

文章编号: 0253-2239(2010)02-0394-05

具有旋转不变性的图像矩的快速算法

胡海涛¹ 平子良^{1,2} 吴斌³

(¹ 北京邮电大学电子工程学院, 北京 100876; ² 内蒙古师范大学物理与电子信息学院, 内蒙古 呼和浩特 010022)
³ 河南人民广播电台, 河南 郑州 450003

摘要 在具有旋转不变性图像矩的传统算法中, 必须将图像的坐标从直角坐标系转换到极坐标系, 这种转换不仅会极大地增大计算量, 并且会产生明显的舍入误差, 从而导致以图像矩为特征的图像识别误差率上升, 利用图像矩重建的图像质量下降。为了消除在像素坐标的转换过程中带来的不利影响, 以圆谐傅里叶矩的计算为例, 介绍了一种直接在直角坐标系下计算图像矩的方法。实验证明, 这种方法不仅彻底消除了像素的坐标转换带来的误差, 而且大幅降低了计算量。

关键词 图像处理; 旋转不变性; 正交矩; 圆谐傅里叶矩; 快速算法

中图分类号 TP391.41 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20103002.0394

Quick Algorithm of Image Moments with Rotational Invariance

Hu Haitao^{1,2} Ping Ziliang^{1,2} Wu Bin³

¹ School of Electronic Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China

² College of Physics and Electronics Information, Inner Mongolia Normal University, Huhhot, Inner Mongolia 010022, China

³ Henan People's Broadcasting Station, Zhengzhou, Henan 100876, China

Abstract The traditional method of computing rotation invariant moments of image, which needs to convert the image into the polar coordinate system, not only increases the computational load greatly, but also creates large rounding error, and results in error rate increase during image recognition and reconstructed image quality deterioration with image moments. To avoid the disadvantages caused during the process of pixel conversion, this paper took the computation of radical harmonic Fourier moments as example, and proposed a new method of computing moments in rectangular coordinate system immediately. The results of the experiments show that the new method can not only eliminate error caused by coordinate conversion, but also significantly reduce computational load.

Key words image processing; rotational invariance; orthogonal moments; radical harmonic Fourier moments; quick algorithm

1 引 言

模式识别领域的一个重要问题就在于对物体的特征的识别要和对象的位置、大小以及方向无关。在这方面有大量关于畸变不变模式识别的文献^[1~3], M. K. Hu^[4]于1962年提出了基于几何矩的图像不变矩, M. R. Teague^[5]首先用 Zernike 矩来描述图像, Y. L. Sheng 等^[6]在1994年提出正交 Fourier-Mellin 矩, Z. L. Ping 等^[7]提出了切比雪夫-傅里叶矩、圆谐傅里叶矩^[8]和雅可比傅里叶矩^[9]等

正交图像矩。除了 M. K. Hu 提出的几何矩外, 这些矩都具有旋转不变性, 并且都是正交矩, 都可以用来重建图像。但由于关于原点旋转的表示不变量的多项式都应当符合^[10], 因此有旋转不变性的矩都是在极坐标系下定义的, 而在计算机上的图像大都是以直角坐标系作为参照来进行显示存储的, 就给计算具有旋转不变性的图像矩带来了麻烦, 当在求图像矩时, 常常不得不先把图像中的每一个像素的坐标转换到极坐标系下, 然后再求图像的矩。在转换

收稿日期: 2009-03-30; 收到修改稿日期: 2009-04-26

基金项目: 国家自然科学基金(60562001)资助课题。

作者简介: 胡海涛(1973—), 男, 博士研究生, 主要从事数字图像处理方向的研究。E-mail: frank.hht@qq.com

导师简介: 平子良(1947—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事信息光学、数字图像处理的教学和科研等方面的研究。

E-mail: pzl@imnu.edu.cn

的过程中,不仅会使算法变得复杂,极大地增加计算量,而且当像素的坐标从直角坐标系向极坐标系进行转换时需要量化,会导致舍入误差,从而使得到的图像矩不准确,在利用求得的图像矩进行图像识别时就会导致错误率大幅上升,而在利用图像矩重建图像时也会导致重建图像的质量下降。

