

文章编号: 0253-2239(2010)05-1285-06

基于乘性正则化的有限角度 CT 重建算法

卢孝强 孙 怡

(大连理工大学电子与信息工程学院, 辽宁 大连 116023)

摘要 计算机层析(CT)扫描过程中,为了加快速度,同时减少 X 射线对人体的伤害,在有限角度下采样少量的投影数据进行不完全数据重建就显得非常重要。基于总变分最小化的图像迭代重建算法,能够较好地应用于有限角度 CT 重建,然而,其最小化函数的权值参数必须通过大量的实验观察比较才能被确定。即便这样,得到的参数往往也不是最优的。为此,引入了一种基于乘性正则化的迭代重建算法,将总变分函数作为最小化函数的一个因子,在具有总变分方法优点的同时,能够在迭代过程中自适应地调整正则化参数。仿真实验验证了该算法的有效性。

关键词 X 射线光学;图像重建;乘性正则化;有限角度 CT

中图分类号 O434.19 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103005.1285

Limited Angle Computed Tomography Reconstruction Algorithm Based on Multiplicative Regularization Method

Lu Xiaoqiang Sun Yi

(School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, China)

Abstract In the applications of tomographic imaging, insufficient data reconstruction using few projections from limited angle is very important, because it would enable rapid scanning with reduced X-ray doses delivered to patients. The iterative image reconstruction algorithm based on the minimization of the image total variation (TV) works well for limited-angle reconstruction problem. However, the weighting parameter in the cost function can only be determined through considerable experimentation and the parameter attained is not always the optimum. An iterative image reconstruction algorithm based on multiplicative regularization method is introduced. The method obtains the advantages of the TV method by introducing the TV as a multiplicative factor in the cost function, and it can also self-adaptively adjust the regularization parameter during the iterative process. Simulation results show that the proposed algorithm works effectively.

Key words X-ray optics; image reconstruction; multiplicative regularization; limited angle CT

1 引 言

在众多工程领域中,受客观条件的限制,经常会遇到不完全数据重建问题。对于这类问题的讨论,无论是在理论上还是在实际应用中,都具有非常重要的意义^[1]。计算机层析(CT)扫描过程中,为了加快扫描速度,同时减少 X 射线对人体的伤害,只在有限角度下采样少量的投影数据进行不完全数据重建。

从数学角度来分析,CT 中的有限角度重建问题相当于求解一个欠定的代数方程组,属于不适定问题研究范畴。针对该问题的重建算法很多,大致可以分为两类:基于变换的迭代-解析重建算法和基于级数展开的迭代-代数/统计重建算法^[2,3]。1982 年 M. Nassi 等^[4]提出用迭代重建算法(IRR)法对心脏成像;1998 年 A. H. Delaney 等^[5]引入一种新型

收稿日期: 2009-03-02; 收到修改稿日期: 2009-06-08

基金项目: 教育部科学技术研究重点项目(教技司计[2007]2 号)资助课题。

作者简介: 卢孝强(1976—),男,博士研究生,主要从事成像与重构、模式识别及检测等方面的研究。

E-mail: luxq666666@126.com

导师简介: 孙 怡(1964—),女,博士,教授,主要从事光电信息检测、图像处理与模式识别等方面的研究。

E-mail: lslwf@dlut.edu.cn(通信联系人)

的松弛算法来解决 CT 中的有限角度重建问题; 2001 年 F. Natterer 等^[6]从数学角度讨论了有限角度重建问题解的唯一性和稳定性; 2003 年 S. Siltanen 等^[7]阐述了带有先验知识的统计逆算法运用于有限角度重建问题; 2005 年 Candes 等^[8]用小波变换和总变分(TV)准则处理少量投影角度下的数据,得到了不错的结果; 2006 年 M. Rantala 等^[9]用小波变换结合 Besov 空间的先验信息对待重建图像进行了最大后验预测; 2007 年 Hstau^[10]提出一种基于代数重建算法(ART)来减少伪像。ART 重建算法^[11,12]将图像重建问题转化为求解线性方程组的问题,当投影数据不完全时,可以把丢失的数据看作缺少了几个方程,这就在某种程度上忽略了投影数据不全的问题,因而比较适合有限角度 CT 重建问题^[13~15]。另外,众多学者的研究表明,基于总变分最小化的图像迭代重建算法,能够很好地应用于有限角度 CT 重建^[16]。

