

文章编号: 0253-2239(2010)03-0696-06

# 任意折射率的三维离散空间光线追迹方法研究

冯定华 潘 沙 田正雨 李 桦

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要** 介绍了 Runge-Kutta 光线追迹方法, 并以此作为任意折射率介质中光线追迹基本手段; 针对具有折射率任意分布性质并且离散的三维流场空间, 建立了流场空间任意点的折射率和折射率梯度计算方法; 在追迹过程中, 提出了追迹步长根据当地折射率梯度和网格几何尺寸自适应调节的思想和方法, 用于提高追迹的精度和效率。结果表明, 建立的光线追迹方法适用于三维离散空间折射率任意分布的光线追迹, 具有较高的精度和效率。

**关键词** 几何光学; 光线追迹; 步长自适应; 任意折射率; 梯度计算

中图分类号 O435, O354 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103003.0696

## Research on Ray Tracing Method in 3D Discrete Space with Discretionary Refraction Index

Feng Dinghua Pan Sha Tian Zhengyu Li Hua

(College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

**Abstract** The Runge-Kutta ray tracing method is introduced firstly, which is used as a basic ray tracing method for the medium of the discretionary refraction index distribution. Then towards the three-dimensional fluid field with the characteristic of discrete refraction index distribution, a numerical computation method of any point's refraction index and gradient is proposed. During the process of ray tracing, an idea and method that tracing step distance is self-adaptive according to local refraction index gradient and grid geometry scale are carried out, which can improve the tracing precision and efficiency. The results show that the method has high precision and efficiency for the ray tracing of three-dimensional space with the discrete refraction index distribution.

**Key words** geometrical optics; ray tracing; step self-adaptive; discretionary refraction index; gradient calculation

### 1 引 言

高速流场由于存在激波、边界层/剪切层和湍流等复杂结构, 其流场介质密度不均匀且无规律性, 因此折射率也必然是任意非均匀的, 无法用解析式表示流场的折射率分布。计算流体力学所计算网格点或者网格单元中心点的密度(折射率)代表了该点处介质的密度(折射率), 所有网格点信息的集合则描述了整个流场的折射率分布, 这是对无规则非均匀折射率场的一种描述方法<sup>[1]</sup>。

目前对折射率分布规律已知的介质进行光线追迹的研究已经较为普遍<sup>[2~5]</sup>, 并且得到了广泛的应用<sup>[6,7]</sup>, 但是针对任意无规则折射率分布介质的研究则相对较少<sup>[8,9]</sup>。这些研究的基本思想是将每个网格单元视为等折射率单元, 以两个格子之间的界面作为折射面, 根据 Snell 折射定律进行光线追迹。然而在实际情况下, 计算高速流场所采用的网格在大部分情况下是非均匀的, 网格尺寸相差较大, 而且存在激波等折射率变化剧烈的区域, 不能简单认为

收稿日期: 2009-03-23; 收到修改稿日期: 2009-05-27

基金项目: 国防科技大学优秀研究生创新项目(B080103)资助课题。

作者简介: 冯定华(1981—), 男, 博士研究生, 主要从事计算流体力学与应用、气动光学等方面的研究。

E-mail: fdhua2000@163.com

导师简介: 李 桦(1962—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事计算流体力学及应用、高超声速空气动力学等方面的研究。E-mail: lihuakd@tom.com

网格单元内折射率处处相等,而且以一个网格单元作为一次追迹步长也不合理。

本文基于三维空间离散网格,网格节点介质折射率已知,通过实时计算光传播路径上所需各点的折射率和折射率梯度,采用 Runge-Kutta 法实现光线追迹。在追迹过程中,每一步追迹的起点和终点不一定在网格点或者网格单元分界面上,并且追迹步长根据当地折射率梯度和网格尺寸自适应调节,以提高追迹的精度和效率。

## 2 Runge-Kutta 光线追迹法

下式描述了折射率任意分布介质中的光线传播,是研究梯度折射率介质光线传播的基本方程之一:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dr}{ds} \right) = \nabla n, \quad (1)$$

