

文章编号: 0253-2239(2010)02-0373-05

基于非局部扩散的图像去噪

王卫卫 韩 雨* 冯象初

(西安电子科技大学理学院数学系, 陕西 西安 710071)

摘要 利用空间非局部梯度构造了图像的非局部结构张量,通过对非局部结构张量的特征分解得到图像的一个特征空间,依据特征空间的特性设计了非局部扩散张量,建立了基于非局部扩散张量的各向异性扩散模型。该模型和局部各向异性扩散模型的本质不同在于,在扩散的过程中充分利用了图像的全局信息。优点是在去除噪声的同时,能更好地保护图像的边缘,尤其是纹理等图像的重要细节特征。

关键词 图像处理;非局部算子;扩散张量;去噪;纹理结构

中图分类号 TP391 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103002.0373

Image Denoising Based on Nonlocal Diffusion

Wang Weiwei Han Yu Feng Xiangchu

(Department of Mathematics, School of Science, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract The nonlocal structure tensor of images is defined by using the nonlocal spatial gradients. The eigenvectors of the nonlocal structure tensor consist in a characteristic space for the image, based on which the nonlocal diffusion tensor is constructed. Utilizing the nonlocal diffusion tensor, the nonlocal anisotropic diffusion model for image denoising is introduced. The model differs from the local anisotropic diffusion model in that, not only neighboring pixels but also pixels far away with similar intensities are concerned. The main advantage of taking those pixels far away but with similar intensities into consideration is that the model protects edges and textures much better than the local model.

Key words image processing; nonlocal operators; diffusion tensor; denoising; texture structure

1 引 言

图像是人们获取信息的重要来源,但是图像在采集、传输和存储过程中往往会受到噪声的干扰,因此去噪便成了图像处理中一个典型的问题。近年来,偏微分方程和变分方法被广泛应用于图像去噪^[1~3,7~9],其发展经历了由各向同性扩散到各向异性扩散^[3~8]、分数阶扩散^[9]、线性扩散到非线性扩散^[10]、局部到非局部^[11~16]等阶段。1996年,J. Weickert^[7]根据图像的梯度定义了扩散张量,建立了一个各向异性张量扩散模型。具体来讲,该模型根据图像梯度的幅度判断某一点属于光滑区域还是边缘,对边缘点(对应点的梯度非零),进一步根据梯

度的方向确定边缘点的法向和切向,然后依据这些判断来确定各点的扩散速率。将该模型应用于非纹理图像,可以很好地去除光滑区域的噪声,同时较好地保留边缘。但将该模型应用于含有较多纹理的图像时,不能很好的保护图像的纹理。原因在于,Weickert的张量扩散模型中的各种导数算子都是局部算子,因此每一点的扩散仅考虑了该点周围的局部信息,未考虑图像的全局信息。而事实上,纹理是图像像素值在空间上的某种变化模式^[17,18],而且这种变化模式在空间上具有一定的周期性,也就是说,纹理区域具有较强的全局相似性,应当采用非局部运算进行处理。

收稿日期: 2009-03-02; 收到修改稿日期: 2009-04-14

基金项目: 国家自然科学基金(60872138)资助课题。

作者简介: 王卫卫(1970—),女,博士,教授,主要从事图像处理的变分、偏微分方程方法等方面的研究。

E-mail: wwwang@mail.xidian.edu.cn

* 通信联系人。E-mail: ts840624@163.com

利用 Gilboa 定义的非局部梯度算子来构造非局部的结构张量^[11],并通过对非局部结构张量进行特征分解来选择全局最优的扩散方向,在此基础上设计非局部的扩散张量,建立一个非局部张量扩散模型,用数值实验来说明本文模型在去噪的同时,具有非常好的保护边缘和纹理的性能。