本文引入了一种基于乘性正则化的迭代重建算法^[17],该算法在具有总变分方法优点的同时,能够在迭代过程中自适应地调整正则化参数,避免了多次试探参数带来的不便。

2 有限角度 CT 重建的数学模型

CT 重建的数学模型可归结为

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{x}, \quad (1)$$

式中 \mathbf{p} 为测量得到的投影数据, \mathbf{R} 为投影系统矩阵, \mathbf{x} 为待重建物体。下面说明该式的具体创建过程。对于待重建物体 \mathbf{x} , 其中任一像素 j 对某一射线 i 的投影贡献为^[17]

$$p_{ij} = r_{ij}x_j, \quad (2)$$

式中 x_j 为待重建物体的第 j 个像素; r_{ij} 为像素 j 对射线 i 的权值贡献, 其定义为

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{the length of } i \text{ ray through } j \text{ pixel} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

射线 i 还经过其他像素, 其总的射线投影为

$$p_i = \sum_j p_{ij} = \sum_j r_{ij}x_j, \quad (4)$$

式中 p_i 为射线 i 穿过物体后在探测器上得到的投影值。

在有限角度 CT 图像重建中, 投影数据的个数一般远小于未知像素数。从数学角度来分析, 该类重建问题相当于求解一个欠定的代数方程组, 属于不适定问题研究范畴。因此, 在有限角度下重建图

像的困难在于: 1) 一般像素数目及射线数目都极大, 在迭代过程中运算量很大。2) 在很多情况下投影数据的个数远小于未知像素数, (1) 式是个欠定方程, 于是有无穷多个解。3) 实际情况下, 测量误差不可避免, 噪声影响也不可忽视。故对(1)式作如下修正

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{e}, \quad (5)$$

式中 \mathbf{e} 为误差矢量。

因此, 在有限角度下重建图像问题可归结为根据有限角度下获得的带有噪声的测量矢量 \mathbf{p} , 利用(5)式估计图像矢量 \mathbf{x} 。

3 重建算法

有限角度 CT 重建问题可归结为对一个欠定的代数方程组的求解问题, 从数学角度来看, 它属于不适定问题。为了得到比较满意的重建结果, 重建过程中通常需要引入正则化的方法。引入了一种乘性正则化的方法, 并使目标函数满足凸函数性质, 利用一般可微函数的共轭梯度法对其进行迭代求解, 直至求得所需要的最优解。

3.1 乘性正则化方法的引入

对于(5)式所示的不适定问题, 一般将参量 \mathbf{x} 的求解问题转化为求如下最优化问题, 求得该问题的最优解即为所需要的解。即

$$\min J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{p}\|, \quad (6)$$

式中 $\|\cdot\|$ 为求范数。

解决这类问题通常需要引入正则化方法。常用的正则化函数具有如下的形式:

$$C(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \lambda F^R(\mathbf{x}), \quad (7)$$

式中 $F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2$ 为费用函数, $F^R(\mathbf{x})$ 为惩罚函数; λ 为正则化参数。正则化函数的构造方法有多种, 其中比较重要的一类就是 TV 正则化法。所谓的一般 TV 正则化法即是把 TV 范数作为惩罚函数的正则化方法, 也就是求解

$$C(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \lambda \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}, \quad (8)$$

式中 $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} = F^R(\mathbf{x}) = \int |\nabla \mathbf{x}(\mathbf{r})| d\mathbf{r}$, \mathbf{r} 为待重建物体某点的位置向量。TV 正则化法在图像重建过程中对噪声具有很强的稳健性, 但其正则化参数 λ 的选择会影响其重建的质量, 而且难以确定。所以希望找到这样一种方法: 在具有 TV 方法优点的同时, 能够克服其参数不易确定的缺点。本文介绍的方法就是基于此目的提出的。