式中  $s$  为光线传播路径上的弧长,  $r$  为光线矢径,  $n$  为折射率,  $\nabla n$  为折射率梯度。

该方程在大多数情况下是难以求解的,仅对等折射率面为平面、球面和圆柱面等比较特殊的形式有解析解。对于任意非均匀折射率介质中的光线传播路径,基本上没有解析解,一般采用数值方法进行求解。由于 Runge-Kutta 法<sup>[3]</sup>在达到相同精度的情况下,花费的运算量较少,因此本文选用 Runge-Kutta 法作为基本光线追迹手段。

对(1)式,令光线矢量  $T_{ray} = ndr/ds = dr/dt$ , 式中  $dt = ds/n$  是一个引入的参量,则光线传播方程可写为

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla n^2, \quad (2)$$

式中有 3 个分量,可用三元一维数列解得,记

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = n \begin{bmatrix} dx/ds \\ dy/ds \\ dz/ds \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \partial n^2 / \partial x \\ \partial n^2 / \partial y \\ \partial n^2 / \partial z \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}$  为光线传播路径上的全坐标,  $\mathbf{T}$  为光线矢量分量,  $\mathbf{D}$  为(2)式右端项。经过推导可得 Runge-Kutta 法计算公式如下:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{m+1} = \mathbf{R}_m + \Delta t \left[ \mathbf{T}_m + \frac{1}{6} (\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) \right] \\ \mathbf{T}_{m+1} = \mathbf{T}_m + \frac{1}{6} (\mathbf{A} + 4\mathbf{B} + \mathbf{C}) \end{cases}, \quad (3)$$

这里矩阵

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \Delta t \mathbf{D} (\mathbf{R}_m) \\ \mathbf{B} = \Delta t \mathbf{D} \left( \mathbf{R}_m + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{T}_m + \frac{\Delta t}{8} \mathbf{A} \right) \\ \mathbf{C} = \Delta t \mathbf{D} \left( \mathbf{R}_m + \Delta t \mathbf{T}_m + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} \right) \end{cases}, \quad (4)$$

式中  $\Delta t = \Delta s/n$ ,  $\Delta s$  为空间追迹步长。当已知光线初始条件  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0$  时,可以逐次进行追迹,在每一步追迹完成后,需要计算该步末端点的折射率和折射率梯度,作为下一次追迹的起始条件,依此往后,直到完成整个光线追迹过程。

## 3 离散空间折射率及其梯度求解

采用 Runge-Kutta 法对折射率空间任意离散分布的流场介质进行光线追迹时,其追迹精度除了 Runge-Kutta 法本身精度的限制外,还受到 3 个因素的影响:1)追迹路径上的折射率的计算精度;2)追迹路径上的折射率梯度的计算精度;3)追迹步长的大小。下面将分别对这 3 个因素展开讨论。

### 3.1 空间任意点折射率计算

在离散空间内,已知网格节点上的折射率,需要求解其他空间任意点的折射率,通常采用插值方法。常用的插值方法有距离加权平均插值方法、补丁法、双三次样条插值<sup>[10]</sup>和三线性插值法<sup>[11]</sup>,此处选用精度和稳定性均较好的距离加权平均插值方法。

在三维离散空间内,如图 1 所示网格单元,已知单元的八个顶点的折射率为  $n_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ ,要求解单元内部任一点  $P(x, y, z)$  的折射率  $n_P$ 。设点  $P$  到八个点  $(x_i, y_i, z_i)$  的距离为  $d_i$ , 距离加权平均插值方法可表示为

$$n_P = \frac{\sum_{i=1}^8 (n_i \prod_{j=1, j \neq i}^8 d_j)}{\sum_{i=1}^8 \prod_{j=1, j \neq i}^8 d_j}$$

$$d_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}. \quad (5)$$

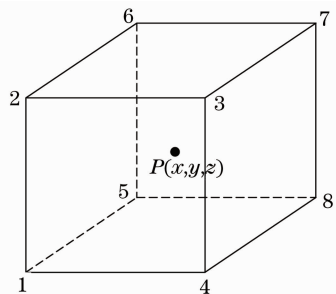


图 1 网格插值单元示意图

Fig. 1 Schematic of grid unit interpolation

### 3.2 空间任意点折射率梯度计算

已知空间网格节点的折射率,求解网格内任意点的折射率梯度,需要分两步:第一步求解网格点本身的梯度值,第二步利用网格单元顶点的梯度插值

求解网格内任意点的梯度值。其中第二步的插值方法与求解折射率的方法相同,这里重点论述第一步的求解方法。

求解网格节点的梯度需要利用节点周围其它多个点进行求解,常用的方法有 Horn 梯度算子<sup>[12]</sup>, Barron 梯度算子<sup>[13]</sup>等,此处介绍计算流体力学中具有二阶精度的有限差分方法<sup>[14]</sup>求解梯度。