2 非局部张量扩散模型

设图像函数 $u(X) \in L^2(\Omega)$, 图像定义域 $\Omega \subset R^2$ 是一个有界开区域。函数 $u(X)$ 在 $X = (x_1, x_2) \in \Omega$ 点相对于点 $Y = (y_1, y_2) \in \Omega$ 的方向导数^[11]为

$$\partial_y u(X) = [u(Y) - u(X)] \sqrt{\omega(X, Y)}, \quad (1)$$

式中 $\omega(X, Y)$ 是权重,且满足对称性: $\omega(X, Y) = \omega(Y, X)$ 。

$u(X)$ 在 $X = (x_1, x_2)$ 点的非局部梯度 $\nabla_{\omega} u(X)$ 为 $u(X)$ 在 $X = (x_1, x_2)$ 点相对于所有点 $Y \in \Omega$ 的方向导数构成的向量^[11]

$$\nabla_{\omega} u(X) = [u(Y) - u(X)] \sqrt{\omega(X, Y)}, \quad Y \in \Omega. \quad (2)$$

对于矢量 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(X, Y)$, $(X, Y) \in \Omega$, 定义非局部散度 $\text{div}_{\omega} \mathbf{v}(X)$ 为^[11]

$$\text{div}_{\omega} \mathbf{v}(X) = \int_{\Omega} [\mathbf{v}(X, Y) - \mathbf{v}(Y, X)] \sqrt{\omega(X, Y)} dY. \quad (3)$$

基于前节的分析以及以上非局部算子的定义,给出如下非局部各向异性扩散方程

$$\begin{cases} \partial_t u(X, t) = \text{div}_{\omega}(\mathbf{D} \nabla_{\omega} u), & X \in \Omega, t > 0 \\ u(X, 0) = f(X), & X \in \Omega \end{cases} \quad (4)$$

式中 ∇_{ω} 为非局部梯度算子, div_{ω} 为非局部散度算子, \mathbf{D} 为对称正定的非局部扩散张量。希望通过扩散方程(4)由初始图像 $f(X)$ 演化得到一族噪声逐渐消除的图像 $[u(X, t)]_{t>0}$, 并且尽可能保留原始图像的边缘和纹理等细节。

为此,先讨论权重 $\omega(X, Y)$ 的计算,然后设计模型中的非局部扩散张量,这是(4)式的两个关键。

2.1 权的计算

权重 $\omega(X, Y)$ 的计算分成两步。首先定义 X 与 Y 两点之间的某种距离度量,然后根据距离度量定义权重。在文献[11]中定义的块距离

$$d_{\alpha}(X, Y) = \int_{\Omega} G_{\alpha}(Z) |f(X+Z) - f(Y+Z)|^2 dZ, \quad (5)$$

基础上,给出如下距离度量

$$\bar{d}_{\alpha}(X, Y) = d_{\alpha}(X, Y) + \|X - Y\|, \quad (6)$$

式中 $G_{\alpha}(Z)$ 是标准差为 α 的高斯函数, $\|X - Y\|$ 是 X 与 Y 两点之间的欧氏距离。

显然,(5)式中的块距离实际上度量了分别以 X 与 Y 两点为中心的圆形区域中像素块的灰度值之间的相似性,只要灰度值相近,哪怕 X 与 Y 的空间距离很远,按块距离度量它们也是相近的。与此不同,通常的图像局部处理仅考虑某个像素点周围按欧氏距离相近的点的信息。这正是非局部处理和局部处理区别的本质所在。但若按(5)式中的块距离寻找和 X 相近的点,则需要在整个图像域上计算这种块距离度量,计算量非常大,因此给出距离度量(6)式,即将两点的块距离度量(相似度)与欧氏距离结合起来。按照距离度量(6)式,两点及其周围像素点的灰度值相近并且两点的空间距离相近,这两点才是相近的点。实际计算时,可以固定欧氏距离的范围,在一定的范围内去寻找灰度值相近的点,这样可以减少计算量。

另外,(5)式中的块距离还存在一个缺陷,块的中心点的权比周围点的权大,自然降低了周围点对相似性的贡献。例如,若中心点 X 是一个噪声点,而其周围的点较为光滑,用(5)式来计算块距离会因为噪声点 X 的权值过大,不利于噪声的去除。因此,将上述 $G_{\alpha}(Z)$ 改写为

$$G_{\alpha, \beta}(Z) = \begin{cases} \beta, & Z = (0, 0) \\ \exp\left(-\frac{|Z|^2}{\alpha^2}\right), & \text{other} \end{cases} \quad (7)$$