该方法将惩罚函数即 TV 函数作为目标函数的一个因子, 而将费用函数作为其另一个因子。将费用函数看作惩罚函数的正则化参数, 起调节惩罚函

数惩罚力度的作用。因此引入了一种乘性正则化方法,其目标函数为

$$C(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})F^R(\mathbf{x}), \quad (9)$$

式中 $F(\mathbf{x})$ 和 $F^R(\mathbf{x})$ 分别定义如下

$$F(\mathbf{x}) = \eta_D \|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2, \\ F^R(\mathbf{x}) = \int [|\nabla \mathbf{x}(\mathbf{r})|^2 + \delta^2]^{1/2} d\mathbf{r} = \\ \|\mathbf{b}\nabla \mathbf{x}\|^2 + \delta^2 \|\mathbf{b}\|^2, \quad (10)$$

式中 $\eta_D = \|\mathbf{p}\|^{-2}$, $\mathbf{b} = V^{-1/2} [|\nabla \mathbf{x}(\mathbf{r})|^2 + \delta^2]^{-1/4}$ 为正的权重因子; $V = \int d\mathbf{r}$ 为重建区域的面积; δ^2 是一个正的参数,当目标函数最小化时,它保证正则化项 $F^R(\mathbf{x})$ 不为零,并能调节正则化的力度;引入 η_D 保证当 \mathbf{x} 为零向量时,参数 $F(\mathbf{x})$ 等于 1,起到归一化的作用^[18]。在(9)式中引入费用函数 $F(\mathbf{x})$ 可以看作惩罚函数的正则化参数,在开始迭代时,由于 $\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{p}$ 值较大,也就是正则参数较大,那么惩罚函数的惩罚力度就会很大;随着迭代次数的增加, $\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{p}$ 逐渐减小,也即正则参数逐渐减小,惩罚函数的惩罚力度逐渐降低,那么迭代解也就逐渐逼近真实解了。这样,原正则化问题中的正则参数的选择可以转化为数据保真度 $\|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2$ 大小的选择,这样可消除正则化参数的盲目选择给重建结果带来的影响。

3.2 应用一般可微函数的共轭梯度法求最优解

应用一般可微函数的共轭梯度法来对该逆问题进行求解^[19],即求(9)式的极小值。其本质就是利用共轭梯度法来构造迭代序列 $\{\mathbf{x}_n\}_{n>0}$,从而逼近(9)式的最优解。

当进行到第 n 步迭代时,(9)式可化为

$$C(\mathbf{x}_n) = F(\mathbf{x}_n)F_n^R(\mathbf{x}_n), \quad (11)$$

由(10)式可知

$$F_n^R(\mathbf{x}_n) = \int b_n^2(\mathbf{r}) [|\nabla \mathbf{x}_n(\mathbf{r})|^2 + \delta_n^2] d\mathbf{r} = \\ \|b_n \nabla \mathbf{x}_n\|^2 + \delta_n^2 \|b_n\|^2, \quad (12)$$

$$b_n = [|\nabla \mathbf{x}_{n-1}(\mathbf{r})|^2 + \delta_{n-1}^2]^{-1/4}. \quad (13)$$

3.2.1 x_0 的选取

由于有限角度重建问题属于不适定,可先通过

令以下函数的导数为零来求取其初值

$$M = \|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|^2, \quad (14)$$

式中 λ 一般在 $0 \sim 1$ 取值,本方法中取 $\lambda = 1$ 。

将(14)式对 \mathbf{x} 求导,并令导数等于零,可得

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{R}^*(\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{p}) + 2\lambda \mathbf{x} = 0, \quad (15)$$

式中 \mathbf{R}^* 为对 \mathbf{R} 取共轭。整理(15)式得

$$(\mathbf{R}^* \mathbf{R} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{R}^* \mathbf{p}, \quad (16)$$

则可得初值

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{R}^* \mathbf{R} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{R}^* \mathbf{p}, \quad (17)$$

这样选择是为了加快最优解的寻找速度。

定义第 n 步的迭代余量误差为

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{R}\mathbf{x}_n - \mathbf{p}, \quad (18)$$

