A = 3.0$ 时系统的输出光强度随时间的变化曲线, 可以看出, 随着时间的增加, 抽运光、信号光和闲频光均迅速趋于定值, 所不同的是, 抽运光有稳定的输出, 但由于抽运光强度太小, 所以信号光和闲频光此时没有输出。

4 数值模拟结果

根据以上计算结果, 取 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = -5, \Delta_3 = 1$, 初始条件为 $\alpha_1^0 = 0.1 + i0.1, \alpha_2^0 = 0.1 + i0.1, \alpha_3^0 = 0.1 + i0.1$ 时, 对非简并光学

图 3(a) 给出了 $E_A = 4.5$ 时信号光模的相图, 图 3(b) 给出了相应输出光强的时间序列。由图可见, 信号光模处于周期 1 的轨道。此时闲频光模与信号光模的情形相同。

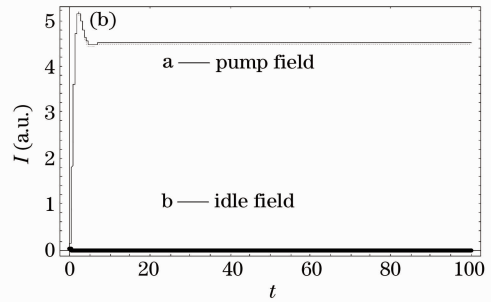
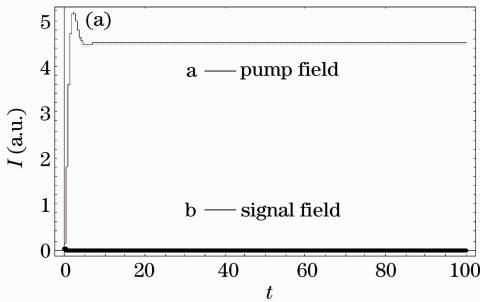


图 2 非简并光学参变振荡器输出的光强变化($E_A = 3.0$)

Fig.2 Evolution of the intensity of the NOPO ($E_A = 3.0$)

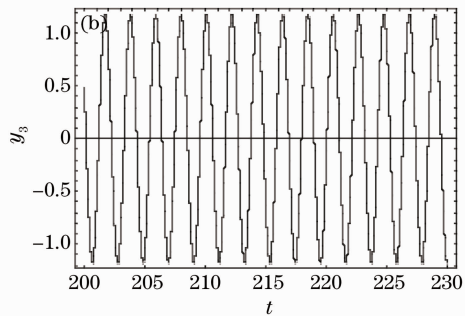
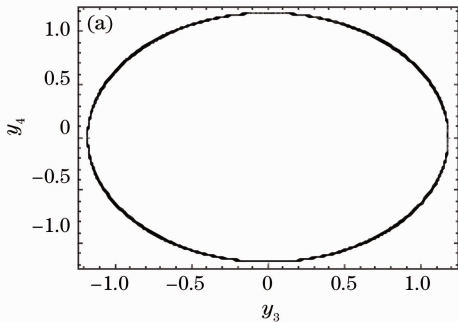


图 3 $E_A = 4.5$ 时信号光模 (a) 周期轨道和 (b) 时间序列

Fig.3 (a) Periodic orbit and (b) time series of signal mode at $E_A = 4.5$

进一步的数值模拟结果表明: 当 $3.2 \leq E_A < 7.74$ 和 $7.78 < E_A < 8.36$ 时, 系统均处于周期 1 的

轨道; 在 $E_A = 7.74$ 和 $E_A = 8.36$ 时, 系统都是通过突变的方式由周期态跳跃进入混沌态的, 并未发现

其进行倍周期分岔；当 $64.7 < E_A < 66.8$ 以及 $66.9 \leq E_A \leq 71$ 时，系统的基模(抽运光模)处于不同的周期态，如图 4 所示。

由图 4 的相图和图 5 的时间序列图可知， $E_A =$

65 时系统的抽运光模为周期 4，而 $E_A = 71$ 时抽运光模为周期 2。更多的数值模拟结果表明： $64.7 < E_A < 66.8$ 时，抽运光模均为周期 4，而 $66.9 \leq E_A \leq 71$ 时为周期 2。

