

文章编号: 0253-2239(2010)12-3408-05

# 光相位调制传输系统中相位噪声的概率分布特性

席丽霞 王少康 张晓光

(北京邮电大学信息光子学与光通信教育部重点实验室, 北京 100876)

**摘要** 相位噪声是相位调制格式(PSK)光通信系统的主要信号损伤来源之一。简要介绍了线性相位噪声及非线性相位噪声的主要来源;通过理论推导分别得到了由多个级联放大器的自发辐射(ASE)噪声导致的线性相位噪声的概率密度函数(PDF)以及由于克尔效应导致的非线性相位噪声的 PDF;用 Matlab 编程软件进行多次数值统计得到了线性相位噪声、非线性相位噪声以及光纤传输系统中总的相位噪声的概率分布,并与理论结果及高斯分布模型进行了比较。结果表明,当入射信号光功率较低时,链路中线性相位噪声占优势,高斯分布模型能较准确地反映实际链路中的相位噪声分布;而当入射信号光功率较大时,链路中非线性相位噪声将占优势,采用高斯分布模型不再准确。

**关键词** 光纤通信;相位噪声;概率分布密度;自发辐射噪声;克尔效应

中图分类号 O436 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103012.3408

## Probability Density of Phase Noise in Optical Phase-Modulated Transmission Systems

Xi Lixia Wang Shaokang Zhang Xiaoguang

(Key Laboratory of Information Photonics and Optical Communications, Ministry of Education, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

**Abstract** Phase noise is considered as one of the main sources of signal impairments in optical phase-shift-keying (PSK) systems. The main sources of linear phase noise and nonlinear phase noise are introduced. The linear phase noises arise from amplified spontaneous emission (ASE) of each in-line amplifier and the nonlinear phase noises are induced by the fiber Kerr effect. The probability density functions (PDF) of linear phase noise and nonlinear phase noise are obtained respectively by theoretical analysis. The probability distribution of linear phase noise, nonlinear phase noise and total phase noise in fiber links are also obtained by statistical simulation, and are compared with Gaussian distribution. The results show that the Gaussian model can reflect noise distribution in practical fiber links when input signal power is low, while failed to accurately characterize systems when the nonlinear contribution to phase noise becomes dominant.

**Key words** optical fiber communication; phase noise; probability density; spontaneous emission noise; Kerr effect

## 1 引 言

相位调制码(如 DPSK, DQPSK 及 8-PSK 等)已成为 40 Gb/s 以及更高传输速率光通信系统的首选调制格式之一<sup>[1,2]</sup>。相位调制格式是将要传输的信息加载到光载波的相位上,因此光纤链路中的相位噪声成为相位调制格式光通信系统信号损伤的主要来源之一。相位噪声对传输系统性能的影响以及

相位信息恢复技术已引起了业界的关注<sup>[3~10]</sup>。目前,人们已经搞清楚了相位噪声的种类及产生的机理<sup>[5,6,9,10]</sup>,并就非线性相位噪声对不同速率不同相位调制格式传输系统的性能影响进行了详细研究<sup>[3~6]</sup>,同时还就非线性相位噪声的分布特性进行了初步探讨<sup>[7]</sup>。然而大多数文献主要针对非线性相位噪声进行讨论,同时考虑线性和非线性相位噪声

收稿日期: 2010-02-26; 收到修改稿日期: 2010-05-21

基金项目: 国家 863 计划(2009AA01Z224)和北邮青年创新专项基金(BUPT 2009RC0413)资助课题。

作者简介: 席丽霞(1973—),女,博士,副教授,主要从事光通信系统信号损伤恢复方面的研究。

E-mail: xilixia@263.net

分布特性的文献很少。

本文从概率论出发,对光纤链路中的相位噪声从线性和非线性两方面进行了详细分析。首先通过理论推导得到了由于放大器自发辐射噪声(ASE)导致的多个放大器级联之后的线性相位噪声的概率密度函数(PDF);然后通过理论分析和数值统计得到了非线性相位噪声的概率分布特性;最后用多次统计的方法得到了相位调制系统接收端的相位概率分布特性,并与文献[4]中使用的高斯分布模型进行了比较,结果表明,使用高斯模型进行系统性能分析的结果并不十分准确。