(7)式将高斯函数 $G_{\alpha}(Z)$ 中心点的函数值 $G_{\alpha}(0)$ 取为 β ,且满足 $0 \leq \beta < 1$,这样可以适当“削弱”中心点的权值,在数值实验中取 $\beta = 0.5$ 。

基于像素点之间的距离度量(6)式,来确定权重 $\omega(X, Y)$ 。对扩散模型(4)式,希望灰度值相近的点在扩散过程中互相影响,因此灰度值相近的点权应取得大一些,也就是说,权函数 $\omega(X, Y)$ 应是 X 与 Y 之间的距离 $\bar{d}_{\alpha}(X, Y)$ 的减函数。为了计算简单,将权函数 $\omega(X, Y)$ 取为二值函数^[11],具体定义如下:

对于任一点 X ,在 X 的一个较大邻域 $S(X) \subset \Omega$ (相当于欧氏距离固定)内,寻找一个区域 A ,使其满足

$$A(X) = \arg \min_{A \subset S(X)} \left[\int_A \bar{d}_{\alpha}(X, Y) dY, |A| = \gamma \ll |S(X)| \right], \quad (8)$$

式中 $|A|$ 表示平面区域的面积, 离散情况下, 表示区域 A 中像素点的个数, γ 是一个面积参数。(8) 式的意义是, 在 X 的一个较大的邻域 $S(X)$ 内, 寻找在块距离意义下与 X 点最近, 也就是灰度值最相似的 γ 个点的集合, 记作 $A(X)$ 。任一点 $Y \in \Omega$ 与点 X 相关联的权定义为

$$\omega(X, Y) = \begin{cases} 1, & Y \in A(X) \text{ or } X \in A(Y) \\ 0, & \text{other} \end{cases} \quad (9)$$

图 1 所示是在“Barbara”图像中找到的相似块。图中“R”标示了一个需要匹配的块, 或称为参考块, 其它块是和参考块“R”相似的块。

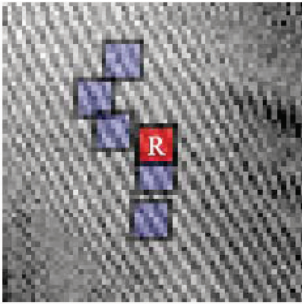


图 1 在含噪图像中找到的几个相似块的示意图

Fig.1 Several similar blocks in a noisy image

2.2 扩散张量 D 的设计

讨论(4)式中扩散张量 D 的设计问题。为此, 将局部结构张量推广为非局部结构张量, 然后在非局部结构张量基础上定义非局部扩散张量。

设 X 是图像中某一个固定点, Y_i 是图像中任意一点, 不妨设其个数为 N , 记 $a_i = \partial_{Y_i} u(X)$, 即图像 u 在 X 点相对于 Y_i 的方向导数, u 在 X 点的非局部梯度 $\nabla_{\omega} u(X) = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$ 是一个 N 维向量。类似于局部结构张量^[5], 定义图像中任一点的非局部结构张量为

$$\mathbf{J}_{\rho}(\nabla_{\omega} u_{\sigma}) = G_{\rho} * (\nabla_{\omega} u_{\sigma} \nabla_{\omega} u_{\sigma}^T), \quad (10)$$

式中 $G_{\rho}(Z) = \frac{1}{4\pi\rho} \exp\left(-\frac{|Z|^2}{4\rho}\right)$ 是 Gaussian 函数, ρ 为滤波尺度, $u_{\sigma} = G_{\sigma} * u$, 表示 u_{σ} 是由 u 与标准差为 σ 的 Gaussian 函数卷积得到。

容易证明 \mathbf{J}_{ρ} 是 $N \times N$ 阶对称正半定矩阵, 因而可以将 \mathbf{J}_{ρ} 进行特征分解:

$$\mathbf{J}_{\rho} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots \mu_n \end{bmatrix} \mathbf{P}^T, \quad (11)$$

式中 $\mu_i (i = 1, \dots, n)$ 是 \mathbf{J}_{ρ} 的 N 个特征值, \mathbf{P} 是正交

矩阵, 它的第 i 列对应 μ_i 的特征向量。此外, 由于 \mathbf{J}_{ρ} 的秩为 1, 又设 \mathbf{J}_{ρ} 的最大特征值 $\mu_{\max} = \mu_1 \geq 0$, 那么有 $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$ 。