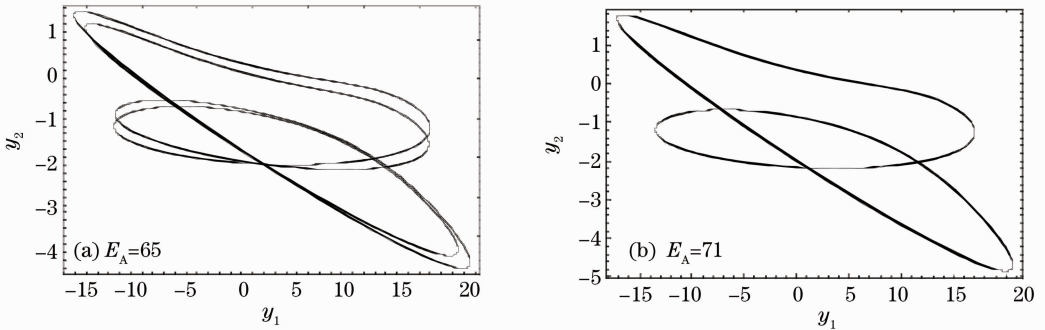


图 4 (a) 基模的周期 4 轨道，(b) 基模的周期 2 轨道

Fig. 4 (a) Periodic-4 and (b) periodic-2 orbits of fundamental mode

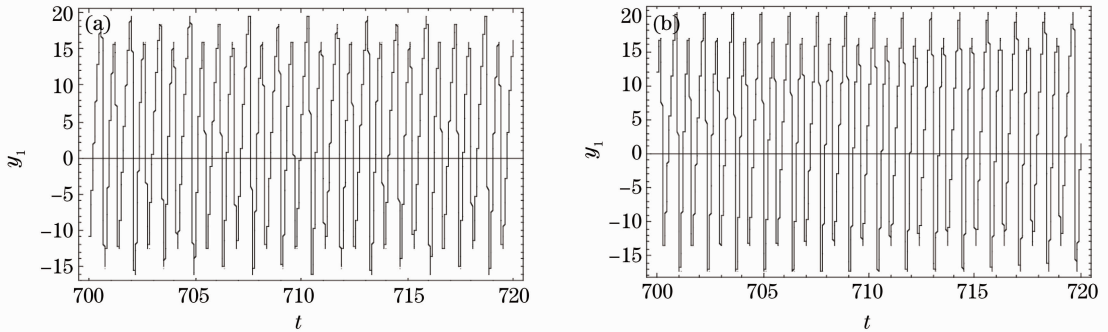


图 5 基模的时间序列。(a) $E_A = 65$ ；(b) $E_A = 71$

Fig. 5 Time series of fundamental mode. (a) $E_A = 65$; (b) $E_A = 71$

由图 1(b)可知，随着抽运强度的增大，系统快速跃迁进入混沌状态。当 $E_A = 12$ 时，系统的六个李雅普诺夫指数依次为：0.545，-0.003，-0.001，-2.857，-2.901，-3.439，可见有一个正的李雅普

诺夫指数，因此系统处于混沌态。混沌吸引子如图 6(a)所示，抽运光、信号光和闲频光三模随时间的输出变化如图 6(b)~(d)所示。图 7 和图 8 分别给出了不同抽运强度时系统的混沌吸引子。

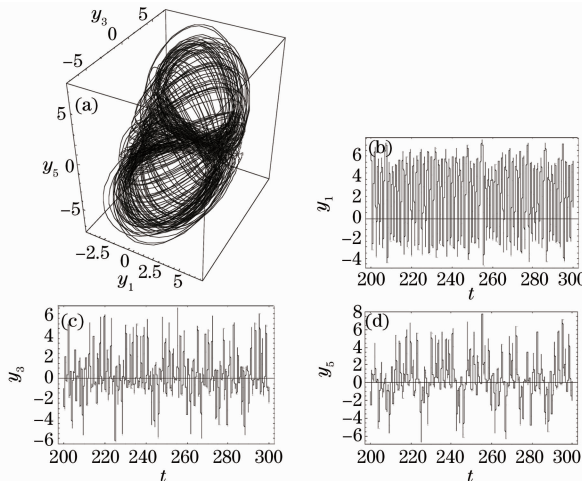


图 6 $E_A = 12$ 时系统的混沌吸引子(a)和抽运光(b)、信号光(c)、闲频光(d)的时间序列

Fig. 6 Chaotic attractor (a) and the chaotic time series of pump (b), signal (c) and idle (d) fields

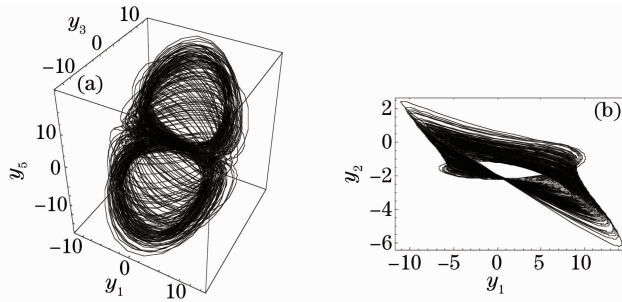


图 7 $E_A=29$ 时非简并光学参变振荡系统(a)和基模(b)的混沌吸引子

Fig. 7 Chaotic attractors of NOPO system (a) and fundamental mode (b) at $E_A=29$

