

文章编号: 0253-2239(2010)03-0613-05

基于随机并行梯度下降算法自适应光学系统的校正残差分析

周 朴 王小林 马阎星 马浩统 许晓军 刘泽金[■]

(国防科学技术大学光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要 对自适应光学系统随机并行梯度下降控制的校正残差进行了分析。通过对随机并行梯度下降 (SPGD) 算法校正静态像差的数值模拟, 定标出了算法收敛时间与系统变形镜校正单元数的关系。建立了基于随机并行梯度下降算法自适应光学系统的简化控制模型, 根据湍流大气的时间功率谱, 推导了算法收敛时间与校正残差之间的解析表达式。结果表明, 采用 N 个校正单元的自适应光学系统补偿 Greenwood 频率大小为 f_G 的大气湍流带来的动态像差, 为保证校正残差 $\sigma^2 < \lambda/10$, 随机并行梯度下降算法的迭代速率需大于 $86 N f_G$ 。根据一组典型的计算结果指出了自适应光学系统随机并行梯度下降控制作用距离的有限性。

关键词 自适应光学; 随机并行梯度下降; 残差

中图分类号 TP273.2 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS20103003.0613

Analysis on Residual Error for Adaptive Optical System Based on Stochastic Parallel gradient Descent Control Algorithm

Zhou Pu Wang Xiaolin Ma Yanxing Ma Haotong Xu Xiaojun Liu Zejin

(College of Optoelectric Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract The residual error of adaptive optical system based on stochastic parallel gradient descent control algorithm is analyzed. The relation between steps of iteration and control numbers is specified by numerical simulation of correcting static aberrations. Simplified control model for adaptive optical system based on stochastic parallel gradient descent algorithm is introduced. Analytical expression for the relation between residual error and convergence time is deduced. The residual error is analyzed by using the temporal power spectral density of the atmospheric turbulence. It is revealed that if dynamic atmospheric turbulence with a Greenwood frequency f_G is to be corrected using a N -element adaptive optical system, the iteration rate should be greater than $86 N f_G$ to ensure the residual error corrected is less than $\lambda/10$. It is also pointed out the limited range of adaptive optical system based on stochastic parallel gradient descent control algorithm from a typical computing result.

Key words adaptive optics; stochastic parallel gradient descent; residual error

1 引 言

基于随机并行梯度下降 (SPGD) 算法的自适应光学系统以其硬件实现的简单性及其对闪烁等复杂环境条件的适应性, 正越来越受到自适应光学研究领域的重视^[1~4]。与传统自适应光学系统相比, 该系统使用 SPGD 算法直接对系统性能指标进行优化, 无需利用波前传感器探测畸变波前相位信息进

行波前重构, 因此在降低系统复杂性的同时, 也降低了控制算法的复杂性。国内外研究人员已经利用对该系统进行了详细的数值模拟^[4,5], 并成功用于扩展目标成像的自适应光学静态像差校正、光束传输的动态像差校正和激光器腔外光束净化等方面^[1~3,6~8]。评价自适应光学系统性能的一个关键指标是对动态像差校正的残余误差。目前国内外研

收稿日期: 2009-01-13; 收到修改稿日期: 2009-05-20

作者简介: 周 朴(1984—), 男, 博士研究生, 从事光纤激光器及光束合成等方面的研究。E-mail: jnck621@163.com

导师简介: 刘泽金(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事高能激光技术方面的研究。E-mail: zejiniu@vip.sina.com

究人员已经对基于波前重构的自适应光学系统的校正残差进行了深入的分析^[9,10],文献[11,12]利用纯数值模拟的方法对 SPGD 算法校正动态像差进行了详细的计算,但对其校正残差尚未有深入研究。本文首先通过数值模拟的方法定标出 SPGD 算法收敛速度与系统校正单元数 N 之间的关系,然后建立 SPGD 算法自适应光学系统的控制模型,根据湍流大气的时间功率谱特性,推导出算法收敛时间与校正残差之间的解析关系,并据此分析 SPGD 算法自适应光学系统的校正残差,为 SPGD 算法自适应光学系统的理论研究和实际应用提供参考。