则迭代序列 \mathbf{x}_n 可构造如下

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0, & n = 0 \\ \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} + \alpha_{n-1} \mathbf{v}_{n-1}, & n \geq 1 \end{cases} \quad (19)$$

式中 \mathbf{x}_0 为初始值, α_n 为一实常数, \mathbf{v}_n 为 \mathbf{x}_n 的某一梯度方向。因此要求出待重建图像的最优解 \mathbf{x}_n , 必须先得到 α_n 和 \mathbf{v}_n 。

3.2.2 \mathbf{v}_n 的选取

\mathbf{v}_n 可定义如下, $n=0$ 时, \mathbf{v}_0 为零向量, $n>1$ 时

$$\mathbf{v}_n = -\mathbf{g}_n + \frac{\|\mathbf{g}_n\|^2}{\|\mathbf{g}_{n-1}\|^2} \mathbf{v}_{n-1}, \quad (20)$$

式中 \mathbf{g}_n 是(11)式中 $C(\mathbf{x}_n)$ 的梯度值, \mathbf{g}_n 的推导公式如下

$$\mathbf{g}_n = \frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} F_n^R(\mathbf{x}) + F(\mathbf{x}) \frac{\partial F_n^R(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} =$$

$2\eta_D \mathbf{R}^*(\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{p}) F_n^R(\mathbf{x}) + F(\mathbf{x}) [2\nabla \cdot (b_n^2 \nabla \mathbf{x})]$, 则

$$\mathbf{g}_n = 2\eta_D \mathbf{R}^* \mathbf{r}_{n-1} F_n^R(\mathbf{x}_{n-1}) + \\ 2F(\mathbf{x}_{n-1}) [\nabla \cdot (b_n^2 \nabla \mathbf{x}_{n-1})]. \quad (21)$$

3.2.3 α_n 的选取

(19)式中 α_n 的取值须保证(11)式取得极小值,因此取(11)式关于 α_n 的一阶导数为零时的 α_n 。(11)式具体化为

$$C_n = \eta_D \|\mathbf{R}\mathbf{x}_n - \mathbf{p}\|^2 (\|b_n \nabla \mathbf{x}_n\|^2 + \delta_n^2 \|b_n\|^2) = \eta_D [\|\mathbf{R}\mathbf{v}_n\|^2 \alpha_n^2 + 2\alpha_n (\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{R}\mathbf{v}_n) + \|\mathbf{r}_{n-1}\|^2] \times \\ [\|b_n \nabla \mathbf{v}_n\|^2 \alpha_n^2 + 2\alpha_n (b_n \nabla \mathbf{x}_{n-1}, b_n \nabla \mathbf{v}_n) + \|b_n \nabla \mathbf{x}_{n-1}\|^2 + \delta_n^2 \|b_n\|^2], \quad (22)$$

对(22)式进行求导,得

$$\frac{\partial C_n}{\partial \alpha_n} = 4\eta_D \|\mathbf{R}\mathbf{v}_n\|^2 \|b_n \nabla \mathbf{v}_n\|^2 \alpha_n^3 + 6\eta_D [\|\mathbf{R}\mathbf{v}_n\|^2 (b_n \nabla \mathbf{x}_{n-1}, b_n \nabla \mathbf{v}_n) + (\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{R}\mathbf{v}_n) \|b_n \nabla \mathbf{v}_n\|^2] \alpha_n^2 + \\ 2\eta_D [\|\mathbf{R}\mathbf{v}_n\|^2 (\|b_n \nabla \mathbf{x}_{n-1}\|^2 + \delta_n^2 \|b_n\|^2) + 4(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{R}\mathbf{v}_n) (b_n \nabla \mathbf{x}_{n-1}, b_n \nabla \mathbf{v}_n) + \|\mathbf{r}_{n-1}\|^2 \|b_n \nabla \mathbf{v}_n\|^2] \alpha_n + \\ 2\eta_D [(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{K}\mathbf{v}_n) (\|b_n \nabla \mathbf{x}_{n-1}\|^2 + \delta_n^2 \|b_n\|^2) + \|\mathbf{r}_{n-1}\|^2 (b_n \nabla \mathbf{x}_{n-1}, b_n \nabla \mathbf{v}_n)]. \quad (23)$$