计算流体力学一般采用曲线坐标系 $(\xi, \eta, \zeta)$ 下的 N-S 方程求解流场,如图 2 所示,而光线追迹一般在笛卡儿坐标系 $(x, y, z)$ 下进行,所以需要求解笛卡儿坐标下的折射率梯度 $\nabla n$ 。在曲线坐标系下,首先运用有限差分方法求得折射率梯度 $\nabla n$ 的三个分量 $\nabla n_\xi, \nabla n_\eta, \nabla n_\zeta$ ,再利用 Jacobi 坐标变换矩阵得到笛卡儿坐标下的分量 $\nabla n_x, \nabla n_y, \nabla n_z$ 。

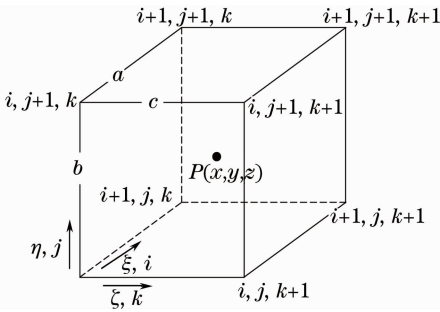


图 2 有限差分法坐标系

Fig. 2 Coordinates of finite difference method

1) 求解 $\nabla n_\xi, \nabla n_\eta, \nabla n_\zeta$

以 $\xi$ 方向为例,采用如下的差分形式求解网格点 $(i, j, k)$ 处的折射率的梯度

左边界网格点采用三点向前偏心差分

$$(\nabla n_\xi)_{i,j,k} = \frac{-3n_{i,j,k} + 4n_{i+1,j,k} - n_{i+2,j,k}}{2}, \quad (6)$$

中间网格点采用中心差分

$$(\nabla n_\xi)_{i,j,k} = \frac{n_{i+1,j,k} - n_{i-1,j,k}}{2}, \quad (7)$$

右边界网格点采用三点向后偏心差分

$$(\nabla n_\xi)_{i,j,k} = \frac{3n_{i,j,k} - 4n_{i-1,j,k} + n_{i-2,j,k}}{2}. \quad (8)$$

上面各式中,下标 $i, j, k$ 与 $\xi, \eta, \zeta$ 的关系如图 2 所示。

2) 利用 Jacobi 坐标变换矩阵得到 $\nabla n_x, \nabla n_y, \nabla n_z$

在三维空间中, Jacobi 坐标变换矩阵为

$$J = \left[ \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} \right] = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix}, \quad (9)$$

利用 Jacobi 矩阵即可求得折射率梯度在笛卡儿坐标 $x, y, z$ 三个方向上的分量:

$$\begin{cases} \nabla n_x = \frac{\partial n}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial n}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial n}{\partial \zeta} \zeta_x \\ \nabla n_y = \frac{\partial n}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial n}{\partial \eta} \eta_y + \frac{\partial n}{\partial \zeta} \zeta_y \\ \nabla n_z = \frac{\partial n}{\partial \xi} \xi_z + \frac{\partial n}{\partial \eta} \eta_z + \frac{\partial n}{\partial \zeta} \zeta_z \end{cases} \quad (10)$$

### 3.3 追迹步长自适应调节

在光线追迹过程中,一般给定追迹步长 $\Delta s$ , $\Delta s$ 越小则追迹的精度越高,但这将增加计算量,所以在实际追迹过程中可考虑对追迹步长进行自适应调整,在折射率变化大的地方,步长小;在折射率变化小的地方,步长可以大一些,这样既保证精度又提高了效率。

#### 3.3.1 基本思想和方法

改变追迹空间步长的一种方法是给定不变的光学步长 $\Delta v = n\Delta s$ ,根据当地折射率 $n(x, y, z)$ 变化调节追迹空间步长 $\Delta s$ 。但这种方法存在不足:当折射率 $n$ 本身较大而又基本不变化,就会导致空间步长 $\Delta s$ 较小,对精度提高并没有明显改善,反而增加了计算时间。