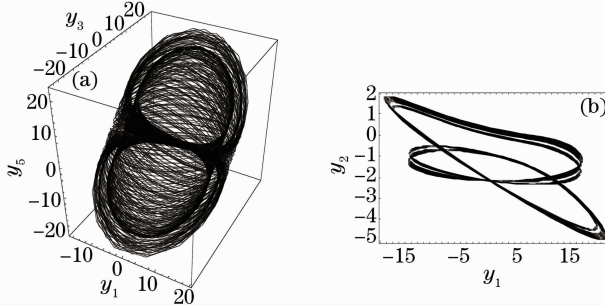


图 8 $E_A=64$ 时非简并光学参变振荡系统(a)和基模(b)的混沌吸引子

Fig. 8 Chaotic attractors of NOPO system (a) and fundamental mode (b) at $E_A=64$

当 $72 \leq E_A \leq 100$ 时,系统有两个正的李雅普诺夫指数,因而处于超混沌态。 $E_A = 75$ 时,系统的六个李雅普诺夫指数依次为:1.533,0.868,-0.165,-2.695,

-3.760,-4.438,超混沌吸引子和时间序列如图 9 所示。由图可知,信号光模和闲频光模的超混沌吸引子形状相似。

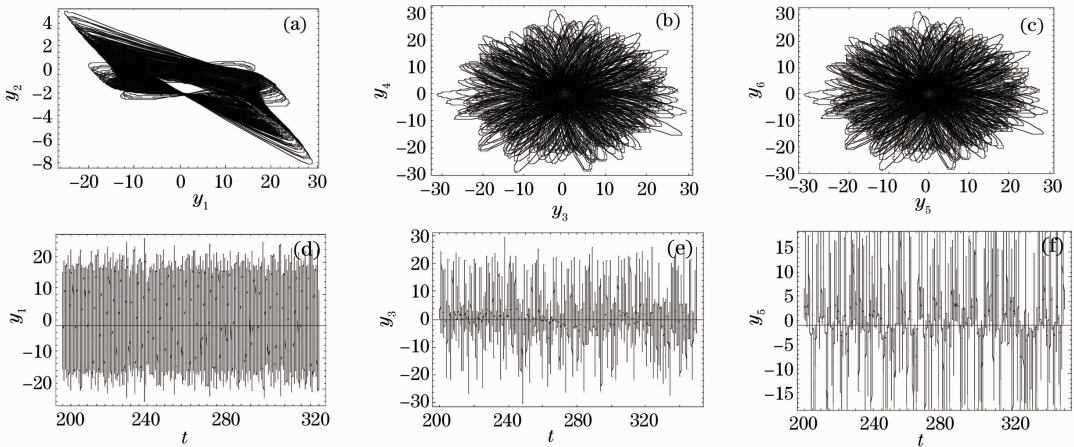


图 9 $E_A=75$ 时(a)抽运光模、(b)信号光模、(c)闲频光模的超混沌吸引子和(d)抽运光模、(e)信号光模、(f)闲频光模的超混沌时间序列

Fig. 9 Hyperchaotic attractors of (a) pump mode, (b) signal mode and (c) idle mode and the hyperchaotic time series of (d) pump mode, (e) signal mode and (f) idle mode at $E_A=75$

5 结 论

研究了驱动场对非简并光学参变振荡器系统动力学行为的影响,通过计算系统随驱动场变化的李雅普诺夫指数谱,得到了非简并光学参变振荡器系统处于定态、周期态、混沌态和超混沌态的参数区间,结合系统在不同状态下的相图和时间序列,展示

了非简并光学参变振荡器系统的非线性动力学行为特性。

通过对系统相图和时间序列的数值模拟分析发现,适当选取参数,系统会处于定态、周期态、混沌态和超混沌态。当系统处于周期态时,不同的抽运强度所对应的周期轨道也会有所不同。当系统处于混

沌或超混沌态时,不同的抽运强度对应不同形状的混沌或超混沌吸引子。此外,非简并光学参变振荡器系统在 $E_A=7.74$ 和 $E_A=8.36$ 由周期态进入混沌轨道时的方式为突变,并没有出现倍周期分岔,这和简并光学参变振荡器系统有所不同。