对(23)式求关于 α_n 的导数,并令 $\partial C_n / \partial \alpha_n = 0$ 。该方程为关于 α_n 的一元三次方程,其根的求解过程见文献[20],求出的三个根为两个复根和一个实根,该实根即为所需的解。求得了 $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_n$ 和 α_n 之后,将其代入(19)式,即可求出 \mathbf{x}_n 。经过若干次迭代后,即可得到需要的结果。

3.3 确定参数 b 和 δ^2 的关系

(11)式中的 $F^R(\mathbf{x})$ 项涉及到两个重要的参数 b 和 δ^2 ,其中 b 为正的权重因子, δ^2 为一个正的参数。当最小化目标函数时, δ^2 可保证正则化项 $F^R(\mathbf{x})$ 不为零,同时能调节正则化的力度。参数 b 和 δ^2 的选择,对正则化的结果乃至最终的重建结果都将产生很大的影响。

通过保证(9)式的凸函数性来确定 b 和 δ^2 。因为只有保证(9)式的凸性,它的唯一极小值才存在。假定(9)式的精确解为 $\mathbf{x}^{\text{exact}}$,则待求的解可以表示为

$$\mathbf{x}(\mathbf{r}) = \mathbf{x}^{\text{exact}}(\mathbf{r}) + \alpha \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad (24)$$

式中 α 为一个实值常参数, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ 为一任意方向向量。将(24)式代入(9)式,得

$$C(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})F^R(\mathbf{x}) = \eta_D \alpha^2 \|\mathbf{R}\mathbf{v}\|^2 [\|b \nabla \mathbf{x}^{\text{exact}}\|^2 + \alpha^2 \|b \nabla \mathbf{v}\|^2 + 2\alpha (b \nabla \mathbf{x}^{\text{exact}}, b \nabla \mathbf{v}) + \delta^2 \|b\|^2], \quad (25)$$

令

$$\begin{aligned} A &= \|b \nabla \mathbf{v}\|^2, \\ B &= (b \nabla \mathbf{x}^{\text{exact}}, b \nabla \mathbf{v}), \\ C &= \|b \nabla \mathbf{x}^{\text{exact}}\|^2 + \delta^2 \|b\|^2. \end{aligned}$$

则(25)式可以表示为

$$C(\mathbf{x}) = \eta_D \|\mathbf{R}\mathbf{v}\|^2 \alpha^2 (A \alpha^2 + 2B \alpha + C). \quad (26)$$

(26)式对 α 求二阶导数,得

$$\frac{\partial^2 C(\mathbf{x})}{\partial \alpha^2} = 2\eta_D \|\mathbf{R}\mathbf{v}\|^2 (6A \alpha^2 + 6B \alpha + C), \quad (27)$$

(9)式为凸函数的充分必要条件是(27)式非负。由于 $\eta_D \|\mathbf{R}\mathbf{v}\|^2 > 0$,故只需 $f(\alpha) = 6A \alpha^2 + 6B \alpha + C = (\alpha + \frac{B}{2A})^2 - \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{6A} \geq 0$ 时,(27)式非负。此时,可推得

$$\frac{B^2}{AC} = \frac{[(b \nabla \mathbf{x}^{\text{exact}}, b \nabla \mathbf{v})]^2}{(\|b \nabla \mathbf{x}^{\text{exact}}\|^2 + \delta^2 \|b\|^2) \|b \nabla \mathbf{v}\|^2} \leq \frac{2}{3}. \quad (28)$$

考虑到施瓦茨不等式,可得

$$\frac{[(b \nabla \mathbf{x}^{\text{exact}}, b \nabla \mathbf{v})]^2}{\|b \nabla \mathbf{x}^{\text{exact}}\|^2 \|b \nabla \mathbf{v}\|^2} \leq 1, \quad (29)$$

显然可以得到

$$\delta^2 \geq \frac{1}{2} \frac{\|b \nabla \mathbf{x}^{\text{exact}}\|^2}{\|b\|^2}, \quad (30)$$

