

文章编号: 0253-2239(2010)05-1427-07

# 基于傅里叶级数参数化描述的形状扩散光学层析成像方法研究

阮平巧 杨 芳 高 峰 赵会娟

(天津大学精密仪器与光电子工程学院, 天津 300072)

**摘要** 提出了一种形状扩散光学层析成像技术的数值方法,它能同时重建组织器官的边界和器官内的光学参数。假设不同类型的组织器官内具有各异的均匀光学参数,光子传输模型便可由一些耦合的 Helmholtz 方程描述,并使用边界元法作为正向模型的数值求解方法。区域的复杂光滑边界用傅里叶级数展开参数化方法表示。反演问题采用 Levenberg-Marquardt 优化算法,并用加入不同噪声水平的模拟数据对算法进行验证。数值模拟结果表明,提出的图像重建算法具有较快的收敛速度和全局收敛性,并能从噪声数据中准确恢复相应区域的形状参数和光学参数。

**关键词** 形状扩散光学层析成像;边界元法;傅里叶级数展开;逆问题

中图分类号 Q63 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103005.1427

## Two Dimensional Shape-Based Diffusion Optical Tomography Methodology Using Fourier Series Parameterization

Ruan Pingqiao Yang Fang Gao Feng Zhao Huijuan

(College of Precision Instrument and Optoelectronics Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract** A numerical method to the inverse problem in shape-based diffusion optical tomography is proposed to simultaneously recover the smooth boundaries of the tissue regions and the optical properties. The regions of different tissues are assumed to have piecewise constant optical properties, thus the forward problem of the light propagation of diffuse optical tomography (DOT) can be modeled as a set of coupled Helmholtz equations, and solved by the boundary element method (BEM). Fourier series expansion is used for the representation of the smooth complicated boundaries. For inverse problem the Levenberg-Marquardt optimization process is implemented here. The performance of the proposed approach is evaluated by the measurements at different noise levels. The numerical results illuminate that the methodology has faster convergence speed and global convergence, and the boundaries and the optical coefficients can both be recovered with the good accuracy from the noisy measurements.

**Key words** shape-based diffuse optical tomography; boundary element method; Fourier series expansion; inverse problems

### 1 引 言

扩散光学层析(Diffuse Optical Tomography, DOT)是一种当今医学影像技术研究的热点之一,主要应用于新生儿脑血氧饱和度水平监测、脑功能成像和乳腺肿瘤的检测及分类等<sup>[1,2]</sup>。DOT 技术遵循“软场”成像模态的基本原理,其核心为发展基于有效的光子传输模型的反演理论,从表面漫射光的

时空分布测量信息中重建组织体内部的吸收与散射系数的空间分布<sup>[3]</sup>。组织体的一些重要生理信息,如组织氧饱和度、血容积率及血氧饱和度等,都与光学参数密切相关<sup>[4]</sup>。

基于体元的传统 DOT 技术要获得较高的空间分辨率需要把重建区域剖分得足够细密,引入的大量未知参数增大反演问题的搜寻空间规模,使反演

收稿日期: 2009-05-11; 收到修改稿日期: 2009-07-06

基金项目: 国家自然科学基金(30870657, 30678049)、国家 973 计划(2006CB705700)、国家 863 计划(2009AA022413)、天津市自然科学基金(07JCYBJC06600)和高等学校创新引智计划(B07014)资助课题。

作者简介: 阮平巧(1983—),男,博士研究生,主要从事基于形状的组织光学层析成像方面的研究。

E-mail: rpqcauc@tju.edu.cn

导师简介: 高峰(1963—),男,教授,主要从事组织光学成像方面的研究。E-mail: gaofeng@tju.edu.cn

问题呈现高度病态性,严重抑制传统 DOT 成像技术的精度和灵敏度<sup>[5,6]</sup>。随着计算机信息处理技术和医学成像技术的进步,以获取生物活体几何解剖结构的数字图像描述为目标的数字生物体技术,已获得了广泛的研究和发展,而近年来逐步发展的形状 DOT 技术则将数字生物体参数化描述技术和 DOT 基本原理相结合<sup>[7~9]</sup>,为目标生物体的复杂光学结构的获取问题,提供了一个新的有效解决途径。

形状 DOT 技术利用生物体器官或肿瘤异质体光学均匀性的自然假设,通过同域像素归并实现基于器官区域几何描述的“粗粒度”重建效应,使反演问题从大规模的体元光学参数重建,变为基于先验解剖信息的复杂区域形状描述参数和各区域内均匀光学参数的重建,可改善反演问题的病态性,大幅提高成像目标的定位和量化精度<sup>[10]</sup>。形状 DOT 技术结合使用传统医学影像技术(如 MRI 和 CT 等)获得的解剖结构信息,在早期乳腺肿瘤检测和脑功能成像等方面都具有广泛的应用前景<sup>[11]</sup>。