为了更好地说明扩散张量的构造过程, 把由上述 N 个特征向量生成的空间称为点 X 的一个特征空间, 用符号 M_x 表示。 μ_{\max} 所对应的特征向量 \mathbf{P}_1 就是特征空间中变化最快的方向, 而其他特征值所对应的特征方向是特征变化较慢的方向, 我们希望沿着这些特征变化较慢的方向扩散较快, 而沿主特征方向扩散较小。因此扩散张量 D 应当与结构张量 \mathbf{J}_{ρ} 有相同的特征向量, 而其对应的特征值则表示在不同的特征方向上扩散程度的大小, 其选择方法如下:

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} 1, & \mu_{\max} = 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{-C_m}{\mu_{\max}^m}\right), & m \in N, C_m > 0, \mu_{\max} \neq 0 \end{cases}$$

$$\lambda_i(x) = 1, \quad (i = 2, \dots, n) \quad (12)$$

式中 m 和 C_m 都是常数。在数值试验中, 类似于 J. Weickert^[7] 在局部张量模型中的取法, 取 $m = 4$, $C_m = 3.31488$ 。扩散张量定义为

$$\mathbf{D} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{P}^T. \quad (13)$$

(12)式与(13)式表明, 在图像的均匀区域, 对应于 $\mu_i = 0, (i = 1, \dots, n)$ 的区域, (4) 式是各向同性扩散的, 有利于去除均匀区域的噪声; 在图像的边缘和纹理等细节周围, 对应于 $\mu_{\max} = \mu_1 > 0$, 模型(4)式沿特征变化较慢的方向扩散, 而沿特征变化最快的方向扩散很慢, 有利于保护图像的边缘、纹理等细节特征。

3 模型的离散化

对非局部梯度和非局部散度采用文献[11]中给出的离散化方式。设 u_I 表示图像上 $I = (i_1, i_2)$ 点的灰度值, ω_{IJ} 是 $\omega(X, Y)$ 的离散化, 与 I 点相似的点 J 构成一个邻域: $J \in N_I = \{J : \omega_{IJ} > 0\}$;

将 ∇_{ω} 离散化成 $\nabla_{\omega I}$:

$$\nabla_{\omega I} u_I = (u_I - u_J) \sqrt{\omega_{IJ}}, J \in N_I, \quad (14)$$

div_{ω} 离散化成 $\text{div}_{\omega I}$:

$$\text{div}_{\omega I} \mathbf{v}_{I,J} = \sum_{J \in N_I} (\mathbf{v}_{I,J} - \mathbf{v}_{J,I}) \sqrt{\omega_{IJ}}. \quad (15)$$

对(4)式采用时间显式差分格式来迭代求解:

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \tau \text{div}_{\omega I} (\mathbf{D} \cdot \nabla_{\omega I} u^n) \\ u^0 = f \end{cases}, \quad (16)$$

式中 τ 是时间步长。

为了进一步说明(4)式与局部扩散模型的本质不同^[7],对两个模型的离散格式进行比较。若对文献[7]中的模型也采用时间显式有限差分离散,其离散格式如下:

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \sum_{j \in \{N,S,E,W\}} c_j^n (u_j^n - u_i^n) \\ u_i^0 = f_I \end{cases}, \quad (17)$$

式中 N, S, E, W 是指与像素点 I 在垂直和水平方向相邻的北、南、东、西四个像素。而模型(4)式的离散格式为

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \sum_{j \in N_I} c_j^n (u_j^n - u_i^n) \\ u^0 = u_0 \end{cases}, \quad (18)$$

式中 $N_I = \{J : \omega_{IJ} > 0\}$ 是与像素点 I 最相似的像素点。可见,两个模型的主要差别在于,局部模型利用待恢复像素的空间局部信息来恢复该像素,而非局部模型利用和待恢复像素相似的所有像素来估计当前像素,充分利用了图像的全局信息。

