

文章编号: 0253-2239(2010)04-1184-04

J-C 模型腔场谱与光场量子比特的探测

李悦科 张桂明 高云峰

(聊城大学传媒技术学院, 山东 聊城 252059)

摘要 研究了 Jaynes-Cummings 模型的腔场谱的量子特性。利用数值计算结果, 绘出了初始光场处于 $|0\rangle, |1\rangle$ 光子数态叠加态时的光谱结构。讨论了光谱结构与初始场量子比特之间的联系。研究表明, Jaynes-Cummings 模型腔场谱结构特征能够反映量子比特中几率幅的变化, 且二者存在一一对应关系, 因此可以用光谱结构测定量子比特几率幅的数值; 但是, 从腔场谱结构特征中不能获取量子相位的信息, 不能探测量子比特相位的数值。这反映出用腔场谱对光场量子比特探测的有效性和局限性。

关键词 量子光学; 量子比特; 探测; Jaynes-Cummings 模型; 腔场谱

中图分类号 O431.2 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103004.1184

Cavity Field Spectrum of Jaynes-Cummings Model and Measurement of Field Qubit

Li Yueke Zhang Guiming Gao Yunfeng

(School of Media and Communications Technology, Liaocheng University, Liaocheng, Shandong 252059, China)

Abstract The cavity field spectrum of the Jaynes-Cummings model is investigated. The results for the initial fields in superposition state of zero and one photon Fock states (a qubit of cavity field) are presented. The relation of the spectral structure and the initial field qubit is analyzed. The result shows that the influence of probability amplitude of the initial field qubit on the spectral structure is sensitive with one-to-one correspondence between them. No information about the quantum phase of the qubit can be gained from the cavity field spectrum.

Key words quantum optics; qubit; measurement; Jaynes-Cummings model; cavity field spectrum

1 引言

光谱是人类获取光场与物质之间相互作用信息的重要工具。研究高 Q 腔内二能级原子与量子化光场之间的相互作用规律是量子光学领域的一项重要任务。Jaynes-Cummings(J-C)模型^[1]是描述单个二能级原子与单模量子化光场相互作用规律的最简单模型, 已经在实验上得以实现^[2]。自 Eberly^[3]提出物理谱以来, 人们对各种 J-C 模型的辐射谱^[4~9]和腔场谱^[10~16]进行了比较深入的研究, 并取得了丰硕的成果, 获取了原子与量子化光场相互作用系统的许多非经典特性, 揭示了光场与原子相互作用系统的动力学行为特征, 这对人们深入理解物质的本质有着极其重要的意义。原子辐射谱和腔场谱分别从不同的侧面反映着原子与光场相互作用的量子特

性。由此而得到的真空场拉比劈裂现象已经被实验所证实^[17,18]。在单模高 Q 腔内制备一个处于 $|0\rangle, |1\rangle$ 光子数态相干叠加态的量子化光场, 即制备一个量子比特, 这在量子信息处理过程中具有重要的应用^[19~21]。如果这时将一个二能级原子注入腔内, 并使其与腔场发生共振相互作用, 即形成 J-C 模型系统。研究此模型的腔场谱, 探索初始光场量子比特的改变与系统腔场结构的对应关系, 可以为利用 J-C 模型测量光场量子比特提供一种可能的方案。到目前为止, 尚未见到对这一问题进行研究的报道, 本文对这种量子比特探测方案进行探讨。

2 模型与理论推导

在高 Q 腔中嵌制一个二能级原子, 单模辐射场

收稿日期: 2009-01-13; 收到修改稿日期: 2009-06-10

基金项目: 国家自然科学基金(10574060)和山东省自然科学基金(ZR2009AM019)资助课题。

作者简介: 李悦科(1966—), 男, 副教授, 主要从事量子光学领域方面的研究。E-mail: liyueke@luc.edu.cn

注入后,构成标准 J-C 模型系统,原子与光场通过单光子共振发生相互作用。在旋波近似条件下,系统的等效哈密顿量为^[22] ($\hbar=1$)

$$H = \omega_0 \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \omega_a \sigma_z + g(a \sigma^+ + a^+ \sigma), \quad (1)$$