参 考 文 献

- 1 Shi Shunxiang, Chen Guofu, Zhao Wei *et al.*. Nonlinear Optics [M]. Xi'an: Xi'an Electronics Science and Technology University Press, 2003. 113~147
- 石顺祥,陈国夫,赵卫等. 非线性光学[M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 2003, 113~147
- 2 Su Hong, Ruan Shuangchen. Widely tunable mid-infrared generation in a quasi-phase matched optical parametric oscillator [J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(suppl.): 219~221
- 苏红,阮双琛. 准相位匹配光学参变振荡器中宽调谐中红外光的产生[J]. 中国激光, 2006, **33**(增刊): 219~221
- 3 Yao Jianghong, Xue Liangping, Yan Boxia *et al.*. Optical parametric oscillator based on periodically poled MgO: LiNbO₃ crystal [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(2): 209~213
- 姚江宏,薛亮平,颜博霞等. 周期极化掺镁铌酸锂晶体的光学参变振荡[J]. 中国激光, 2007, **34**(2): 209~213
- 4 J. A. Giordmaine, R. C. Miller. Tunable coherent parametric oscillation in LiNbO₃ at optical frequencies [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **14**(24): 973~976
- 5 L. A. Lugiato, C. O. C. Fabre, E. Glacolino *et al.*. Bistability, Self-pulsing and chaos in optical parametric oscillators [J]. *Il Nuovo Cimento D*, 1988, **10**(8): 959~977
- 6 N. P. Petiaux, Rou Ding Li, P. Mandel. Instabilities of the degenerate optical parametric oscillator [J]. *Opt. Commun.*, 1989, **72**(3): 256~260
- 7 Feng Xiuqin, Shen Ke. Controlling hyperchaos in degenerate optical parametric oscillator by modulation [C]. *SPIE*, 2005, **5646**: 126~132
- 8 Feng Xiuqin, Shen Ke. Anti-control of chaos on the degenerate optical parametric oscillator [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(9): 4455~4459
- 冯秀琴,沈柯. 简并光学参变振荡器混沌反控制[J]. 物理学报, 2006, **55**(9): 4455~4459
- 9 Feng Xiuqin, Shen Ke. Phase synchronization and anti-phase synchronization of chaos for degenerate optical parametric oscillator [J]. *Chin. Phys.*, 2005, **14**(8): 1526~1532
- 10 Feng Xiuqin, Shen Ke. Synchronization of chaotic degenerate optical parametric oscillator by hyperchaotic signal modulating parameter [J]. *Chinese J. Computational Physics*, 2007, **24**(6): 677~682
- 冯秀琴,沈柯. 利用超混沌信号调制参数实现简并光学参变振荡器混沌同步[J]. 计算物理, 2007, **24**(06): 677~682
- 11 Feng Xiuqin, Shen Ke. Controlling hyperchaos and periodic synchronization in DOPO with parameter modulated by an external periodic signal [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, **35**: 506~511
- 12 Feng Xiuqin, Shen Ke. Controlling hyperchaos and synchronizing periodic states in the DOPO [J]. *Opt. Quant. Electron.*, 2005, **37**: 695~703
- 13 Zhao Chaoying, Tan Weihai. Quantum fluctuation of the nonlinear degenerate optical parametric amplification [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(8): 1136~1142
- 赵超樱,谭维翰. 非线性简并光学参变放大系统的量子起伏[J]. 光学学报, 2005, **25**(8): 1136~1142
- 14 B. Coutinho dos Santos, K. Dechoum *et al.*. Quantum analysis of the nondegenerate optical parametric oscillator with injected signal [J]. *Phys. Rev. A*, 2005, **72**(3): 0338201~0338211
- 15 Wang Hai, Gao Jiangrui, Xie Changde *et al.*. Investigation of unstable characteristics in nondegenerate optical parametric oscillator [J]. *Acta Physica Sinica*, 1995, **44**(10): 1563~1569
- 王海,郜江瑞,谢常德等. 非简并光学参变振荡腔非稳特性研究[J]. 物理学报, 1995, **44**(10): 1563~1569
- 16 Zhang Tiancai, Xie Changde, Peng Kunchi. Intracavity intensities and the classical gain in ring OPO cavity [J]. *Acta Sinica Quantum Optica*, 1996, **2**(2): 119~126
- 张天才,谢常德,彭堃堦. 环形腔光学参变振荡中内腔场密度及经典增益[J]. 量子光学学报, 1996, **2**(2): 119~126
- 17 K. J. McNeil, C. W. Gardiner. Quantum statistics of parametric oscillator [J]. *Phy. Rev. A*, 1983, **28**(3): 1560~1566