为(28)式成立的充分条件,也即(9)式为凸函数的充分条件。注意(30)式不是(28)式的必要条件。

(30)式通过保证(9)式的凸性,给出了 b 和 δ^2 的关系。在迭代过程中, b 和 δ^2 可能发生改变,但只要保证(30)式成立,(9)式的凸性就不会被破坏,从而保证了其最优解的存在。在实际编程过程中,对(30)式取等号。

4 仿真实验及评价

以经典的 Shepp-Logan 头模型作为研究对象,对模拟的投影数据在有噪和无噪条件下,用本文介绍的算法和 ART 算法^[21,22]分别进行了重建。并对这两种算法的重建结果进行了评价。

4.1 重建结果

在利用模拟的投影数据进行重建的过程中,主要参数选取如下:增强器直径长度为 140 mm,射线源到物体转轴中心距离为 400 mm,射线源到探测器中心距离为 1000 mm。分别选取间隔为 1° 的 20, 30, 40, 50 和 60 个扫描角度下的投影数据进行重建,待重建图像分辨率取为 64 pixel \times 64 pixel。

图 1 和图 2 所示为无噪情况下两种算法的图像重建结果;图 3 和图 4 所示为在均值为 0,方差为 1000 的高斯噪声存在的情况下两种算法的重建结果。通过对相同扫描角度下的投影数据重建出的图像进行对比,可以看出,本文的算法无论是在有噪还是在无噪的情况下,均比 ART 算法在重建质量上有了较明显的提高。