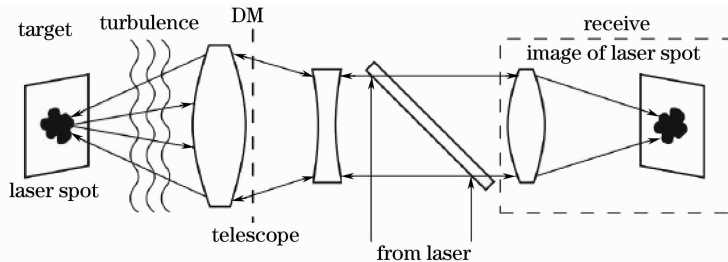


图 1 SPGD 算法自适应光学系统结构示意图

Fig. 1 System configuration of adaptive optics system based on SPGD algorithm

定义系统性能评价函数 J 为施加在变形镜所有驱动器上的控制电压信号的函数,即 $J = J(u_1, u_2, \dots, u_N)$, N 为系统校正单元数。SPGD 算法采用并行随机扰动的方法对 J 的梯度分量进行估计,并采用 $u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \gamma \Delta J^{(n)} \Delta u_i^{(n)}$ 作为基本迭代项是对控制电压进行更新。式中 $\Delta u^{(n)} = \{\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_N\}^{(n)}$ 为第 n 次迭代时施加的扰动电压向量,各 Δu_i ($1 \leq i \leq N$) 相互独立且同为伯努利分布,取正负值的概率同为 50%; $\Delta J^{(n)} = \Delta J_+^{(n)} - \Delta J_-^{(n)}$, $\Delta J_-^{(n)} = J[u^{(n)} - \Delta u^{(n)}] - J(u^{(n)})$, $\Delta J_+^{(n)} = J[u^{(n)} + \Delta u^{(n)}] - J[u^{(n)}]$; γ 为增益系数,在实际的应用中,如使目标函数向极大方向优化, γ 取正值;反之, γ 取负。

2 静态像差校正的数值模拟

2.1 系统结构

基于 SPGD 算法的自适应光学系统结构示意图如图 1 所示。光信号接收端放置于发射装置附近位置,通过接收远场目标散射信号,以成像清晰度、接收光能量等参数作为目标函数 J ,利用 SPGD 算法直接对波前校正器进行控制,通过算法的迭代过程不断调整对波前校正器的控制参数和变形镜 (DM) 控制电压的更新,直到获得接近理想的光束控制与波前校正效果。

2.2 数值模拟

SPGD 算法的收敛速度与系统校正单元数有关^[1~4]。普遍认为,算法收敛速度与校正单元数的平方根之间存在线性关系^[2,3]。通过对不同单元数的自适应光学系统采用 SPGD 算法校正静态像差进行数值模拟,定标出算法收敛速度与系统校正单元数 N 之间的关系。不失一般性,采用如图 2 所示的变形镜驱动器位置排布方式,并取校正后光束的 Strehl 比作为性能评价函数 J 。静态畸变的生成和模拟程序的设计思路与文献[5,8]一致,此处不重复描述。