## 2 正向系统描述

### 2.1 扩散光学层析一般理论

使用扩散方程作为描述光在生物组织体中传播的数学模型,它的稳态形式为椭圆型偏微分方程,可使用基于体元剖分的有限元法(FEM)或基于表面剖分的边界元法(BEM)求解<sup>[12,13]</sup>。稳态扩散方程可表示为

$$-\nabla \cdot \kappa(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r}) + \mu_a(\mathbf{r}) c \Phi(\mathbf{r}) = q_0(\mathbf{r}), \quad (1)$$

式中  $\Phi(\mathbf{r})$  为光源位置  $\mathbf{r}_s$  处激发得到位置  $\mathbf{r}$  处的光子密度,  $\kappa = c/[3(\mu_a + \mu'_s)]$  为扩散系数,  $\mu_a$  和  $\mu'_s$  分别为吸收系数和约化散射系数,  $c$  为光在组织体内的速度,  $q_0(\mathbf{r})$  为光源项。并使用罗宾边界条件

$$c \Phi(\xi) + 2\kappa(\xi) \frac{1+R_f}{1-R_f} \mathbf{s}_n \cdot \nabla \Phi(\xi) = 0, \quad \xi \in C_1, \quad (2)$$

式中  $\xi$  为组织体边界  $C$  上的点,  $\mathbf{s}_n$  为表面外法向单位矢量,  $R_f$  为扩散传输内反射系数。利用 Fick 定律可得到组织体表面的输出光流量

$$\Gamma(\xi) = -\kappa(\xi) \mathbf{s}_n \cdot \nabla \Phi(\xi). \quad (3)$$

### 2.2 形状 DOT 技术

假设组织体各器官具有不同的光学参数,而同一器官内的光学参数分布均匀,组织体可表示成由多个互不相交的区域组成。为了简化模型,假设组织体中只有一个异质体,对于区域  $\Omega \subset R^2$ ,可表示为

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^2 A_i. \quad (4)$$

组织体的拓扑结构如图 1 所示,区域  $\Omega$  由非连通区域  $A_1$  和  $A_2$  组成,子区域  $A_\ell$  由光滑闭合曲线  $C_\ell$  包围,  $C_1$  表示整个组织体的最外层边界;区域  $A_1$  和  $A_2$  内分别具有相同的吸收系数和约化散射系数。

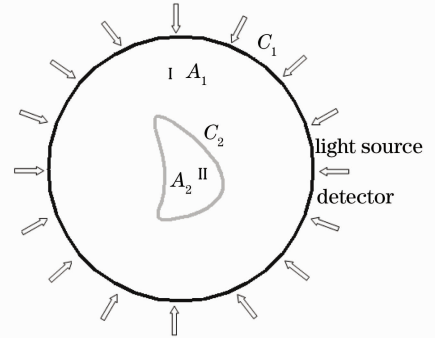


图 1 组织模型的拓扑结构

Fig. 1 Topology of tissue model

基于上述区域光学参数分段均匀化假设,整体区域的扩散方程可由两个耦合的 Helmholtz 方程代替<sup>[12]</sup>

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_1(\mathbf{r}) - k_\ell^2 \Phi_1(\mathbf{r}) &= -q_1(\mathbf{r}) & \text{in } C_1, \\ \Delta \Phi_2(\mathbf{r}) - k_\ell^2 \Phi_2(\mathbf{r}) &= 0 & \text{in } C_2, \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $k_\ell^2 = \mu_{al}c/\kappa_\ell$ ,  $\ell = 1, 2$  为方程的波数,  $\mu_{al}c$  及  $\kappa_\ell$  分别为区域  $A_\ell$  中的吸收系数和扩散系数,  $q_1(\mathbf{r}) = q_0(\mathbf{r})/\kappa_1$ 。在边界上需满足条件

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2, \quad \kappa_1 \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi_1 = \kappa_2 \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi_2 & \text{on } C_2, \\ c \Phi_1 + 2\kappa_1 \frac{1+R_f}{1-R_f} \mathbf{s}_n \cdot \nabla \Phi_1 &= 0 & \text{on } C_1, \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{s}_n$  分别为边界  $C_2$  和最外层边界  $C_1$  的外法向。

该 Helmholtz 耦合方程可由边界积分公式(boundary integral formulation, BIE)求解<sup>[12,13]</sup>,数值模型计算的表面输出光流量将仅与区域边界  $C_\ell$  及由边界包围的子区域中的光学参数  $\{\mu_{al}, \kappa_\ell\}$  相关。当边界  $C_\ell$  由形状参数  $\gamma_\ell$  表示时,正向问题就变成使用边界元方法(boundary element method, BEM)将形状参数  $\gamma_\ell$  及光学参数  $\{\mu_{al}, \kappa_\ell\}$  映射为组织表面的测量数据  $\mathbf{z}$ ,反演问题就变成从测量数据  $\mathbf{z}$  中恢复出目标区域的边界形状参数  $\gamma_\ell$  及区域内光学参数  $\{\mu_{al}, \kappa_\ell\}$ 。