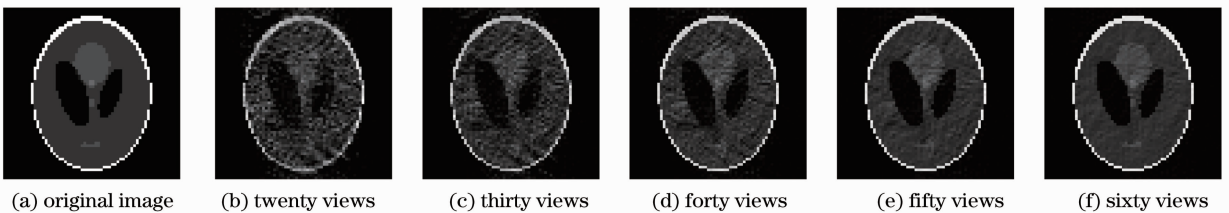


图 1 本文算法在无噪情况下的重建结果

Fig. 1 Reconstructed image for the proposed algorithm under ideal condition

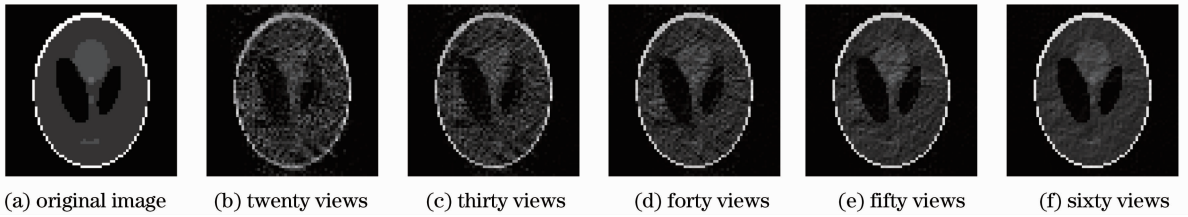


图 2 ART 算法在无噪情况下的重建结果

Fig. 2 Reconstructed image for the ART algorithm under ideal condition

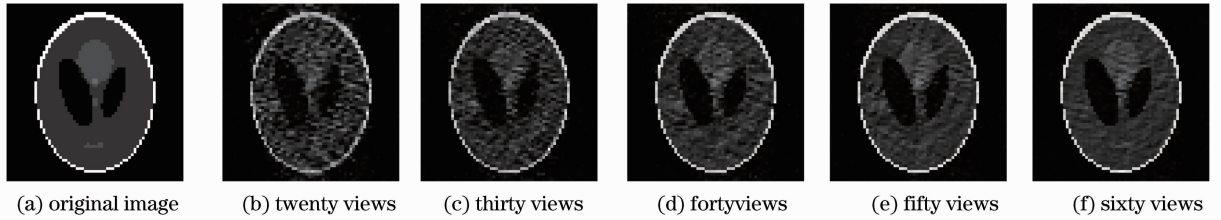


图 3 本文算法在有噪情况下的重建结果

Fig. 3 Reconstructed image for the proposed algorithm under noisy condition

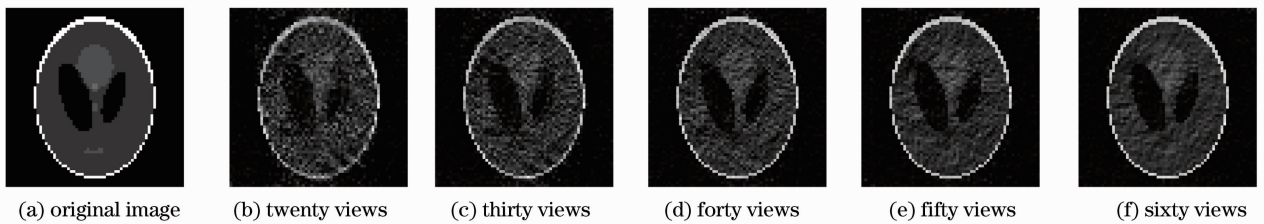


图 4 ART 算法在有噪情况下的重建结果

Fig. 4 Reconstructed image for the ART algorithm under noisy condition

4.2 重建结果评价

进行仿真实验时,可以使用均方误差来对重建图像的质量进行评价。均方误差(MSE) E_{MS} 的定义如下

$$E_{MS} = \frac{\sum_i \sum_j (\tilde{x}_{ij} - x_{ij})^2}{\sum_i \sum_j x_{ij}^2}, \quad (31)$$

式中 x_{ij} 为真实图像某点的灰度值, \tilde{x}_{ij} 为重建图像中对应点的灰度值。需要说明的是,均方误差评价标准只能在模拟实验中应用。当使用真实投影数据进行重建时,由于 x_{ij} 未知,该误差函数不能应用,需要采用其他的评价标准。利用(31)式所示的误差函数进行图像质量评价,无噪和有噪情况下的结果分别如表 1 和表 2 所示。从表中可以看出,无论是有噪还是无噪情况下,本文的算法均优于 ART 算法。

表 1 无噪情况下各角度重建结果的 MSE 值比较

Table 1 Comparison of MSE value under ideal condition

Number of projections	MSE (proposed algorithm)	MSE(ART)
20	0.1757	0.2119
30	0.0939	0.1265
40	0.0391	0.0645
50	0.0168	0.0328
60	0.0082	0.0150

表 2 在有噪情况下各角度重建结果的 MSE 值比较

Table 2 Comparison of MSE value under noisy condition

Number of projections	MSE (proposed algorithm)	MSE(ART)
20	0.1972	0.2208
30	0.1165	0.1450
40	0.0551	0.0940
50	0.0365	0.0789
60	0.0272	0.0517

5 结 论

引入了一种新的基于乘性正则化的图像重建迭代算法,该方法将 TV 函数作为最小化函数的一个因子,并使目标函数满足凸函数性质,利用一般可微函数的共轭梯度法对其进行迭代求解,直至求得所需要的最优解。该算法在具有 TV 方法优点的同时,能够在迭代过程中自适应地调整正则化参数,克服了最小化函数的权值参数必须通过大量的实验才能被确定的缺陷。实验结果表明,该方法能够较好地应用于有限角度 CT 重建。