式中 a, a^+ 分别为光子的湮没和产生算符, $\sigma^+, \sigma, \sigma_z$ 分别为原子的赝自旋算符, g 是原子与腔场间的耦合常数, ω_0 为腔场光子的频率, ω_a 为原子跃迁频率。

(1) 式的本征方程为

$$H |\varphi_i^n\rangle = E_i^n |\varphi_i^n\rangle, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

将 H 的本征函数 $|\varphi_i^n\rangle$ 按二能级原子与光场相互作用系统的两个本征基矢 $|\varphi_i^n\rangle$ 展开, 即

$$|\varphi_i^n\rangle = \sum_{j=1}^2 C_{ij}^n |\varphi_j^n\rangle, \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

式中 $|\varphi_1^n\rangle = |+, n\rangle, |\varphi_2^n\rangle = |-, n+1\rangle$ 。右边的两个量子数 $+, -$ 和 n 分别表示原子所处的能级及腔场中的光子数。把(3)式代入(2)式可得

$$\sum_{j=1}^2 (\langle \varphi_i^n | H | \varphi_j^n \rangle - E_i^n \delta_{ij}) C_{ij}^n = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

由(4)式可求出与(1)式对应的本征能量 E_i^n 和本征函数 C_{ij}^n , 其结果为

$$E_{1,2}^n = \omega_0 g(n+1) \pm g \sqrt{n+1}, \quad (5a)$$

$$C_{11}^n = C_{12}^n = -C_{21}^n = C_{22}^n = 1/\sqrt{2}, \quad n \geq 0 \quad (5b)$$

$$C_{21}^{-1} = 0, \quad C_{22}^{-1} = 1, \quad n = -1 \quad (5c)$$

按物理谱的定义, 该系统的腔场谱可按式计算^[3]:

$$S_n(\omega) = 2\Gamma \int_0^T dt' \exp[-(\Gamma - i\omega)(T - t')] \times \int_0^T dt \exp[-(\Gamma + i\omega)(T - t)] \times \langle \varphi(0) | a^+(t') a(t) | \varphi(0) \rangle, \quad (6)$$

式中 Γ 为谱仪带宽, T 为测量时间, $|\varphi(0)\rangle$ 为系统的初态。若初始时刻原子处于激发态, 而光场处于叠加态, 即

$$|\varphi(0)\rangle = \sum_{n=0}^1 q_n |+, n\rangle.$$

在共振条件下 ($\omega_a = \omega_0$), 经繁琐运算可得

$$S(\omega) = 2\Gamma \sum_{n=0}^1 P(n) F_n(\omega), \quad (7a)$$

$$F_n(\omega) = \sum_{r=1}^2 \left| \sum_{k=1}^2 G_{kr} Z_{kr} \right|^2, \quad (7b)$$

$$G_{kr}^n = \sum_{m=1}^2 C_{k1}^n C_{km}^n C_{m1}^{n-1} b_m^n, \quad (7c)$$

$$Z_{kr}^n = \frac{\exp\{i[\omega - (E_k^n - E_r^{n-1})T]\} - \exp(-\Gamma T)}{\Gamma + i[\omega - (E_k^n - E_r^{n-1})]}, \quad (7d)$$

$$b_1^n = \sqrt{n}, \quad b_2^n = \sqrt{n-1}, \quad (7e)$$

式中 $P(n) = q_n^* q_n$ 为初态光场的光子数分布。

文中取初始场为真空态 $|0\rangle$ 和单光子数态 $|1\rangle$ 的相干叠加态, 即量子比特

$$|\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+, 0\rangle + \exp(i\varphi) \sin \frac{\theta}{2} |+, 1\rangle, \quad (8)$$

式中 $0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi, i$ 为虚数单位。此时

$$P(0) = \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|^2, \quad (9a)$$

$$P(1) = \left| \exp(i\varphi) \sin \frac{\theta}{2} \right|^2 = \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|^2. \quad (9b)$$