### 2.3 复杂光滑边界的表示方法

假设组织体的各子区域  $A_\ell$  是单连通的,即包围各子区域的边界  $C_\ell$  是互不相交的( $C_i \cap C_j = 0, i \neq j$ )。当边界  $C_\ell$  足够光滑时可近似表示为<sup>[7]</sup>

$$\{C_\ell(s)\} = \begin{bmatrix} x_\ell(s) \\ y_\ell(s) \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{N_\theta} \begin{bmatrix} \gamma_n^x \theta_n^x(s) \\ \gamma_n^y \theta_n^y(s) \end{bmatrix}, \quad \ell = 1, 2 \quad (7)$$

式中  $\theta_n$  为周期为 1 的可微基函数,  $s$  为参数。对于二维模型, 可以使用傅里叶级数分别展开复杂曲线的  $x$  和  $y$  坐标。傅里叶的三角基函数的形式为

$$\begin{aligned}\theta_0 &= 1 \\ \theta_n &= \sin\left[2\pi\left(\frac{n-1}{2}\right)(s+\phi)\right], \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (8) \\ \theta_n &= \cos\left[2\pi\frac{n}{2}(s+\phi)\right], \quad n = 2, 4, 6, \dots\end{aligned}$$

式中  $\phi$  为曲线的相位,  $\alpha$  为坐标  $x$  或  $y$ 。因此可以使用向量  $\boldsymbol{\gamma}_\ell$  表示曲线的形状参数:  $\boldsymbol{\gamma}_\ell = (\gamma_{\ell_0}^x, \dots, \gamma_{\ell_0}^y, \gamma_{\ell_1}^x, \dots, \gamma_{\ell_1}^y)^T$ 。采用  $N_\theta = 4$  的基函数集合来表示曲线。

## 2.4 边界积分方程的导出

在形状 DOT 的重建技术中, 异质区域的边界成为反演问题的重建目标, 因此使用边界积分公式来描述正向问题非常适合反演问题的迭代框架。引入边界积分公式后, 区域内任意一点的光子密度都可由边界节点上的光子密度及其法向方向导数曲线积分表示。根据边界上需满足的条件, 定义下列边界上的变量

$$\begin{aligned}I_1 &= \Phi_1|_{C_1}, \quad I_2 = \Phi_1|_{C_2} = \Phi_2|_{C_2} \\ J_1 &= -\frac{1}{2\alpha}I_1|_{C_1}, \\ J_2 &= \kappa_1 \boldsymbol{\nu} \nabla \Phi_1|_{C_2} = \kappa_2 \boldsymbol{\nu} \nabla \Phi_2|_{C_2}, \\ \alpha &= \frac{1-R_t}{c(1+R_t)}.\end{aligned}\quad (9)$$

利用 Helmholtz 方程的基本解  $G_\ell(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)$  和格林第二公式可得到(5)式的边界积分公式<sup>[12,14]</sup>

$$\begin{aligned}\Phi_\ell(\mathbf{r}) &= \left( \int_{C_\ell} - \int_{C_{\ell+1}} \right) \left[ G_\ell(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \frac{\partial \Phi_\ell(\mathbf{r}_s)}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \Phi_\ell(\mathbf{r}_s) \frac{\partial G_\ell(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right] d\mathbf{r}_s + \\ &\int_{A_\ell} G_\ell(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) q_\ell(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s,\end{aligned}\quad (10)$$

式中  $\partial/\partial \boldsymbol{\nu}$  为  $\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla$ , 表示梯度在边界  $C_\ell$  的外法向  $\boldsymbol{\nu}$  上的投影。对于二维问题, Helmholtz 方程的 Green 函数基本解及其法向方向导数为<sup>[14]</sup>

$$\begin{aligned}G_\ell(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) &= \frac{1}{4j} H_0^2(-jk_\ell |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|), \\ \frac{\partial G_\ell(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= \\ \boldsymbol{\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) &\frac{k_\ell}{4|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} H_1^2(-jk_\ell |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|),\end{aligned}\quad (11)$$

式中  $j = \sqrt{-1}$ ,  $H_0^2(x)$  和  $H_1^2(x)$  分别为零阶和一阶第二类汉开尔(Hankl)函数。边界积分(10)式对于  $\forall \mathbf{r} \in A_\ell$  都成立, 但当位置矢量  $\mathbf{r} \in A_1 \rightarrow C_1$ ,  $\mathbf{r} \in A_1 \rightarrow C_2$  或  $\mathbf{r} \in A_2 \rightarrow C_2$  时, 格林函数基本解是奇异的, 即在边界  $C_1$  或  $C_2$  的曲线积分是奇异的, 所以需对奇异的边界积分进行合适的处理。根据文献[10]的奇异性处理方法, 拓扑结构如图 1 所示的模型可得边界积分方程