针对这个问题,以圆谐傅里叶矩的计算为例,给出了一种直接在直角坐标系下计算具有旋转不变性图像矩的方法,不仅能够使计算量大幅下降,而且使计算的结果也更加准确。

2 圆谐傅里叶矩的定义^[8]

$$\Phi_{mn} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) T_n(r) \exp(-jm\theta) r dr d\theta. \quad (1)$$

式中

$$T_n(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r}}, & n = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{r}} \sin[(n+1)\pi r], & n \text{ is odd numbers} \\ \sqrt{\frac{2}{r}} \cos(n\pi r), & n \text{ is even numbers} \end{cases} \quad (2)$$

极坐标系中图像函数 $f(r, \theta)$ 可以分解为

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Phi_{mn} T_n(r) \exp(jm\theta). \quad (3)$$

3 在极坐标系下图像的圆谐傅里叶矩的计算

Bhatia 和 Wolf 证明关于原点旋转的不变量多项式都应当符合如下的形式^[10]:

$$V(r \cos \theta, r \sin \theta) = R_n(r) \exp(jm\theta), \quad (4)$$

因此所有具有旋转不变性的矩都是在极坐标系下定义的,而在计算机上的图像却是在直角坐标系下进行显示存储的,所以在计算具有旋转不变性的图像矩时要首先将图像转换到离散的极坐标系下。图像矩的计算过程如下:

首先将(1)式离散化得到

$$\phi_{mn} = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L f(k\Delta r, l\Delta\theta) T_n(k\Delta r) \times \exp(-jml\Delta\theta) \cdot k\Delta r \cdot \Delta r \cdot \Delta\theta, \quad (5)$$

式中 k, l 分别为极径、极角的离散坐标, $\Delta r, \Delta\theta$ 分别为极径、极角的抽样间隔, ϕ_{mn} 为极坐标系下离散化后的圆谐傅里叶矩。

由(5)式可知,对图片进行求和时要将图片像素的坐标转化成按大小顺序进行排列的形式,会希望在极坐标系下像素的位置坐标也是离散的整数值,并且希望能够按照极径、极角由小到大的顺序对像素进行处理。但是,简单地按照

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (6)$$

$$\theta = \arctan(y/x) \quad (7)$$

进行转换后像素的极坐标不是整数,而且像素的极坐标也不是按照从小到大或从大到小的顺序排列的,这就给以后在极坐标系下进行图像处理带来了困难。

因此要找到一种转换方法,使得转换后图像像素的位置坐标在极坐标系下依然是离散的整数值 (i, j) , 并且是按照由小到大的顺序进行排列的。过程如下:

首先,将直角坐标系的原点移到图像的中心,以图像的中心为原点建立极坐标系,然后将图像归一化到单位圆中,由于希望转换后的极坐标系下图像的坐标值同样也是离散的整数,所以必须先对极坐标系下的极径和极角进行离散化,如图 1 所示。

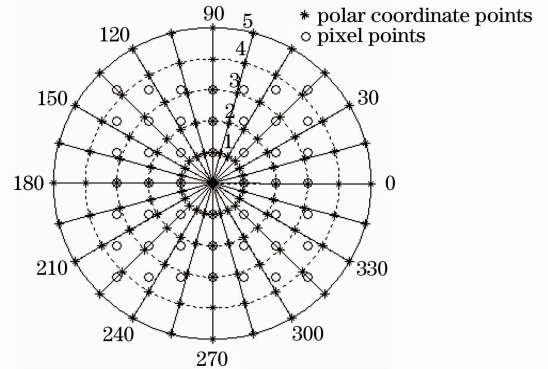


图 1 像素在两种坐标间的转换

Fig. 1 Conversion of pixels between both coordinate systems

其次将单位圆的半径平均分成 M 份,即

$$\Delta R = \frac{1}{M}, \quad (8)$$

再利用(6)式求出像素到原点的距离,然后对 r 离散化,即

$$i = \frac{r}{\Delta R}. \quad (9)$$

再按照四舍五入的方法对 i 进行取整,就得到了像素的径向坐标 i, i 为离散的整数值。当然这样就引入了离散误差,如果要减少误差,必须将极径上点的间距缩小,即增大 M 的值,但会使计算量增加。