数值计算结果表明,算法的收敛速度不仅与系统校正单元数有关,也与 Δu_i 的幅值 A 以及增益系

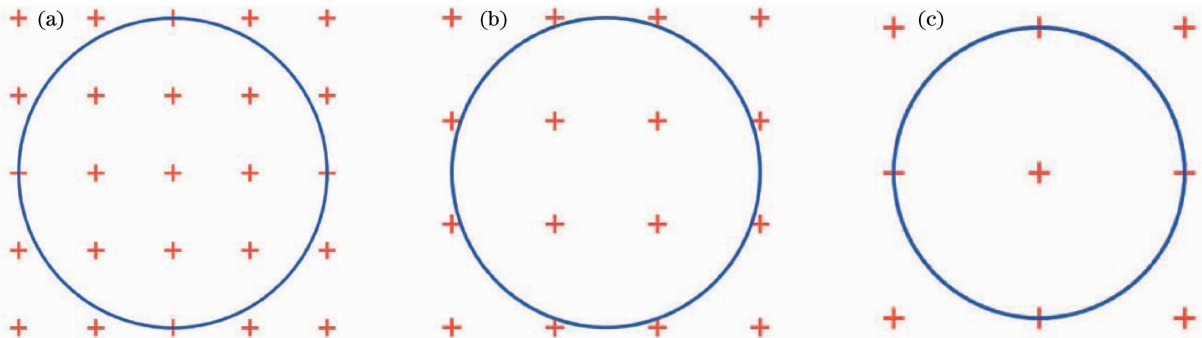


图 2 变形镜驱动器位置排布。(a) 25 单元; (b) 16 单元; (c) 9 单元

Fig. 2 Actuator geometry for (a) 25, (b) 16, (c) 9 actuator DMs

数 γ 有关。通过大量的数值计算,搜索到所需最少的迭代步数的参数选取规则为 $\gamma \approx 0.45/(A \times J_d)$, J_d 为无静态像差时系统性能评价函数的理想值。另外,为了保证随机扰动本身不对波前造成影响,一般取 $A < 0.3 \text{ rad}$ 。图 3 给出了从大量计算结果样本中选出的 9, 16, 25, 36 单元自适应光学系统采用 SPGD 算法校正静态像差的最快收敛曲线。

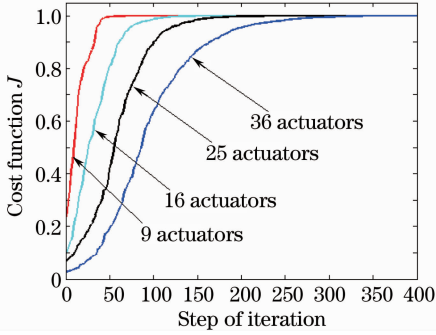


图 3 不同校正单元数的算法收敛曲线
Fig. 3 Convergence curve for system with different actuator numbers

如以系统性能评价函数达到理想值的 80%, 90% 为判据, 则根据图 3 可以拟合出 SPGD 算法收敛所需的迭代步数(即收敛速度)与校正单元数之间的关系, 如图 4 所示。图 4 表明, 算法收敛速度与校正单元数 N 本身存在线性关系。这与文献[2, 3]定性分析给出的 \sqrt{N} 关系有所不符, 可能是由于为保证随机扰动本身不对波前造成影响, 对 Δu_i 的幅值 A 作了限制等因素造成。假设系统单次扰动时间为恒定值, 则算法收敛到理想值 90% 所需的时间 $\tau \approx 4.8N - 8$ 。当 N 足够大时, $\tau \approx 4.8N$ 。

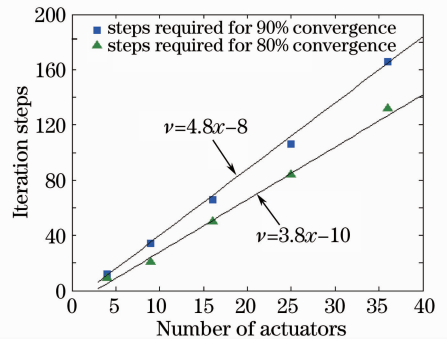


图 4 迭代步数与校正单元数之间的关系
Fig. 4 Dependence of iteration steps on actuator numbers

3 校正残差分析

基于 SPGD 算法的自适应光学系统的控制模型如图 5 所示。系统运行主要有随机扰动、评价函数采样和迭代运算三个主要步骤, 可以近似成为一个纯时间延迟的控制对象, 系统控制回路的时间响应为 $G_0(s) = \exp(-s\tau)$, τ 为算法收敛时间, $s = 2\pi jf$ 为 Laplace 算子。控制器采用结构简单、容易调整的比例积分控制器^[9, 10], 控制模型为 $C(s) = K/s$, 其中 K 为控制增益。整个控制回路的误差传递函数为 $G(s) = 1/[1 + G_0(s)C(s)]$, 系统误差传递函数可以用(1)式描述:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{s}{s + K \exp(-s\tau)} \approx \frac{s}{s + K(1 - s\tau)}, \quad (1)$$