$$\begin{aligned}\zeta_1^+(\mathbf{r})I_1(\mathbf{r}) + \int_{(C_1-\sigma_\epsilon^+)} \left[ \frac{\partial G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \frac{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{2\alpha\kappa_1} \right] I_1(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \int_{C_2} \left[ \frac{\partial G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \boldsymbol{\nu}} I_2(\mathbf{r}') - \frac{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\kappa_1} J_2(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' &= Q_1(\mathbf{r}), \\ \zeta_1^-(\mathbf{r})I_2(\mathbf{r}) + \int_{C_1} \left[ \frac{\partial G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \frac{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{2\alpha\kappa_1} \right] I_1(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \int_{(C_2-\sigma_\epsilon^-)} \left[ \frac{\partial G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \boldsymbol{\nu}} I_2(\mathbf{r}') - \frac{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\kappa_1} J_2(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' &= Q_1(\mathbf{r}), \\ \zeta_2^+(\mathbf{r})I_2(\mathbf{r}) + \int_{(C_2-\sigma_\epsilon^+)} \left[ \frac{\partial G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \boldsymbol{\nu}} I_2(\mathbf{r}') - \frac{G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\kappa_1} J_2(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' &= 0,\end{aligned}\quad (12)$$

式中  $Q_1(\mathbf{r}) = \int_{A_1} G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) q_1(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s$ ,  $\zeta_\ell^\pm(\mathbf{r})$  是由边界上的奇异性积分引起的, 该项可以通过奇异点  $\mathbf{r}$  处半径为  $\epsilon$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) 的半圆  $\sigma_\epsilon$  解析求得。当奇异点  $\mathbf{r}$  处的曲线一阶连续时,  $\zeta_1^+(\mathbf{r}) = \zeta_1^-(\mathbf{r}) = 1/2$ 。

## 2.5 离散化及计算格式的形成

计算中区域边界  $C_\ell$  被离散成  $E_\ell$  个曲线段和  $P_\ell$  个节点  $N_{\ell,p}$ ,  $p = 1, \dots, P_\ell$ , 每个节点的局部支撑基函

数表示为  $u_{\ell,p}(\mathbf{r})$ 。于是边界上任意一点的光子密度和光流量分别为

$$\mathbf{I}_\ell(\mathbf{r}) = \sum_{p=1}^{P_\ell} I_{\ell,p} u_{\ell,p}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{J}_\ell(\mathbf{r}) = \sum_{p=1}^{P_\ell} J_{\ell,p} u_{\ell,p}(\mathbf{r}),\quad (13)$$

把(13)式中的变量代入(12)式中, 可以构建正向问题的线性系统

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{E} + \mathbf{A}_{11}^{(1)} + \frac{1}{2\alpha}\mathbf{B}_{11}^{(1)} & -\mathbf{A}_{12}^{(1)} & \mathbf{B}_{12}^{(1)} \\ \mathbf{A}_{11}^{(2)} + \frac{1}{2\alpha}\mathbf{B}_{11}^{(2)} & \frac{1}{2}\mathbf{E} - \mathbf{A}_{12}^{(2)} & \mathbf{B}_{12}^{(2)} \\ 0 & \frac{1}{2}\mathbf{E} + \mathbf{A}_{22}^{(2)} & -\mathbf{B}_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & | & c_1 \\ \mathbf{Q}_1 & | & c_2 \\ 0 & & \end{bmatrix}, \quad (14)$$

式中  $\mathbf{E}$  为单位对角阵,  $\mathbf{I}_\ell, \mathbf{J}_\ell, \mathbf{Q}_1$  分别为连续变量  $I_\ell, J_\ell, Q_1$  的离散版本。矩阵中的元素为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij}^{(k)}(p, p') &= \int_{\tilde{c}_j} \frac{\partial G_i(N_{k,p}, \mathbf{r}')}{\partial \varphi} u_{j,p'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \\ \mathbf{B}_{ij}^{(k)}(p, p') &= \int_{\tilde{c}_j} \frac{G_i(N_{k,p}, \mathbf{r}')}{\kappa_i} u_{j,p'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (15)$$

用  $\mathbf{K}$  表示(14)式左边的矩阵,  $\Phi = [\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2]^T$ , 基于边界元法求解光在组织体中传输的正向问题可表示为线性系统