对于极角坐标,先把极角从 $0 \sim 2\pi$ 平均分成 N

份,每一份为 $\Delta\theta$,即

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{N}, \quad (10)$$

然后求出每一个像素的极角

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi, \quad (11)$$

式中 θ 的取值范围是 $[0, 2\pi)$, 当 θ 分别在 I, II, III, IV 象限时, k 分别取 0, 1, 1, 2。求出像素在极坐标系下的极角后, 利用

$$k = \frac{\theta}{\Delta\theta} \quad (12)$$

对像素的极角坐标进行离散化, 并对 k 按照四舍五入取整数值, 即可得到像素 (x, y) 在极坐标系下极角的离散化值的坐标 j 。

经过上面的步骤已经得到了像素在极坐标系下的离散坐标值 (i, j) , (i, j) 是离该像素最近的离散极坐标点的坐标值, 如图 1 所示。但仔细观察图 1 就会发现还有以下问题需要注意:

首先, 从图 1 中可以看到在离坐标原点比较近的区域, 极坐标系下的离散坐标点要比直角坐标系下的像素点密集, 导致了转换后的极坐标系下的图像在靠近原点的地方有许多离散点没有像素与之对应, 是“空点”。

其次, 在离坐标原点比较远的区域, 情况与原点附近的区域相反, 直角坐标系下像素的点要比极坐标系下的离散点密集, 出现有几个像素点对应一个离散极坐标点的情况, 在转换时就有许多的像素没有转换到极坐标系下, 造成了像素的丢失。

因此在进行转换的过程中, 为了避免在转换后极坐标“图像”在原点附近出现“空点”而影响图像的质量, 可以在进行转换前将极坐标下所有的离散点都赋上一个特殊的值, 这个值应该是以不影响对图像的后续处理为原则, 例如, 正常像素点的灰度值不可能为负值, 可以把这个特殊值设定为 -1 , 然后再进行转换。这样在转换后没有像素对应的空点就成了像素灰度值为特殊值的点, 以后对图像的处理时就可以根据像素的灰度值是否小于零这一条件来判断将要处理的像素是否为特殊点, 从而可以将这些点挑出来进行特别的处理。

为了避免在图像的边缘由于多个像素对应一个离散极坐标点从而导致像素点丢失的现象, $\Delta\theta$ 的值必须足够小, 使得距离坐标原点最远的区域中的像素有足够多的离散极坐标点与之对应, 这就要求 $\Delta\theta$ 的值至少小于图像边缘附近的任意两个相邻的像素相对于原点所张开的角度, 即要求 N 的值要足够大。

经过上述的转换后, 得到了极坐标下的图像, 然后才可以利用公式求图像的圆谐傅里叶矩。不难看出, 由于需要上述的转换过程, 整个算法变得非常复杂, 由于像素的坐标在转换过程中会存在误差, 最后求出的圆谐傅里叶矩也会引入舍入误差, 使得在利用圆谐傅里叶矩进行图像识别时导致误差率上升, 而在进行图像的重建时也会导致重建图像的质量下降。不仅是在计算圆谐傅里叶矩时存在这个问题, 在所有具有旋转不变性的图像矩(如正交 Fourier-Melin 矩^[6]、切比雪夫-傅里叶矩^[7]、圆谐傅里叶矩^[8]和雅可比-傅里叶矩^[9]等)的计算中, 都存在这个问题, 都需要将图像从直角坐标系向极坐标系进行转换。