为了保证闭环控制稳定, 没有振荡, 控制增益 K 需满足 $K \leq \pi/6\tau$ ^[10]。

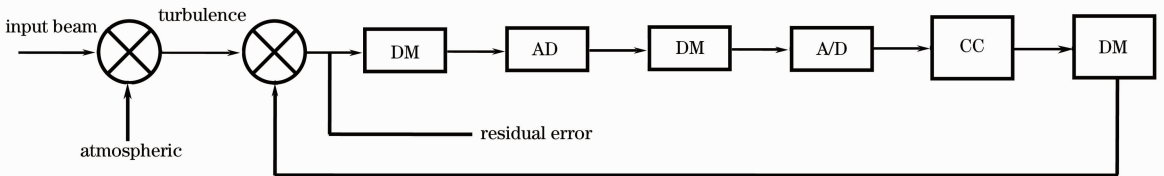


图 5 SPGD 算法自适应光学系统的控制模型图。DM: 变形镜; CC: 控制器; A/D: 模数转换
Fig. 5 Block diagram of control system for the adaptive optics system based on SPGD algorithm. DM: deformable mirror; CC: controller; A/D: analog to digital converters

系统的控制残差可以由下式计算^[13]:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} |E(j2\pi f)|^2 F_i(f) df, \quad (2)$$

式中 $F_i(f) = \frac{1}{\pi} f_0^{5/3} f^{-8/3}$ ^[14], 为大气湍流的时间功率谱, 近似服从 $-8/3$ 规律。

$$f_G = \left[0.102k^2 \int_0^{\infty} C_n^2(z) v^{5/3}(z) dz \right]^{3/4},$$

为大气 Greenwood 频率, 可以用于描述湍流大气的时间动态特性; k 为波数, C_n^2 为大气折射率结构函数, v 为风速。将 $E(s)$ 和 $F_i(f)$ 的表达式代入残差的计算(2)式, 积分可得

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} |E(j2\pi f)|^2 F_1(f) df = \int_0^{\infty} \frac{4\pi f_G^{5/3} f^{-2/3}}{K^2 + 4\pi^2 f^2 (1 - \tau K)^2} df = \frac{21.394 f_G^{5/3}}{K^2 \times [(\tau K - 1)^2 / K^2]^{1/6}} \quad (3)$$

在 τ 保持定值(不失一般性,暂取 $\tau = 1$ ms)的情形下,控制残差与控制增益 K 的关系如图 6 所示。图 6 表明控制增益 K 越大,控制残差越小。考虑到闭环控制的稳定性要求 $K \leq \pi/6\tau$,在后文的计算中,我们取 $K = \pi/6\tau$ 。对于不同 Greenwood 频率,控制残差与收敛时间 τ 之间的关系如图 7 所示。收敛时间 τ 越短,校正残差越小。随着 Greenwood 频率的增大,要控制校正残差小于某个特定值,对于收敛时间 τ 的要求也就越严格。

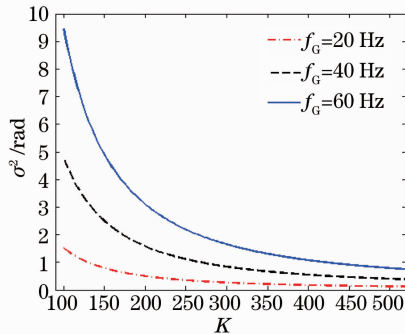


图 6 固定收敛时间 τ 情形下控制残差与控制增益的关系

Fig. 6 Dependence of control residual error on control gain for specified convergence time