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{Q}, \quad (16)$$

式中矩阵  $\mathbf{K}$  是非对称稠密块状矩阵。解线性系统(16)式便可求得剖分节点上的光流量和光子密度。对于给定的探测器配置, 使用线性测量算子  $\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{I}_1$  将最外层边界离散节点上的光子密度映射到测量数据  $\mathbf{z}$  的空间。将上述求解最外层边界上测量数据的过程定义成非线性算子  $\mathbf{F}(\gamma_\ell, \mu_{al}, \kappa_\ell) = \mathbf{M}\mathbf{I}_1 = \mathbf{M}\mathbf{K}(\gamma_\ell, \mu_{al}, \kappa_\ell)^{-1}\mathbf{Q}$ , 表示把各区域形状参数  $\{\gamma_\ell\}$  及光学参数  $\{(\mu_{al}, \kappa_\ell)\}$  映射到测量空间  $\mathbf{Z}$ 。如图 1 所示, 在组织体的表面  $C_1$  上布置了  $S(S=16)$  个光源光纤和  $D(D=48)$  个探测器光纤, 实验中依次在一个光源处激发, 并在所有探测器处收集溢出的光子。  $z_{i,j}$  表示当第  $i$  个光源处激发时在第  $j$  个探测器处测量的数据,  $\mathbf{z}^{(i)}$  表示当第  $i$  个光源处激发时, 所有探测器测量数据的集合。于是维数  $N(N=S \times D)$  的测量向量  $\mathbf{z}$  可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= [\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots, \mathbf{z}^{(S)}]^T = \\ &\mathbf{F}(\gamma_\ell, \mu_{al}, \kappa_\ell). \end{aligned} \quad (17)$$

### 3 形状 DOT 的反演问题

形状 DOT 技术的反演问题就是从初始假设的形状参数  $\gamma_\ell^0$  和光学参数  $(\mu_{al}^0, \kappa_\ell^0)$  开始, 寻找一组  $\gamma_\ell^*, (\mu_{al}^*, \kappa_\ell^*)$  实现模型计算集  $\mathbf{F}(\gamma, \mu_a, \kappa)$  与测量数据  $\mathbf{z}$  的最佳匹配<sup>[8]</sup>。于是反演问题可表述为最小二乘问题

$$\begin{aligned} \Xi(\gamma^*, \mu_a^*, \kappa^*) &= \\ \min_{\gamma, \mu_a, \kappa} &\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^D \left( \frac{z_{i,j} - \mathbf{F}_{i,j}(\gamma, \mu_a, \kappa)}{z_{i,j}} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

一般使用牛顿型方法求解上述非线性最优化问题。定义  $\mathbf{x} = (\gamma_\ell, \mu_{al}, \kappa_\ell)^T$  表示包含形状参数和光学参数等未知量的重建向量。牛顿型方法就是在当前未知量  $\mathbf{x}_k$  配置下对优化模型  $\Xi(\mathbf{x})$  进行 Taylor 展开, 通过多次迭代使优化模型的梯度  $\Xi'(\mathbf{x})$  趋近于零, 以达到优化模型  $\Xi(\mathbf{x})$  的极小值<sup>[7]</sup>。该方法可导出迭代格式

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \{\Xi''(\mathbf{x}_k)\}^{-1} \Xi'(\mathbf{x}_k), \quad (19)$$

式中  $\Xi'(\mathbf{x}_k) = \mathbf{J}_k^T \mathbf{W}[\mathbf{z} - \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)]$ ,  $\mathbf{W}$  是  $N$  维对角方阵,  $\mathbf{W}_{k,k} = 1/z_{i,j}$ ,  $k = (i-1) * D + j$ , 正向算子  $\mathbf{F}$  关于形状参数和光学参数的 Jacobian 矩阵  $\mathbf{J}_k$  通过有限差分方式求得。牛顿法的主要问题是 Hesse 矩阵  $\Xi''(\mathbf{x}_k)$  中的二阶导信息计算花费的工作量很大, 实际应用中采用被广泛使用的 Gauss-Newton 法, 用  $\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k$  项代替  $\Xi''(\mathbf{x}_k)$ , 该方法对小余量问题或当余量函数近似线性时非常有效<sup>[15]</sup>。对于建立的模型, 当初始设置的形状和光学参数远离真实点, 或测量数据的噪声比较大时, Jacobian 矩阵  $\mathbf{J}_k$  往往是病态的, 需要引入规则化因子使算法稳态, 本文使用 Levenberg-Marquardt 方法解决上述问题:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + (\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k + \lambda \mathbf{D}_k)^{-1} \mathbf{J}_k^T \mathbf{W}[\mathbf{z} - \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)], \quad (20)$$

式中  $\lambda$  是规则化因子,  $\mathbf{D}_k$  是 Jacobian 矩阵  $\mathbf{J}_k$  的调比矩阵, 是维数为未知量个数的对角方阵, 对角元素为  $\mathbf{J}_k$  中各列的范数,  $\mathbf{D}_k$  的作用是减少矩阵  $\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k + \lambda \mathbf{D}_k$  的条件数, 改善算法的收敛速度<sup>[15,16]</sup>。