4 直角坐标系下图像的圆谐傅里叶矩的计算

根据极坐标系下圆谐傅里叶矩的定义, 对图像求圆谐傅里叶矩时应先将图像归一化到单位圆中, (1)式的积分区域如图 2 所示。

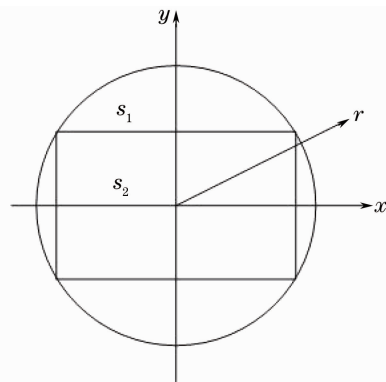


图 2 圆谐傅里叶矩的积分区域

Fig. 2 Integral region of radical harmonic Fourier moments

其中单位圆 s_1 是(1)式中的积分区域, 矩形 s_2 区域是归一化后的图像。则由(1)式可得

$$\begin{aligned} \Phi_{mm} = & \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) T_n(r) \exp(-jm\theta) r dr d\theta = \\ & \iint_{s_2} f(r, \theta) T_n(r) \exp(-jm\theta) ds + \\ & \iint_{s_1 - s_2} f(r, \theta) T_n(r) \exp(-jm\theta) ds. \quad (13) \end{aligned}$$

由图 2 可知, $s_1 - s_2$ 的区域不是图像所在的区域, 其中没有图像的像素值, 这一部分区域对矩的贡献为零, 则图像的圆谐傅里叶矩可写为

$$\Phi_{nm} = \iint_{s_2} f(r, \theta) T_n(r) \exp(-jm\theta) ds. \quad (14)$$

将(14)式改写为

$$\Phi_{nm} = \iint_{s_2} f(x, y) T_n(r) \exp(-jm\theta) dx dy. \quad (15)$$

(15)式即为在直角坐标系下图像的圆谐傅里叶矩的计算公式。

在计算图像的圆谐傅里叶矩时,利用(15)式,就不必再将图像每个像素的坐标从直角坐标系下转换到极坐标系下,这不仅降低了计算量,简化了算法,而且避免了对像素坐标的四舍五入的近似计算,从而彻底避免了转换坐标时带来的误差。

这个结论可以推广到所有其他的具有旋转不变性的正交图像矩(如正交 Fourier-Melin 矩^[6]、切比雪夫-傅里叶矩^[7]、圆谐傅里叶矩^[8]和雅可比-傅里叶矩^[9]等)中,这是因为具有旋转不变性的正交图像矩的公式都具有如下的形式

$$\varphi_{nm} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) J_n(r) \exp(-jm\theta) r dr d\theta, \quad (16)$$

式中 $J_n(r)$ 为径向函数, $f(r, \theta)$ 为图像函数。比较(16)式与(1)式,可以很容易得到具有旋转不变性正交图像矩在直角坐标系下的计算公式:

$$\varphi_{nm} = \iint_s f(x, y) J_n(r) \exp(-jm\theta) dx dy, \quad (17)$$

式中 s 为图像所在的区域。

5 在直角坐标系下利用圆谐傅里叶矩重建图像

极坐标系下图像的重建公式为^[8]

$$\bar{f}(r, \theta) \approx \sum_{n=0}^L \sum_{m=-K}^K \Phi_{nm} T_n(r) \exp(jm\theta), \quad (18)$$

式中 $\bar{f}(x, y)$ 为在直角坐标系下重建的图像,在极坐标系下重建的图像还必须转换到直角坐标系下,这同样会增大计算量和误差。实际上,根据(18)式可以直接得到直角坐标系下图像的重建公式:

$$\bar{f}(x, y) \approx \sum_{n=0}^L \sum_{m=-K}^K \Phi_{nm} T_n(r) \exp(jm\theta). \quad (19)$$

这个方法同样可以推广到所有具有旋转不变性的正交图像矩

$$\bar{f}(x, y) \approx \sum_{n=0}^L \sum_{m=-K}^K \varphi_{nm} J_n(r) \exp(jm\theta). \quad (20)$$