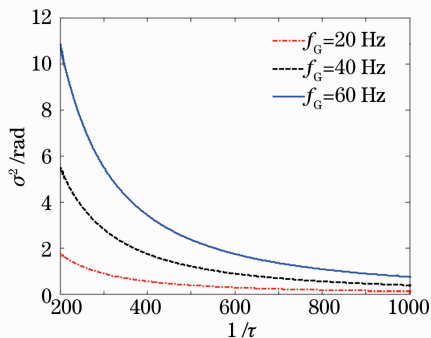


图 7 控制残差与收敛时间 τ 之间的关系

Fig. 7 Dependence of control residual error on convergence time

4 实际 SPGD 算法自适应光学系统迭代速率与有效作用距离的估算
为定量描述校正不同时间动态特性的湍流大气

对收敛时间 τ 的要求,取控制残差 $\sigma^2 < \lambda/10$ 为判据,由图 7 的计算结果可以得出,在不同 Greenwood 频率下,对系统最大收敛时间 τ 的要求如图 8 所示。

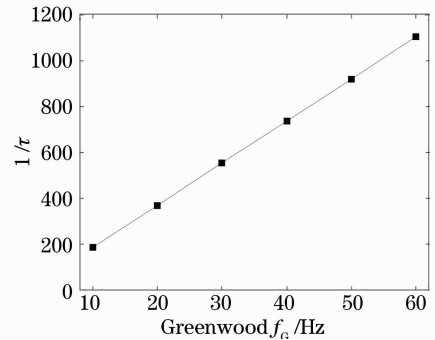


图 8 不同 Greenwood 频率对系统最大收敛时间的要求
Fig. 8 Requirement for the maximal convergence time of the system under different Greenwood frequencies

对图 8 进行线性拟合可得,为了保证控制残差 $\sigma^2 < \lambda/10$,需满足 $1/\tau > 18f_G$ 。对于 N 单元的自适应光学系统,一般而言通常需要 $4.8N$ 步迭代运算方能保证系统性能评价函数收敛到理想值的 90%,也就是说,在时间 τ 内需完成至少 $4.8N$ 步运算。据此可以估算:基于 SPGD 算法自适应光学系统算法迭代速率 $f_p > \frac{4.8N}{\tau} > 86Nf_G$ (Hz)。文献[11]通过纯数值模拟计算得出,为了校正大气湍流动态像差,SPGD 控制算法所需算法迭代速率大约为 20 倍至 40 倍的 Nf_G ,本文分析结果与文献[11]的数值模拟结果在量级上一致。不失一般性,取 $f_G = 15$ Hz,则采用 36 单元变形镜需要算法迭代速率 $f_p > 13$ kHz。

如图 1 所示的实际系统中,成像目标一般在数公里以外的远场处,因此获得性能评价函数 J 的大小还需考虑光信号传输的时间^[4,15]:假设目标在 10 km 处,则算法扰动前后获取评价函数的时间需 $67 \mu\text{s}$,即使不考虑迭代计算所需的时间,算法迭代速率也会被限制在 $f_p < 1/67 \mu\text{s} = 15$ kHz 以内。因此,对于 $f_G = 15$ Hz 的动态像差,36 单元变形镜的自适应光学系统的有效作用距离在 10 km 以内。另外,目前国内进行的 SPGD 算法像差补偿实验大都采用相机获取系统性能评价函数值^[7,8],而普通性能的相机响应时间均大于毫秒量级,导致算法迭代速率 f_p 小于百赫兹,还不能用于补偿实际湍流大气引入的动态像差。如果采用采样频率较高的探测器完成性能评价函数的采集,再配以高速的数据处理器,SPGD 控制算法可能适用于有限传输距离以内的大气湍流动态像差补偿^[7]。

5 结 论

文章对自适应光学系统随机并行梯度下降控制的校正残差进行了分析。通过对 SPGD 算法校正静态像差的数值模拟,定标出了算法收敛时间与系统变形镜校正单元数的关系。建立了基于随机并行梯度下降算法自适应光学系统的简化控制模型,根据湍流大气的时间功率谱,推导了算法收敛时间与校正残差之间的解析表达式。结果表明,采用 N 校正单元的自适应光学系统补偿 Greenwood 频率大小为 f_G 的大气湍流带来的波前畸变,为保证校正残差 $\sigma^2 < \lambda/10$,随机并行梯度下降算法的迭代速率需大于 $86Nf_G$ 。自适应光学系统随机并行梯度下降算法从目标处获得性能评价函数,由于光信号传输需要时间延迟,算法迭代速率因此受限,也限制了系统的有效作用范围。文章结论为 SPGD 算法自适应光学系统的理论研究和实际应用提供了参考。