Zacharopoulos 在论文<sup>[10]</sup>中初次尝试同时重建异质体形状参数和光学参数, 该文采用 4 次形状参数重建和 1 次光学参数重建交替进行的优化策略, 并假定背景的光学参数精确已知, 重建中保持不变, 使用没有加入噪声的模拟数据对上述算法进行验证。交替重建策略是一种共轭方向法, 收敛速度(类似最速下降法)是线性的<sup>[15]</sup>。假设背景的光学参数也是未知的, 提出的优化算法不仅重建异质区域的光学参数和形状参数, 同时也重建背景的光学参数。与文献<sup>[10]</sup>的交替优化策略不同, 利用整体 Jacobian 矩阵信息, 使用 Levenberg-Marquardt 方法同时构建光学参数和形状参数的迭代方向。

### 4 数值模拟结果

数值模拟采用拓扑结构如图 1 所示的组织模型, 模型的最外层边界  $C_1$  为圆形, 半径为 15 mm, 并在重

建过程中保持不变；内部区域  $A_1$  的边界  $C_2$  由傅里叶级数表示，采用 5 个函数基分别展开曲线  $C_2$  的坐标  $x$  和  $y$ ，所以描述复杂曲线  $C_2$  共使用 10 个形状参数，目标体形状如图 2 所示。数值计算中曲线  $C_1$  及  $C_2$  都被离散成 48 个节点和 48 个线单元。模拟测量数据  $z$  由正向模型产生，背景的光学参数设置为  $\mu_{a1} = 0.01 \text{ mm}^{-1}$  和  $\mu'_{s1} = 1.0 \text{ mm}^{-1}$ ，异质体的光学参数为  $\mu_{a2} = 0.02 \text{ mm}^{-1}$  和  $\mu'_{s2} = 2.0 \text{ mm}^{-1}$ 。为了验证算法对系统噪声的稳健性(robustness)，模拟测量数据  $z$  中加入水平分别为 60, 30 和 25 dB 的噪声。异质体的初始形状设置为中心在  $(0,0)$  处，半径为 3 mm 的圆，背景及异质体的初始光学参数假设和最终重建结果

在表 1 中列出。重建结果表明，在不同噪声水平下优化算法都能精确地重建背景的吸收系数  $\mu_{a1}$  和约化散射系数  $\mu'_{s1}$ ，重建误差均小于 0.7%，异质体中光学参数的重建误差随着噪声的增强有所增加。为了验证光学参数的初始设置对重建结果的影响，使用噪声水平为 25 dB 的同一模拟数据进行试验，结果如表 1 后两组数据所示，对于不同的初始光学参数配置，优化算法都能得到相同的结果，即可收敛到同一个极小点，所以本文提出的优化算法具有较好的全局收敛特性。真实的背景及异质体光学参数分别为  $(\mu_{a1}, \mu'_{s1}) = (0.01, 1.0)$  和  $(\mu_{a2}, \mu'_{s2}) = (0.02, 2.0)$ 。

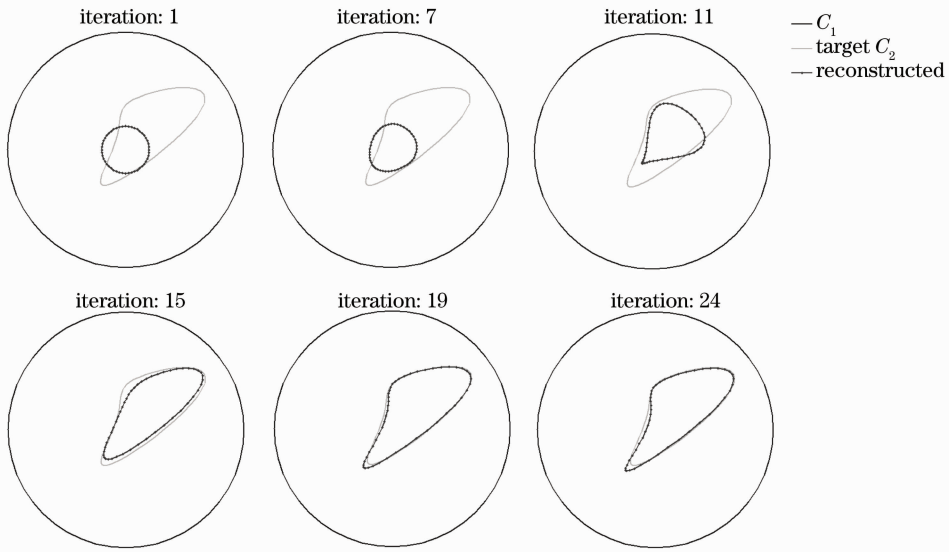


图 2 噪声为 25 dB 时异质体形状的重建过程(浅色实线表示目标曲线,深色点划线表示重建曲线)

Fig. 2 Recovery of inhomogeneity shape from 25 dB noisy measurements (target is expressed by the light curve and the reconstructed shape is expressed by black curve)

表 1 在不同噪声水平下各区域的光学参数重建结果

Table 1 Reconstructed optical properties for various levels of measurement noise in measurements