6 实 验

为了对比在两种坐标系下图像矩的计算结果,

实验首先利用本文第 3 部分介绍的方法在极坐标系下计算图像的圆谐傅里叶矩,然后利用本文第 4 部分介绍的方法在直角坐标系下重新计算该图像的圆谐傅里叶矩,并分别利用得到的圆谐傅里叶矩在直角坐标系下重建图像,最后计算重建图像的归一化图像重建误差(NIRE)。NIRE 的定义如下:

$$\epsilon^2 = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} [f(x, y) - \bar{f}(x, y)]^2 dx dy}{\iint_{-\infty}^{+\infty} f^2(x, y) dx dy}. \quad (21)$$

在实验中采用了一个像素为 64 pixel×64 pixel 的灰阶 E 字图片作为实验对象,利用 Matlab7.0 作为软件平台,计算机为宏基公司生产的 5052 型笔记本电脑,CPU 为 AMD 公司的炫龙 TL-50,1 G 内存。

图 3 最上面的 E 字为 64 pixel×64 pixel 的原始灰阶图片,第二行和第三行为利用圆谐傅里叶矩重建的图像,所用的圆谐傅里叶矩分别是在极坐标和直角坐标系下计算得到的。其中第一列至第七列图像中的 K, L 分别为 $K=L=5, 7, 10, 12, 15, 17, 20$ 。在极坐标系下计算矩时,(8),(10)式中的 $M=N=1024$ 。

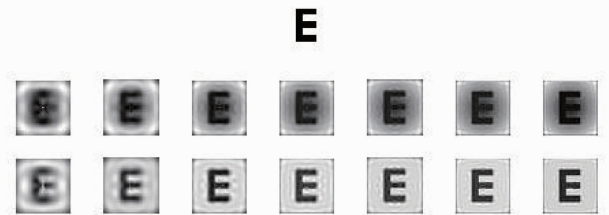


图 3 原始图片及重建的图片

Fig. 3 Original and reconstructed images

通过图 3 中重建的图片与原图片的比较可以看出,在使用相同数量的圆谐傅里叶矩的情况下,第三行的重建图片效果更好,而第二行的图片与原图片相比显得比较昏暗,表明第二行重建的图片与原图片相比相差比较大,这说明在极坐标系下计算得到的图像的圆谐傅里叶矩不准确,重建的图像误差比较大。

图 4 中纵坐标是图像的 NIRE,横坐标是重建图像时所用圆谐傅里叶矩(RHFM)的最高阶数。曲线 1 为用直角坐标系下得到的圆谐傅里叶矩重建图像时产生的 NIRE,曲线 2 则是用极坐标系下得到的圆谐傅里叶矩重建图像时产生的 NIRE。在极坐标系下计算矩时,(8),(10)式中的 $M=N=1024$ 。

图 4 表明,用在直角坐标系下得到的矩重建的图片的归一化图像重建误差比用在极坐标系下得到的矩重建的图片的归一化重建误差要小得多。在极坐

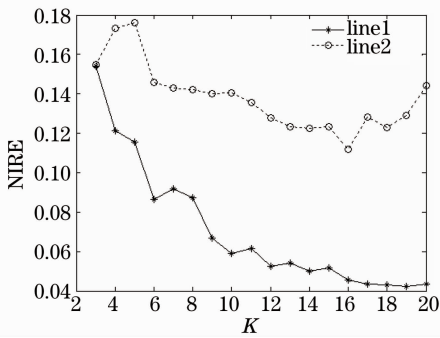


图 4 归一化图像重建误差

Fig. 4 Normalized image reconstruction error

标系下,如果希望得到更为精确的圆谐傅里叶矩的值,则需要将单位圆的极径和极角离散化成更小的值,即增大(8),(10)式中 M, N 的值,但会导致计算量大幅上升。图 5 是在实验中,用两种方法计算并重建图像时所耗费的时间曲线图,显示在直角坐标系下运算所花费的时间远小于在极坐标系下所需的时间,说明新的计算方法的计算量远小于在极坐标系下的运算量。