参 考 文 献

- 1 Gao Feng, Niu Hanben. Image reconstruction algorithm in optical CT [J]. *Acta Optica Sinica*, 1996, **16**(4): 494~499
高峰,牛憨笨. 光学 CT 中的图像重建算法[J]. 光学学报, 1996, **16**(4): 494~499
- 2 R. Rangayyan, A. P. Dhawan, R. Gordon. Algorithms for limited-view computed tomography: an annotated bibliography and a challenge [J]. *Appl. Opt.*, 1985, **24**(23): 4000~4012
- 3 D. Verhoeven. Limited-data computed tomography algorithms for the physical sciences [J]. *Appl. Opt.*, 1993, **32**(20): 3736~3754
- 4 M. Nassi, W. R. Brody, B. P. Medoff *et al.*. Iterative reconstruction reprojection: an algorithm for limited data cardiac-computed tomography [J]. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 1982, **29**(5): 333~341
- 5 A. H. Delaney, Y. Bresler. Globally convergent edge preserving regularized reconstruction: an application to limited-angle tomography [J]. *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 1998, **7**(2): 204~221
- 6 F. Natterer. *Mathematical Methods in Image Reconstruction* [M]. Philadelphia: SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, 2001
- 7 S. Siltanen, V. Kolehmainen, S. Järvenpää *et al.*. Statistical inversion for medical X-ray tomography with few radiographs I: general theory [J]. *Phys. Med. Biol.*, 2003, **48**(10): 1437~1463
- 8 E. Candes, J. Emmanuel. Signal recovery from random projections [C]. *SPIE*, 2005, **5678**: 76~86
- 9 M. Rantala, S. Vänskä, S. Järvenpää *et al.*. Wavelet-based reconstruction for limited angle X-ray tomography [J]. *IEEE Trans. on Med. Imag.*, 2006, **25**(2): 210~217
- 10 Y. L. Hstau. A gradually unmasking method for limited data tomography [C]. 4th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro, 2007. 820~823
- 11 G. Herman, L. Meyer. Algebraic reconstruction can be made computationally efficient [J]. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 1993, **12**(3): 600~609
- 12 Yang Diwu, Xing Da, Wang Yi *et al.*. Limited-view scanning photoacoustic imaging based on algebraic reconstruction techniques [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(6): 772~776
杨迪武,邢达,王毅等. 基于代数重建算法的有限角度扫描的光声成像[J]. 光学学报, 2005, **25**(6): 772~776
- 13 Yao Hongbing, Ding Guilin, Zhou Jun *et al.*. Research on projection sampling in reconstruction of optical computerized tomography with limited angle [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(9): 1354~1357
姚红兵,丁桂林,周骏等. 有限角光学计算机层析重建中的投影采样研究[J]. 光学学报, 2006, **26**(9): 1354~1357
- 14 V. Kolehmainen, S. Siltanen, S. Järvenpää *et al.*. Statistical inversion for medical X-ray tomography with few radiographs II: application to dental radiology [J]. *Phys. Med. Biol.*, 2003, **48**(10): 1465~1490
- 15 Meng Jing, Wang Jiajun, Huang Xianwu *et al.*. Multi-criterion reconstruction method for optical tomography [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(9): 1340~1344
孟静,王加俊,黄贤武等. 一种光学层析图像的多准则重建方法[J]. 光学学报, 2006, **26**(9): 1340~1344
- 16 M. Persson, D. Bone, H. Elmqvist. Total variation norm for three dimensional iterative reconstruction in limited view angle tomography [J]. *Phys. Med. Biol.*, 2001, **46**(3): 853~866
- 17 Zhuang Tiange. *Computed Tomography Theory and Algorithm* [M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1992
庄天戈. CT 原理与算法[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1992
- 18 P. M. van den Berg, A. L. van Broekhoven, A. Abubakar. Extended contrast source inversion [J]. *Inverse Probl.*, 1999, **5**(3): 1325~1344
- 19 J. R. Shewchuk. *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain Edition* [M]. School of Computer Science Carnegie Mellon University Pittsburgh, 1994
- 20 F. Klein. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint* [M]. Shu Xiangqin *et al.* Transl. Wuhan: Hubei Education Press, 1989
菲利克斯. 克莱因. 高观点下的初等数学[M]. 舒湘芹等译. 武汉: 湖北教育出版社, 1989
- 21 A. H. Andersen. Algebraic reconstruction in CT from limited views [J]. *IEEE Trans. Med. Images*, 1989, **8**(1): 50~55
- 22 C. Popa, R. Z. Kaczmarz. Extended algorithm for tomographic image reconstruction from limited data [J]. *Math. Comput. Simulation*, 2004, **65**(6): 579~598