Noise level /dB	Optical parameter	Initial guess / $\text{mm}^{-1}$	Reconstructed value / $\text{mm}^{-1}$	Relative error /%
60	$(\mu_{a1}, \mu'_{s1})$	(0.013, 1.3)	(0.0100, 1.0001)	(0.014, 0.011)
	$(\mu_{a2}, \mu'_{s2})$	(0.025, 2.5)	(0.0199, 2.0016)	(0.350, 0.078)
30	$(\mu_{a1}, \mu'_{s1})$	(0.013, 1.3)	(0.0101, 0.9967)	(0.598, 0.332)
	$(\mu_{a2}, \mu'_{s2})$	(0.025, 2.5)	(0.0213, 1.9462)	(6.251, 2.689)
25	$(\mu_{a1}, \mu'_{s1})$	(0.013, 1.3)	(0.0099, 1.0006)	(0.641, 0.059)
	$(\mu_{a2}, \mu'_{s2})$	(0.025, 2.5)	(0.0221, 1.9894)	(10.318, 0.529)
25	$(\mu_{a1}, \mu'_{s1})$	(0.007, 1.4)	(0.0099, 1.0006)	(0.640, 0.059)
	$(\mu_{a2}, \mu'_{s2})$	(0.015, 1.5)	(0.0221, 1.9894)	(10.302, 0.528)

图 2 和图 3 展示了表 1 第三组数据的重建过程。因为优化模型对背景的吸收系数最敏感，所以初始的几次迭代中主要是背景的光学参数在优化，异质体光学参数及形状参数基本保持不变。随后的迭代主要是异质体中心和一阶形状信息的优化及背

景光学参数的进一步优化，后期的迭代是高阶的形状细节及异质体中光学参数的优化过程。

为了观察优化算法的重建效果，本文对迭代过程中优化模型的余量[可由(18)式计算]、梯度、异质体的面积和 Hausdorff 距离<sup>[10]</sup>进行考察。图 3(a)

和(b)分别为优化模型的余量曲线和梯度范数曲线,迭代过程中余量曲线是一直下降的,而且在初始几次的下降速度最快,这也验证了优化模型对背景

的吸收系数最敏感的特性。梯度范数曲线虽然在迭代过程中有反弹,但总体上呈下降趋势,最后可达到 $10^{-5}$ 的量级,这说明优化模型最后收敛到极小点。

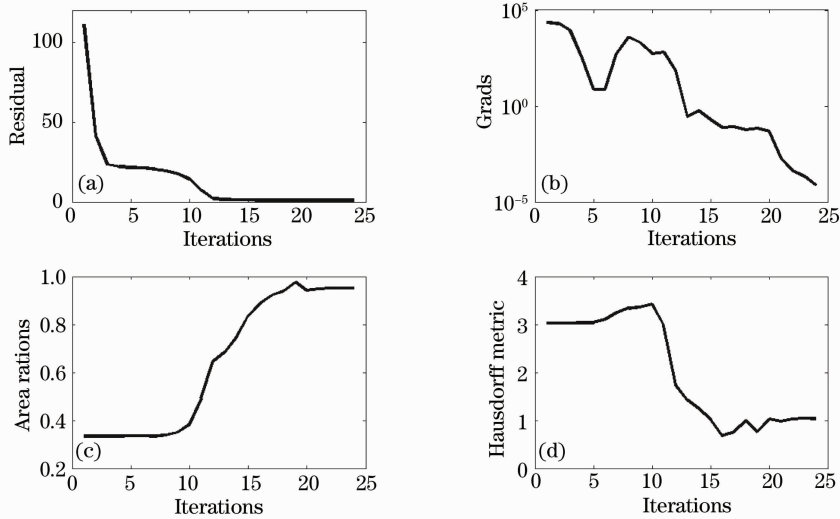


图3 迭代过程中各测量指标的变化曲线。(a)优化模型的余量曲线;(b)优化模型的梯度曲线;(c)目标体与重建区域的面积比值曲线;(d)目标体形状与重建形状的 Hausdorff 距离曲线

Fig.3 Evolution of different measures with iteration. (a) data residual of the optimization; (b) grads norm of the optimization; (c) area ratios between target and reconstructed regions; (d) Hausdorff distance between the target and reconstructed shape

边界 $C_2$ 包围异质体区域的面积可用曲线积分的方式求得

$$A = \frac{1}{2} \int_{C_2} (x dy - y dx), \quad (21)$$

需重建的目标体面积是 $84.48 \text{ mm}^2$ ,数值实验中初始形状的面积是 $28.27 \text{ mm}^2$ ,最终重建的目标体面积是 $80.38 \text{ mm}^2$ ,与真实的目标体面积非常吻合。图3(c)是迭代过程中重建形状的面积与真实面积的比值曲线。