本质上,光线对折射率梯度 $\nabla n$ 最为敏感,为了提高光线追迹的精度,应该重点考虑折射率梯度的影响,文献[1]的方法也体现了这一思想。本文基于相同的出发点,即在折射率变化比较剧烈(梯度大)的地方减小追迹步长对光线进行细致追迹,但采用不同的方式实现,无需对网格单元进行细分和重构。其方法是利用网格折射率梯度 $x_g$ 作为变量,构造步长调节函数 $f(x_g)$ 。由于调节函数难以给出解析表达式,经过大量的数值计算实验,给出如下分段函数形式的步长调节函数

$$f(x_g) = \begin{cases} \Delta_i, & x_g < 10^{-7} \\ 0.5\Delta_i, & 10^{-7} < x_g \leq 10^{-6} \\ 0.2\Delta_i, & 10^{-6} < x_g \leq 10^{-5} \\ 0.1\Delta_i, & 10^{-5} < x_g \leq 10^{-4} \\ 0.05\Delta_i, & x_g > 10^{-4} \end{cases} \quad (11)$$

追迹步长 $\Delta s = f(x_g)$ , $\Delta_i = (a_i \times b_i \times c_i)^{1/3}$ 为当地网格单元 $i$ 的平均几何尺寸, $a_i, b_i, c_i$ 为当地网格单元边长,如前面图 2 所示。对(11)式有三点说明:

1) 网格折射率梯度 $x_g$ 是指相近网格单元之间的折射率变化幅度(单位:单元格),不是当地的绝对梯度值(单位:m); 2)  $\Delta_i$ 为追迹步长的最大值,即使在折射率梯度很小的情况下,限定每次追迹步长不超过当地网格平均几何尺寸; 3) 最小的追迹步长是当地网格平均几何尺寸 $\Delta_i$ 的 0.05 倍,这是对存在

激波这种极端情况进行数值考察后给出的参考数值,限于篇幅,此处不再给出详细考察过程。

### 3.3.2 追迹末端点位置判断

由于采用了变步长追迹,每一步追迹完成后的位置并不一定在网格点或者网格单元分界面上,需要界定每一步光线末端点所在的网格单元,据此插值求解该点的折射率和折射率梯度,方法如下:

判断点  $P$  是否在某个网格单元  $K$  内,可通过计算该点与单元  $K$  的八个顶点顺次组成的 12 个四面体体积之和  $V_P$  与该单元体的体积  $V_K$  的关系进行判别。考虑实际计算存在误差,需要给定一个误差限  $\epsilon$  进行判断:

$$\begin{cases} \frac{|V_P - V_K|}{V_K} \leq \epsilon, & \text{点 } P \text{ 在单元 } K \text{ 内} \\ \frac{|V_P - V_K|}{V_K} > \epsilon, & \text{点 } P \text{ 在单元 } K \text{ 外} \end{cases} \quad (12)$$

## 4 算法验证与考察

在下面计算中,以  $z$  轴为光轴,在光轴坐标  $z_i$  处对应的光线真实传播轨迹的矢径为  $r_i$ ,经过若干步追迹后的计算值为  $r'_i$ ,定义计算值与精确解的相对误差