依据(5), (7)和(9)式可以计算(1)式对应的腔场谱表达式为

$$S(\omega) = 2\Gamma \sin^2 \frac{\theta}{2} (|C - D|^2 + |E - F|^2) + 2\Gamma \cos^2 \frac{\theta}{2} |A - B|^2, \quad (10)$$

式中

$$A = \frac{\exp[iT(x-1)] - \exp[-\Gamma T]}{2\Gamma + 2i(x-1)},$$

$$B = \frac{\exp[iT(x+1)] - \exp[-\Gamma T]}{2\Gamma + 2i(x+1)},$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\exp[iT(x-1-\sqrt{2})] - \exp[-\Gamma T]}{2\Gamma + 2i(x-1-\sqrt{2})},$$

$$D = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\exp[iT(x-1+\sqrt{2})] - \exp[-\Gamma T]}{2\Gamma + 2i(x-1+\sqrt{2})},$$

$$E = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\exp[iT(x+1-\sqrt{2})] - \exp[-\Gamma T]}{2\Gamma + 2i(x+1-\sqrt{2})},$$

$$F = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\exp[iT(x+1+\sqrt{2})] - \exp[-\Gamma T]}{2\Gamma + 2i(x+1+\sqrt{2})},$$

式中 $x = (\omega - \omega_0)/g$ 。

(10)式的数值计算结果如图 1 所示。图中给出了 θ 从 0 到 π 取不同数值时的腔场谱结构。由于初始场量子比特的几率幅等于 $\cos \theta$, 该图可得到量子比特几率幅与腔场谱结构之间的对应关系。

3 结果与讨论

3.1 只能获取几率幅 θ 的量子信息

由(10)式可知, 腔场谱结构 $S(\omega)$ 与量子比特几率幅 θ 之间有着密切的关系。图 1 的数值计算结果

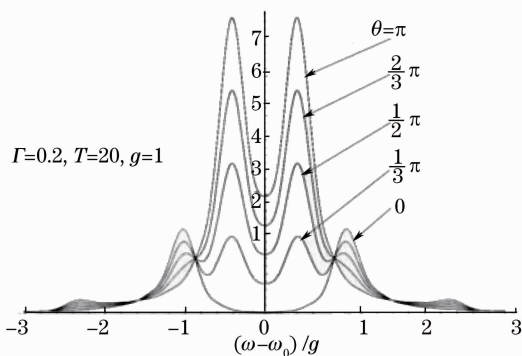


图 1 θ 取不同数值时的腔场谱

Fig.1 Cavity field spectra at different θ

也表明,谱结构随着几率幅 θ 的变化而变化,从谱结构中能够获取几率幅 θ 的量子信息。

由于 $|\exp(i\varphi)|^2=1$,所以(10)式腔场谱结构表达式 $S(\omega)$ 中不会出现量子相位 φ 因子。故腔场谱结构中不能获取量子相位 φ 的量子信息。

3.2 峰位相对固定,拉比劈裂现象明显

从(10)式可知,腔场谱峰位只可取在 ± 1 , $\pm(\sqrt{2}\pm 1)$ 共计六个位置。实际数值计算表明,随着量子比特几率幅 θ 从 0 到 π 的变化,腔场谱呈现 2-4-2 的结构变化,真空场拉比劈裂现象明显。峰位固定在 ± 1 和 $\pm(\sqrt{2}-1)$ 处,在 $\pm(\sqrt{2}+1)$ 处峰较弱,峰位不明显,如图 1 所示。

3.3 存在强度不随几率幅 θ 变化的频率点

从(10)式发现,当

$$|A-B|^2 = |C-D|^2 + |E-F|^2, \quad (11)$$

(10)式简化为 $S(\omega) = 2\Gamma|A-B|^2$,该频率时的腔场谱强度与几率幅 θ 无关,恒定不变。

通过数值求解(11)式可以得知,这些特殊点的坐标 (x, s) 数值为 $(\pm 0.8669, 1.388)$ 和 $(\pm 1.587, 0.3284)$ 。