4 数值实验结果及分析

为了研究模型在去噪方面的性能,进行了大量的数值实验,这里给出几个实验结果作为示例。

图 2 所示是含噪图像,所有噪声都是 Gaussian 白噪声,图 2(a)是一个含有纹理的合成图像,噪声标准差为 20,图 2(b)是含有丰富纹理细节的自然图像,噪声标准差为 10。利用 Weickert 的局部各向异性扩散模型得到的去噪图像如图 3 所示。利用(4)式所得的去噪图像如图 4 所示。对去噪后的图像进行局部放大后的对比实验结果如图 5 所示。用两种模型得到的去噪图像的峰值信噪比对比如表 1 所示。表 1 和图 3,图 4,图 5 均表明,给出的非局部各向异性扩散模型在去除噪声的同时,能够更好地保护图像的边缘和纹理等重要特征,更适于处理含有丰富纹理的图像。



图 2 含噪声图像。(a)噪声标准差 $\sigma=20$;(b) $\sigma=10$

Fig. 2 Textured images with noise.

(a) noise standard deviation $\sigma=20$; (b) $\sigma=10$

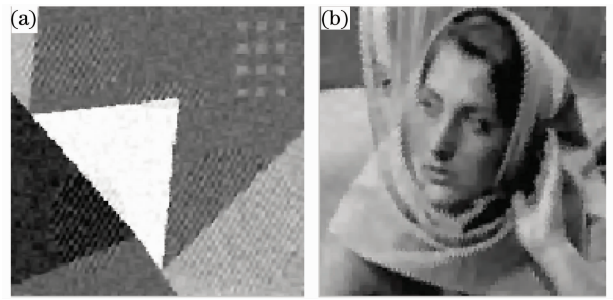


图 3 局部各向异性扩散模型(Weickert 模型)去噪结果

Fig. 3 Recovered images by using the local anisotropic diffusion model

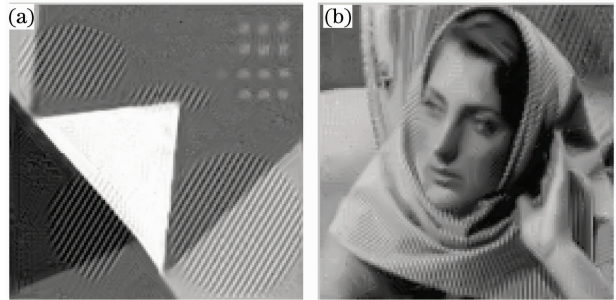


图 4 非局部各向异性扩散模型去噪结果

Fig. 4 Recovered images by using the nonlocal anisotropic diffusion model

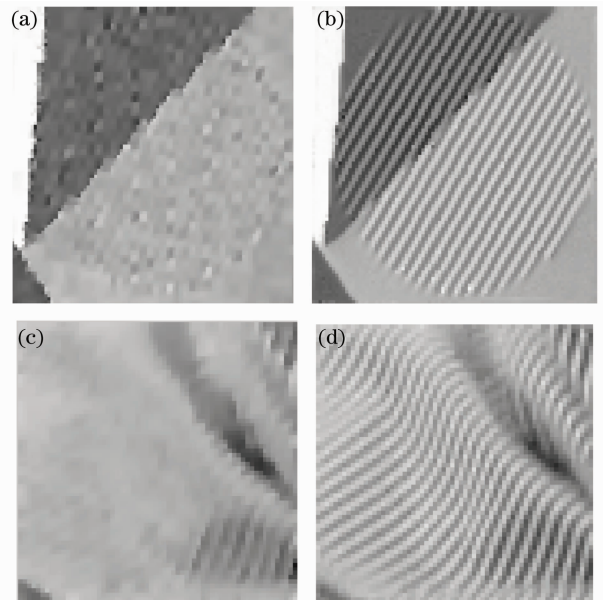


图 5 两个实验图像去噪后局部放大后的对比结果。

(a),(c)是局部扩散模型局部放大后的结果; (b),(d)是非局部扩散模型局部放大后的结果

Fig. 5 Enlarged locally results comparison of the above two experiments. (a),(c) recovered by local diffusion model, and (b),(d) recovered by nonlocal diffusion model