$$\epsilon_i = \frac{|r_i - r'_i|}{|r_i|} \quad (13)$$

### 4.1 一般光线追迹

选择折射率径向分布时光线传播轨迹精确解为

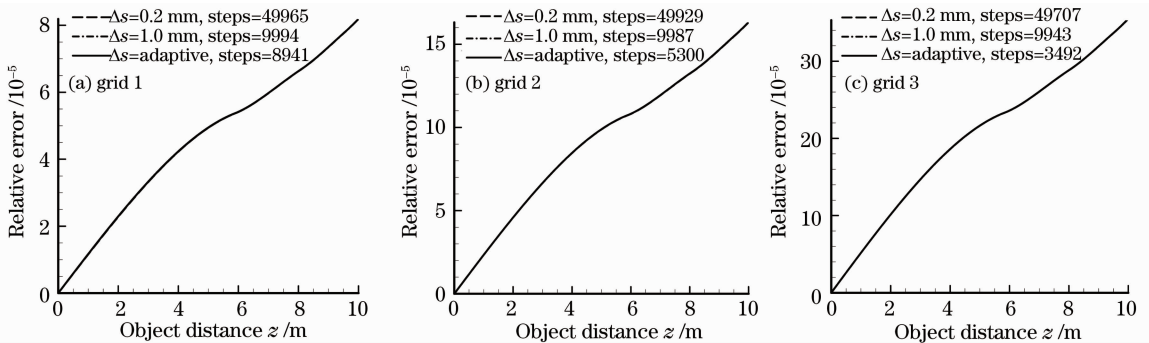


图3 不同追迹步长计算结果( $\alpha=0.0002$ )

Fig. 3 Computational result with different tracing step length ( $\alpha=0.0002$ )

由图3可知,在同一个网格下,对于追迹步长分别为 0.2 mm, 1.0 mm 以及步长自适应追迹三种情况,其追迹精度保持一致,差别不明显;随着追迹步长增大所需的步数减少,步长自适应方法的追迹步数最少,效率最高。此现象表明,光线追迹的精度在已确定折射率空间分布情况(即同一网格情况)下,对追迹步长不是很敏感,但追迹的效率随步长的增大而提高。

考察标准,折射率径向变化规律如下:

$$n(x, y) = n(0) \sqrt{1 + \alpha^2(x^2 + y^2)}, \quad (14)$$

在(14)式对应折射率分布的介质中,光线传播轨迹的精确解为

$$\begin{cases} x = x_0 \cosh\left[\frac{n(0)\alpha}{L_0}z\right] + \frac{p_0}{n(0)\alpha} \sinh\left[\frac{n(0)\alpha}{L_0}z\right] \\ y = y_0 \cosh\left[\frac{n(0)\alpha}{L_0}z\right] + \frac{q_0}{n(0)\alpha} \sinh\left[\frac{n(0)\alpha}{L_0}z\right] \end{cases} \quad (15)$$

式中  $x_0, y_0, z_0$  为初始点的坐标,  $p_0, q_0, L_0$  为初始点对应  $x, y, z$  方向的光学方向余弦,算例中所涉及到的坐标长度单位均以 mm 度量。

在给定折射率空间离散分布时,考虑到折射率为径向分布,  $x, y$  方向网格间距  $\Delta x, \Delta y$  需要小一些,  $z$  方向网格间距  $\Delta z$  可以大一些。给定三个空间离散网格形式: 1) 网格 1:  $\Delta x = \Delta y = 1$  mm,  $\Delta z = 5$  mm; 2) 网格 2:  $\Delta x = \Delta y = 2$  mm,  $\Delta z = 10$  mm; 3) 网格 3:  $\Delta x = \Delta y = 4$  mm,  $\Delta z = 50$  mm。为了充分考察本光线追迹方法的精度,此处沿  $z$  方向 10 m 范围进行追迹计算。不失一般性,假设光线初始入射点坐标为 (1.0, 1.0, 0), 取  $n(0) = 1.0$ , 光线初始点光学方向余弦为 (0, 0, 1.0), 考虑不同追迹步长,计算得到的结果如图3所示。

对于不同的网格,追迹精度变化则比较明显,三个网格追迹的精度为  $10^{-5} \sim 10^{-4}$  量级,如图4所示。这主要是因为,稀疏的网格节点信息对折射率场的描述不精细,在插值求解折射率和折射率梯度时造成的误差较大,而追迹方法本身造成的误差是次要原因。在达到同样精度的条件下,随着网格变得稀疏,追迹的步数明显降低,效率显著提高;而且追迹步长由空间网格尺寸和网格折射率梯度得到,无需事先评估追迹步长到底给定多少才能满足精度要求。

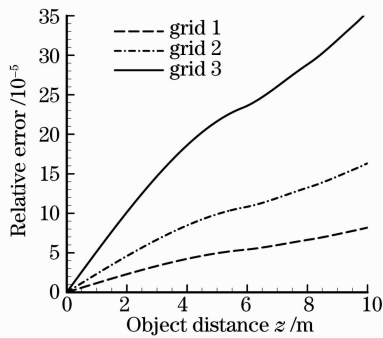


图 4 不同网格条件下的追迹精度( $\alpha=0.0002$ )