图 1 的数值计算结果也充分证实了这一结论。这四个强度只与频率有关,而与几率幅 θ 无关的特殊点,如果恰当利用其强度不随 θ 改变而改变的量子特性,可以用于腔场谱结构的定位,这在具体探测上有很重要的应用价值,需要进一步讨论。

3.4 腔场谱对量子比特的探测

从图 1 可知,随着几率幅 θ 从 0 到 π 的连续变化,腔场谱结构也相应的发生连续的改变, $\theta=0, \pi$ 分别对应量子比特的纯态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$; 在 $0 < \theta < \pi$ 时,对应任意叠加态。 $\theta=0$ 时,呈现真空场拉比劈裂现象,峰位在 ± 1 处,随着 θ 的增加,该处两峰高逐渐减弱;在 $\pm(\sqrt{2}-1)$ 处两峰从无到有,且逐渐增

强; $\theta=\pi$ 时, ± 1 处两峰消失, $\pm(\sqrt{2}-1)$ 处两峰达到最强;当 $\pi/6 < \theta < 2\pi/3$ 时,腔场谱表现出明显的四峰结构。计算(10)式得知,当 $\theta = 0.9658\pi/3 \approx \pi/3$ 时,四峰等高。

标准 J-C 模型腔场谱结构与量子比特几率幅 θ 之间存在一一对应的关系,因此,理论上可以通过对腔场谱结构的探测来确定量子比特几率幅的数值。

4 结 论

在单模高 Q 腔内制备一个处于 $|0\rangle, |1\rangle$ 光子数态相干叠加态的光场量子比特,并将一个与场模共振的二能级原子注入腔内,可以通过测定系统腔场谱结构的信息,实现对量子比特的部分探测,这样能够比较准确地获取量子比特中的几率幅数值,这对量子比特状态的确定有着重要的意义。但由于腔场谱结构与量子比特中相位 φ 无关,腔场谱用于光场量子比特探测仍有一定的局限性。

参 考 文 献

- 1 E. T. Jaynes, F. W. Cummings. Comparison of quantum and semi classical radiation theories with application to the beam maser [J]. *Proc. IEEE*, 1963, **51**: 89~109
- 2 D. Meschede, H. Walther, G. Muller. One-atom maser [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **54**(6): 551~554
- 3 J. H. Eberly, K. Wodkiewicz. The time-dependent physical spectrum of light [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(9): 1252~1261
- 4 Yang Zhiyong. Emission spectrum for a pair of identical two-level atoms interacting with three mode cavity fields resonantly through 6 photon process [J]. *Acta Optica Sinica*, 1997, **17**(5): 513~519
杨志勇. 两等同双能级原子与三模腔场六光子共振相互作用辐射谱研究[J]. *光学学报*, 1997, **17**(5): 513~519
- 5 Feng Jian, Song Tongqiang, Wang Wenzheng *et al.*. Raman interaction of a pair of two-level atoms with two-mode cavity fields[J]. *Acta Optica Sinica*, 1994, **14**(12): 1272~1276
冯 健, 宋同强, 王文正 等. 两个双能级原子与双模腔场的拉曼相互作用[J]. *光学学报*, 1994, **14**(12): 1272~1276
- 6 Feng Jian, Song Tongqiang, Wang Wenzheng *et al.*. Emission spectra of two atoms coupled by dipole-dipole force in two-mode cavity fields [J]. *Acta Physica Sinica*, 1994, **43**(12): 1966~1972
冯 健, 宋同强, 王文正 等. 双模腔场中两偶极相互作用原子的辐射谱[J]. *物理学报*, 1994, **43**(12): 1966~1972
- 7 Luo Zhenfei, Xu Zhizhan, Xu Lei. Raman interaction of a pair of two-level atoms with a radiation field[J]. *Acta Physica Sinica*, 1992, **41**(12): 1950~1954
罗振飞, 徐至展, 徐 磊. 两个双能级原子与辐射场的喇曼相互作用 [J]. *物理学报*, 1992, **41**(12): 1950~1954
- 8 Mingdi Du, Maofa Fang, Xiang Liu. Sudden birth of entanglement between two atoms in a double JC model[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2009, **7**(5): 443~445
- 9 Zhang Guoshun, Cao Zhuoliang. Emission spectrum of Λ -type three-level atom with two-mode entangled coherent states cavity fields[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(8): 1611~1617