表 1 两种去噪方法的 PSNR 对比

Table 1 PSNR of the two denoising methods

	PSNR	
	a	b
Local model	28.8936	29.3418
Nonlocal model	29.2256	32.1676

图 5 中(a),(c)表明局部模型将图像的纹理细节当成噪声磨平了;而(b),(d)说明非局部模型在去噪的同时很好地保留了图像的纹理细节。出现这种效果的原因是设计了非局部的扩散张量,这种非局部扩散张量充分利用了图像的全局信息,并且能够在图像的一个特征空间中自适应的寻找扩散方向。从这一角度上看,是对文献[7]中根据传统的梯度算子来确定各点的扩散速率方法的改进。

5 结 论

利用非局部导数设计了非局部扩散张量,将 Weickert^[7]的局部各向异性扩散模型推广为非局部的各向异性扩散。数值实验表明,非局部模型不仅能很好地去除噪声,而且能很好地保护图像的边缘和纹理等重要特征。

参 考 文 献

- Huang Jianming, Shen Maozuo. Multiframe blind deconvolution restoration of atmospheric turbulence-degraded images based on noise characteristic [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(9): 1686~1690
黄建明, 沈忙作. 基于噪声特性的大气湍流退化图像多帧盲反卷积复原[J]. *光学学报*, 2008, **28**(9): 1686~1690
- Yao Yuhong, Li Yanfeng, Liu Bowen *et al.*. Analysis of real photonic crystal fibers by finite-difference frequency-domain method combined with digital image processing[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(7): 1384~1389
姚宇宏, 栗岩锋, 刘博文等. 基于图像处理的频域有限差分法用于实际光子晶体光纤的研究[J]. *光学学报*, 2008, **28**(7): 1384~1389
- G. Aubert, P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing*[M]. Stuttgart: Springer-Verlag, 2002
- P. Perona, J. Malik. A scale space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. *IEEE Transactions on PAMI*, 1990,

- 12**(07): 629~639
- F. Catte, P. L. Louis, J. M. Morel *et al.*. Image selective smoothing and edge-detection by nonlinear diffusion[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1992, **29**(01): 182~193
- L. Rudin, S. Osher, E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D*, 1992, **60**: 259~268
- J. Weickert. *Anisotropic diffusion in image processing* [M]. Stuttgart: Springer-Verlag, 1998
- Wang Weiwei, Feng Xiangchu. Anisotropic diffusion with nonlinear structure tensor[J]. *Multiscale Model. Simul.*, 2008, **7**(02): 963~977
- Bai Jian, Feng Xiangchu. Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, **16**(10): 2492~2502
- Bai Junqi, Chen Qian. Algorithm for infrared image noise filtering based on anisotropic diffusion[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(5): 866~869
白俊奇, 陈 钱. 基于各向异性扩散的红外图像噪声滤波算法[J]. *光学学报*, 2008, **28**(5): 866~869
- G. Gilboa, S. Osher. Nonlocal operators with applications to image processing[J]. *Multiscale Model. Simul.*, 2008, **7**(3): 1005~1028
- S. Kindermann, S. Osher, P. Jones. Deblurring and denoising of images by nonlocal functionals[J]. *Multiscale Model. Simul.*, 2005, **4**(4): 1091~1115
- G. Gilboa, J. Sarbon, S. Osher *et al.*. Nonlocal convex functional for image regularization [C]. UCLA CAM Report 2006, 06~57
- A. Elmoataz, O. Lezoray, S. Bougleux. Nonlocal discrete regularization on weighted graphs: a framework for image and manifold processing[J]. *IEEE Tr. On Image Processing*, 2008, **17**(07): 1047~1060
- A. Buades, B. Coll, J. M. Morel. A non-local algorithm for image denoising [J]. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2005, **2**(6): 60~65
- S. Zimmer, S. Didas, J. Weickert. A rotationally invariant block matching strategy improving image denoising with non-local means [C]. Proc. 2008 International Workshop on Local and Non-Local Approximation in Image Processing, 2008: 135~142
- Liu Delian, Zhang Jianqi. New texture segmentation-based approach for change detection in remote sensing image[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(8): 1177~1181
刘德连, 张建奇. 基于纹理分割的遥感图像的变化探测[J]. *光学学报*, 2006, **26**(8): 1177~1181
- Liu Hong, Mo Yulong. Modified texture segmentation algorithm based on multiresolution model[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **26**(6): 781~786
刘 泓, 莫玉龙. 改进的多分辨纹理图像分割算法[J]. *光学学报*, 2000, **26**(6): 781~786