Fig. 4 Tracing precision of different grids ( $\alpha=0.0002$ )

另外,折射率径向分布中的参数 $\alpha$ 反映了折射率的变化幅度(即梯度)。基于网格 1(grid1),针对不同的 $\alpha$ 值,考察本方法对不同折射率变化幅度时的追迹精度如图 5 所示。为了直观表示,图 5 纵坐标采用对数坐标。结果表明,在同一个网格下(即折射率场空间分布一定),折射率变化幅度参数 $\alpha$ 每增加一个量级(从 $10^{-6} \sim 10^{-4}$ ),折射率梯度依次增加二个量级(从 $10^{-12} \sim 10^{-8}$ );沿 $z$ 方向追迹 10 m 后,折射率变化 $\Delta n$ 的范围分别达到 $10^{-7}$ , $10^{-10}$ 与 $10^{-12}$ 量级,追迹精度依次降低二个量级(从 $10^{-9} \sim 10^{-5}$ )。根据前面分析可知,由于折射率空间离散网格没有随折射率变化剧烈而加密,导致折射率场信息不精细,从而导致追迹精度降低。

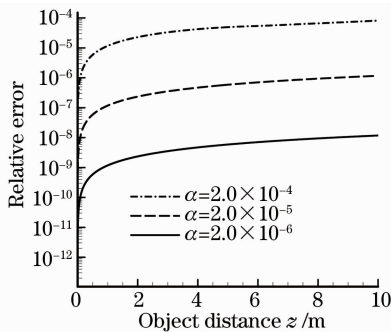


图 5 不同折射率变化幅度的追迹精度

Fig. 5 Tracing precision of different refraction ranges

#### 4.2 特殊螺旋光线追迹

选取螺旋光线为对象进行追踪,对应的折射率分布为

$$n(x, y) = n(0) \sqrt{1 - \alpha^2(x^2 + y^2)}, \quad (16)$$

对应的螺旋光线轨迹的精确解为

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \left[ \frac{n(0)\alpha}{L_0} z \right] \\ y = x_0 \sin \left[ \frac{n(0)\alpha}{L_0} z \right] \end{cases}, \quad (17)$$

初始条件 $p_0 = 0, x_0 = \frac{q_0}{n(0)\alpha}$ 。同样基于网格 1,取 $\alpha = 0.01, n(0) = 1.5$ ,将计算得到的结果与光线真实传播路径进行比较,如图 6 所示,两者吻合的程度比较高。图 7 为追迹过程中对应误差,在沿 $z$ 轴追迹 10 m 计算过程中,误差始终保持在 $10^{-4}$ 量级。应该说对于螺旋光线这类特殊光线的追迹效果是较好的,由此说明本方法具有较高的精度。

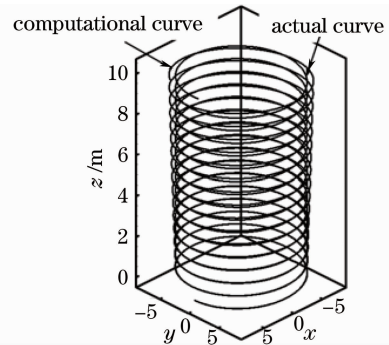


图 6 螺旋光线计算轨迹与实际轨迹比较

Fig. 6 Comparison of helix ray's computational and actual track

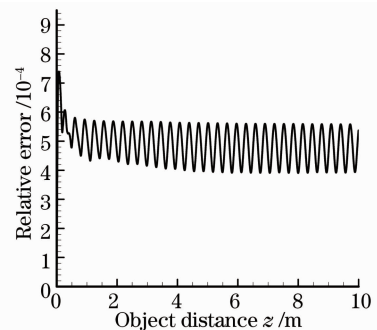


图 7 螺旋光线追迹误差

Fig. 7 Tracing error of helix ray

## 5 结 论

本文所建立的光线追迹方法是针对折射率任意空间离散分布介质中的光线追迹,可以直接应用于计算流体力学的网格,无需再重新划分和重构追迹所需的网格;网格节点上的折射率梯度采用计算流体力学中具有二阶精度的有限差分方法进行求解,追迹过程中所需折射率和折射率梯度采用距离加权插值得到,同时提出了追迹步长自适应调整的思想和方法,在保证精度的同时,提高了追迹效率。通过对一般光线和特殊螺旋光线进行追迹考察,结果表明本方法具有较高的精度和效率,适用于折射率空间任意离散分布介质中的光线追迹。