参 考 文 献

- 1 M. A. Vorontsov, G. W. Carhart. Adaptive phase-distortion correction based on parallel gradient-descent optimization [J]. *Opt. Lett.*, 1997, **22**(12): 907~909
 - 2 M. A. Vorontsov, G. W. Carhart. Adaptive optics based on analog parallel stochastic optimization; analysis and experimental demonstration [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2000, **17**(8): 1440~1453
 - 3 M. A. Vorontsov, V. P. Sivokon. Stochastic parallel gradient descent technique for high-resolution wave-front phase-distortion correction [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1998, **15**(10): 2745~2758
 - 4 Piotr Piatrou, Michael Roggemann. Beaconless stochastic parallel gradient descent laser beam control; numerical experiments [J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(27): 6831~6842
 - 5 Yang Huizhen, Li Xinyang, Jiang Wenhan. Simulation and analysis of stochastic parallel gradient descent control algorithm for adaptive optics system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(8): 1355~1360
- 杨慧珍, 李新阳, 姜文汉. 自适应光学系统随机并行梯度下降控

- 制算法仿真与分析[J]. *光学学报*, 2007, **27**(8): 1355~1360
- 6 Yang Huizhen, Li Xinyang, Jiang Wenhan. Comparisons of several stochastic parallel optimization control algorithms for adaptive optics system [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2008, **20**(1): 11~16
 - 杨慧珍, 李新阳, 姜文汉. 自适应光学系统几种随机并行优化控制算法比较[J]. *强激光与粒子束*, 2008, **20**(1): 11~16
 - 7 Yang Huizhen, Chen Bo, Li Xinyang *et al.*. Experimental demonstration of stochastic parallel gradient descent control algorithm for adaptive optics system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(2): 205~210
 - 杨慧珍, 陈 波, 李新阳 等. 自适应光学系统随机并行梯度下降控制算法实验研究[J]. *光学学报*, 2008, **28**(2): 205~210
 - 8 Liang Yonghui, Wang Sanhong, Long Xuejun *et al.*. Experimental explorations of the laser beam cleanup system based on stochastic parallel-gradient-descent algorithm [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(4): 613~618
 - 梁永辉, 王三宏, 龙学军 等. 随机并行梯度下降光束净化实验研究[J]. *光学学报*, 2008, **28**(4): 613~618
 - 9 Rao Changhui, Shen Feng, Jiang Wenhan. Analysis of closed-loop coavefront residual error of adaptive optical system using the method of power spectrum [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(1): 68~72
 - 饶长辉, 沈 锋, 姜文汉. 自适应光学系统波前校正残余误差的功率谱分析方法[J]. *光学学报*, 2000, **20**(1): 68~72
 - 10 Li Xinyang, Jiang Wenhan. Effective bandwidth analysis of adaptive optics control system [J]. *Acta Optica Sinica*, 1997, **17**(12): 1698~1702
 - 李新阳, 姜文汉. 自适应光学控制系统的有效带宽分析[J]. *光学学报*, 1997, **17**(12): 1698~1702
 - 11 Aaron J. Masino, Donald J. Link. Adaptive optics without a wavefront sensor [C]. *SPIE*, 2005, **5895**: 1~9
 - 12 Miao Yu, Mikhail A. Vorontsov. Bandwidth estimation for adaptive optical systems based on stochastic parallel gradient descent optimization [C]. *SPIE*, 2004, **5553**: 189~199
 - 13 D. P. Greenwood. Bandwidth specification for adaptive optics systems [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(3): 390~393
 - 14 D. P. Greenwood, D. L. Fried. Power spectra requirements for wave-front-compensative systems [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(3): 193~206
 - 15 Mikhail A. Vorontsov, Valeriy Kolosov. Target-in-the-loop beam control: basic considerations for analysis and wave-front sensing [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2005, **22**(1): 126~141