- 章国顺, 曹卓良. 纠缠相干态光场驱动下 Δ -型三能级原子的辐射谱[J]. 光学学报, 2008, **28**(8): 1611~1617
- 10 Gao Yunfeng, Feng Jian, Shi Shuren. Cavity field spectra of the intensity-dependent two-mode Jaynes-Cummings model [J]. *Internat. J. Theor. Phys.*, 2002, **41**(5): 867~875
- 11 Gao Yunfeng, Feng Jian, Song Tongqiang. Cavity field spectra of two-atom in a cavity with two-mode radiation field [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(9): 1194~1200
高云峰, 冯 健, 宋同强. “两原子-双模腔场”系统的腔场谱 [J]. 光学学报, 2000, **20**(9): 1194~1200
- 12 T. Nasreen, M. S. K. Razmi. Atomic emission and cavity field spectra for a two-photon Jaynes-Cummings model in the presence of the stark shift [J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1993, **10**(7): 1292~1300
- 13 Li Yueke, Zhang Guiming, Gao Yunfeng. Cavity-field spectra of two nonidentical atoms interacting with single-mode quantized radiation field [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(8): 1131~1135
李悦科, 张桂明, 高云峰. 非等同两原子与光场相互作用系统的腔场谱 [J]. 光学学报, 2005, **25**(8): 1131~1135
- 14 Zhou Qingchun, Zhu Shining, Ming Naiben. Emission and cavity-field spectra in a cascade three-level system interacting with a single-mode field [J]. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 2005, **38**(23): 4309~4320
- 15 Gao Yunfeng, Feng Jian, Shi Shuren. Cavity field spectra of intensity-dependent two-mode Jaynes-Cumming model in the presence of Pair-Coherent states [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2001, **30**(11): 1303~1306
高云峰, 冯 健, 史舒人. 双相干态光场与原子依赖强度耦合过程的腔场谱 [J]. 光子学报, 2001, **30**(11): 1303~1306
- 16 Li Yueke, Zhang Guiming, Gao Yunfeng. Cavity field spectrum of an atom interacting with two-mode field through raman process in Kerr medium [J]. *J. At. Mol. Phys.*, 2006, **23**(3): 522~526
李悦科, 张桂明, 高云峰. Kerr 效应对原子与双模场 Raman 相互作用模型腔场谱的影响 [J]. 原子与分子物理学报, 2006, **23**(3): 522~526
- 17 G. Rempe, H. Walther. Observation of quantum collapse and revival in an one-atom maser [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(4): 353~356
- 18 R. J. Tompson, G. Rempe, H. J. Kimble. Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **68**(8): 1132~1135
- 19 Yang Xiong, Tong Zhaoyang, Kuang Leman. Transfer of quantum information via the two-photon process [J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, **57**(3): 1689~1692
杨 雄, 童朝阳, 匡乐满. 利用双光子过程实现量子信息转移 [J]. 物理学报, 2008, **57**(3): 1689~1692
- 20 Liao Jinkun, Hou Wenting, Liu Yongzhi *et al.*. Gate operations of qubit and conformal mapping [J]. *J. University of Electronic Science and Technology of China*, 2007, **36**(1): 132,133,149
廖进昆, 侯文婷, 刘永智 等. 量子比特的门操作与共形映照 [J]. 电子科技大学学报, 2007, **36**(1): 132,133,149
- 21 Yu Yafei, Zhang Zhiming. Analysis on unsecurity of quantum secret sharing based on smolin bound entangled states [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(3): 556~559
於亚飞, 张智明. 束缚纠缠态量子秘密共享的不安全性分析 [J]. 光学学报, 2008, **28**(3): 556~559
- 22 Li Fuli, Gao Shaoyan, Zhao Yongtao. Atomic emission and cavity field spectra of the Jaynes-Cummings model [J]. *Chinese Phys.*, 2003, **12**(8): 872~878