需要注意的是,光线追迹的精度还受到初始给定的离散折射率场分布信息的影响,折射率场越准确精细,追迹的精度也就越高,这就对计算流体力学所计算折射率场的精度提出了要求。在下一步的研究中,还需要对追迹步长自适应调节函数,流场典型结构(如激波、湍流等)影响光线追迹的规律进行深入细致的研究。

### 参 考 文 献

- 1 Liu Chunsheng, Zhang Tianxu, Li Xiaotong. Description of irregular inhomogeneous refractive index field[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2007, **36**(1): 127~130
- 刘纯胜, 张天序, 李晓彤. 无规则非均匀折射率场描述[J]. *红外与激光工程*, 2007, **36**(1): 127~130
- 2 D. M. Sulic. Ray tracing study of whistlers guided by a field-aligned depression of electron density in the magnetosphere[J]. *J. Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 1997, **59**(5): 569~590
- 3 Qiao Yafu. GRIN Optics[M]. Beijing: Science Press, 1991
- 乔亚夫. 梯度折射率光学[M]. 北京: 科学出版社, 1991
- 4 Huang Zhanhua, Cheng Hongfei, Cai Huaiyu *et al.*. A study on universal ray tracing algorithm in the medium of variable refractive index[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(5): 589~592
- 黄战华, 程红飞, 蔡怀宇等. 变折射率介质中光线追迹通用算法的研究[J]. *光学学报*, 2005, **25**(5): 589~592
- 5 D. Nikezic, F. M. F. Ng, C. W. Y. Yip *et al.*. Application of the ray tracing method in studying  $\alpha$  tracks in SSNTDs[J]. *Radiation Measurements*, 2005, **40**(2~6): 375~379
- 6 Liang Minyong, Liao Ningfang, Feng Jie *et al.*. Design and optimization of three cylindrical reflectors optical system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(7): 1359~1363
- 梁敏勇, 廖宁放, 冯 洁等. 三反射式柱面光学系统设计及优化[J]. *光学学报*, 2008, **28**(7): 1359~1363
- 7 Luo Xi, Chen Peifeng, Wang Ying *et al.*. Novel kind of wide-band shaping parabolic mirror for high power laser processing[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(11): 1853~1856
- 罗 曦, 陈培锋, 王 英等. 一种大功率激光加工用新型宽带光斑成形抛物面镜[J]. *中国激光*, 2008, **35**(11): 1853~1856
- 8 K. S. Klimaszewski, T. W. Sederberg. Faster ray tracing using adaptive grids[J]. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1997, **17**(1): 42~51
- 9 Zhao Yan, Wang Tao, Xu Dong *et al.*. CFD Grids-based transmission model of the rays propagating through the hypersonic flow field[J]. *Acta Armamentarii*, 2008, **29**(3): 282~286
- 赵 剡, 王 涛, 许 东等. 基于计算流体力学网格的高超声速流场光传输建模研究[J]. *兵工学报*, 2008, **29**(3): 282~286
- 10 T. Wehnung, C. Robert. Three dimensional transonic optical distortion evaluation using computational fluid dynamics [R]. AIAA, 1992, 92-0655
- 11 Chen Yong, Liu Jian, Li Shumin *et al.*. Propagation of light in a supersonic turbulence boundary layer [J]. *Chinese J. Computational Physics*, 2006, **23**(2): 204~208
- 陈 勇, 柳 建, 李树民等. 光在超声速湍流边界层中的传输[J]. *计算物理*, 2006, **23**(2): 204~208
- 12 C. Q. Davis, D. M. Freeman. Statistics of subpixel registration algorithms based on spatiotemporal gradients or block matching [J]. *Opt. Engng.*, 1998, **37**(4): 1290~1298
- 13 J. L. Barron, D. J. Fleet, S. S. Beauchemin. Performance of optical flow techniques[J]. *International J. Computer Vision*, 1994, **12**(1): 43~77
- 14 Yan Chao. Computational Fluid Dynamics Method and Application[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2006
- 阎 超. 计算流体力学方法及应用[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006