图3(d)展示了目标曲线 $C_2^{\text{tar}}$ 与重建曲线 $C_2^k$ 的 Hausdorff 距离变化。Hausdorff 距离是描述两组点集之间相似程度的一种量度,使用 Hausdorff 距离可以观察曲线 $C_2^{\text{tar}}$ 与 $C_2^k$ 的剖分节点之间的不匹配程度<sup>[10]</sup>。点集之间的 Hausdorff 距离可定义为

$$H(C_2^{\text{tar}}, C_2^k) = \max_{N \in C_2^{\text{tar}}} \min_{N' \in C_2^k} |N - N'|, \quad (22)$$

式中 $N$ 为目标离散节点的集合, $N'$ 为重建的集合。

从图3中可以看出,迭代过程中 Hausdorff 距离有较大的下降。

## 5 结 论

提出一种形状扩散光学层析成像技术的数值方法,采用 Levenberg-Marquardt 方法解决优化问题,

并选择合适的规则化因子和调比矩阵保证算法的稳定。数值实验中使用加入不同噪声水平的模拟测量数据对提出的优化算法进行验证,结果表明,该算法具有较强的稳定性和抗噪能力,并具有较快的收敛速度。在不同噪声水平下,背景的光学参数都能得到比较精确地重建,而异质体中的光学参数的重建误差随着噪声的增强而变大。对于不同的初始光学参数配置,优化算法都能得到相同的结果,具有较好的全局收敛特性。

## 参 考 文 献

- 1 Feng Gao, Yuan Xue, Huijuan Zhao. Two-dimensional optical tomography of hemodynamic changes in a preterm infant brain [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2007, **5**(8): 472~474
- 2 Zhang Limin, He Huiyuan, Gao Feng. Fluorescence molecular tomography based on full time-resolved Scheme [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(7): 1262~1268  
张丽敏, 和慧园, 高峰. 荧光分子层析中的全时间分辨图像重建法 [J]. *光学学报*, 2008, **28**(7): 1262~1268
- 3 F. Gao, P. Poulet, Y. Yamada. Simultaneous mapping of absorption and scattering coefficients from a three-dimensional model of time-resolved optical tomography [J]. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(31): 5898~5910
- 4 Xu Feng, Hu Lin, Wang Xianwei. Effects of low power laser irradiation on human's red blood cell [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(6): 957~960  
许 锋, 胡 林, 王现伟. 低强度激光照射对离体人红细胞的影响 [J]. *中国激光*, 2008, **35**(6): 957~960
- 5 Yang Fang, Ma Yiwen, Gao Feng et al.. Multi-level wavelet

- domain decomposition based time-domain diffuse optical tomography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(8): 1571~1578  
杨芳, 马艺闻, 高峰等. 一种基于多级小波域分解的时域扩散光学层析成像方法的研究[J]. *光学学报*, 2008, **28**(8): 1571~1578
- 6 S. R. Arridge. Optical tomography in medical imaging [J]. *Inverse Probl.*, 1999, **15**(2): 41~93
- 7 V. Kohlemainen, S. R. Arridge, W. R. B. Lionheart. Recovery of region boundaries of piecewise constant coefficients of an elliptic PDE from boundary data [J]. *Inverse Probl.*, 1999, **15**(5): 1375~1391
- 8 V. Kohlemainen, M. Vauhkonen, J. P. Kaipio. Recovery of piecewise constant coefficients in optical diffusion tomography [J]. *Opt. Express*, 2000, **7**(13): 481~491
- 9 V. Kohlemainen, S. R. Arridge, M. Vauhkonen. Simultaneous reconstruction of internal tissue region boundaries and coefficients in optical diffusion tomography [J]. *Phys. Med. Biol.*, 2000, **45**(11): 3267~3283
- 10 A. D. Zacharopoulos, S. R. Arridge, O. Dorn. Three-dimensional reconstruction of shape and piecewise constant region values for optical tomography using spherical harmonic parametrization and a boundary element method [J]. *Inverse Probl.*, 2006, **22**(5): 1509~1532
- 11 S. Srinivasan, B. W. Pogue, C. Carpenter. A boundary element approach for image-guided near-infrared absorption and scatter estimation [J]. *Med. Phys.*, 2007, **34**(11): 4545~4557
- 12 J. Sikora, A. D. Zacharopoulos, A. Douiri. Diffuse photon propagation in multi-layered geometries [J]. *Phys. Med. Biol.*, 2006, **51**(3): 497~516
- 13 A. D. Zacharopoulos, S. R. Arridge, O. Dorn. 3D shape reconstruction in optical tomography using spherical harmonics and BEM [J]. *J. Electromagnet. Wave.*, 2006, **20**(13): 1827~1836
- 14 Zeng Yugeng. Finite Element Method and Boundary Element Method [M]. Xi'an: Xidian University Press, 1991. 126~127  
曾余庚. 有限元法与边界元法 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1991. 126~127
- 15 J. Nocedal, S. J. Wright. Numerical Optimization [M]. Berlin: Springer, 1999. 251~266
- 16 Yuan Yaxiang, Sun Wenyu. Theory of Optimization [M]. Beijing: Science Press, 2005. 382~399  
袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2005. 382~399