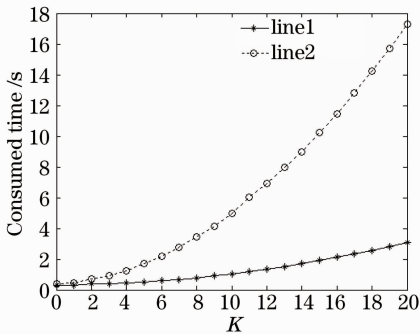


图 5 计算图像矩及重建图像所耗费时间

Fig. 5 Consumed time of computing radical harmonic Fourier moments and reconstructing the image

图 5 的横坐标是重建图像时所用的矩的最高阶数,纵坐标是计算圆谐傅里叶矩及重建图像所耗费的时间。line1 是在直角坐标系下运算时所耗费的时间, line2 是在极坐标系下运算时所耗费的时间。在极坐标系下计算矩时,(8),(10)式中的 $M=N=1024$ 。

实验结果表明,在直角坐标系下计算具有旋转不变性的图像矩时由于不需要将图像在两种坐标系之间进行转换,不仅大幅降低了运算量,同时彻底避免了由

于坐标转换所带来的舍入误差,提高了计算精度。

7 结 论

介绍了一种新的具有旋转不变性图像矩的快速算法,这种方法可以在直角坐标系下直接计算图像的矩,不需要将图像转换到极坐标系下,并可利用得到的图像矩直接在直角坐标系下重建图像,因此它不仅可以大幅降低计算量,简化算法,而且彻底避免了由于像素坐标转换带来的舍入误差。实验结果表明,利用这种方法得到的图像矩更为精确,耗时也更少。由于更为精确的图像矩对于提高图像识别的准确率非常重要,因此利用这种方法求图像矩对于图像识别具有重要的意义。

参 考 文 献

- 1 D. Casasent, D. Psaltis. Position, rotation and scale invariant optical correlation[J]. *Appl. Opt.*, 1976, **15**(2): 1795~1799
- 2 H. H. Arsenault, Y. Sheng. Properties of the circular harmonic expansion for rotation-invariant pattern recognition[J]. *Appl. Opt.*, 1986, **25**(18): 3225~3229
- 3 Z. L. Ping, Y. L. Sheng. Fourier-mellin descriptor and interpolated feature space trajectories for three-dimensional object recognition[J]. *Opt. Engng.*, 2000, **39**: 1260~1266
- 4 M. K. Hu. Visual pattern recognition by moment invariants[J]. *IRE Trans. Inf. Theory*, 1926, **8**(2): 179~187
- 5 M. R. Teague. Image analysis via the general theory of moments [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1980, **70**(8): 920~930
- 6 Y. L. Sheng, L. X. Shen. Orthogonal Fourier-mellin moments for invariant pattern recognition[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(6): 1748~1757
- 7 Z. L. Ping, Rigen Wu, Y. L. Sheng. Image description with chebyshev-Fourier moments[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2002, **19**(9): 1748~1754
- 8 Haiping Ren, Ziliang Ping *et al.*. Multidistortion-invariant image recognition with radial harmonic Fourier moments[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2003, **20**(4): 631~637
- 9 Z. L. Ping, H. P. Ren *et al.*. A generic orthogonal moments; jacobi-Fourier moments[J]. *J. Optoelectronics • Laser*, 2008, **19**(3): 388~393
平子良, 任海萍等. 一种广义正交不变图像矩: 雅可比-傅里叶矩[J]. *光电子·激光*, 2008, **19**(3): 388~393
- 10 A. B. Bhatia, E. Wolf. On the circular polynomials of Zernike and related orthogonal sets[J]. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1954, **50**(1): 40~48
- 11 C. H. Teh, R. T. Chin. On image analysis by the methods of moments[J]. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1998, **10**(4): 496~513
- 12 S. X. Liao, M. Pawlak. On image analysis by moments[J]. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1996, **18**(3): 254~266