## 2 光纤链路中相位噪声的来源

相位噪声包括线性相位噪声和非线性相位噪

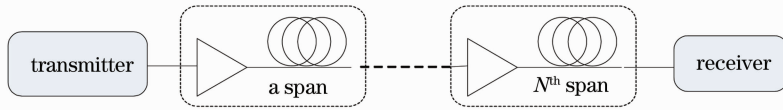


图 1 光纤传输链路模型

Fig. 1 Transmission model of a typical fiber link

图 2 形象地表现了在忽略损耗时,链路上第  $K(K = 1, 2, \dots, N)$  段内光信号场的演化过程。其中,  $E_{K0}$  为进入此段的初始光场,  $n_K$  为这个光放大器引入的 ASE 噪声,  $\delta\phi_L$  为 ASE 导致的相位噪声,  $\Phi_{NL}$  及  $\delta\phi_{NL}$  分别为由于克尔效应产生的非线性相移和非线性相位噪声。系统中的相位噪声总和为  $\delta\phi = \delta\phi_L + \delta\phi_{NL}$ 。

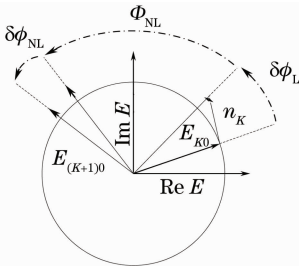


图 2 第  $K$  个跨段内光场的演化

Fig. 2 Evolution of optical field in the  $K^{\text{th}}$  span

## 3 相位噪声分布特性

### 3.1 线性相位噪声

各个光放大器引入的 ASE 噪声线性地加到信号场上,称为线性噪声。ASE 噪声的频谱非常宽,一般为信号谱宽的上百倍,其统计特性服从高斯分布,通过有限带宽的光滤波器后,可当作窄带高斯噪声处理。

线性相位噪声主要由激光器本身的相位抖动以及链路中光放大器中自发辐射的随机相位分布引起。对于非线性相位噪声,则是由克尔效应将放大器产生的幅度噪声转变而成的。在单信道传输系统中,主要通过自相位调制将放大器产生的幅度噪声及光纤色散引起的波形畸变转变成非线性相位噪声;对于波分复用系统,则主要通过交叉相位调制和四波混频将放大器产生的幅度噪声及色散引起的波形畸变转变成非线性的相位噪声。

本文以单信道系统为例,分析由 ASE 噪声导致的线性相位噪声和自相位调制导致的非线性相位噪声的分布特性。采用的光纤传输链路模型如图 1 所示,它包含  $N$  段长度相同的区间。

第  $K$  个光放大器产生的 ASE 噪声由两个相互正交的高斯型随机变量组成<sup>[5]</sup>:

$$n_K = x_K + jy_K, \quad (1)$$

式中  $x_K$  和  $y_K$  各自独立,具有相同的分布且均值为零。如果用物理意义明确的指数(幅度-相位)方式来表示 ASE 噪声,则有  $n_K = \rho_K \exp(i\varphi_K)$ ,其中  $\rho_K$  和  $\varphi_K$  分别表示自发辐射噪声的幅度和相位。值得注意的是,从复数到指数的变换并非线性过程,高斯性将被破坏,即在指数表示形式下的  $\rho_K$  和  $\varphi_K$  不再服从高斯分布。设两个自由度  $x_K$  和  $y_K$  的方差(即功率)均为  $\sigma_0^2$ ,则其包络  $\rho_K$  服从瑞利分布,相位  $\varphi_K$  服从均匀分布,如下式所示:

$$p(\rho_K) = \frac{\rho_K \exp\left(-\frac{\rho_K^2}{2\sigma_0^2}\right)}{\sigma_0^2}, \quad p(\varphi_K) = \frac{1}{2\pi}. \quad (2)$$

本文分别通过统计方式和理论公式得到了  $\rho_K$  和  $\varphi_K$  的概率密度分布,如图 3 所示,可以看出这两种结果符合得很好。

多个光放大器产生的 ASE 噪声叠加到光场上产生相位噪声的线性部分。这里运用概率理论,在理论上得到了线性相位噪声的概率密度函数。忽略光纤的非线性效应,通过  $N$  个区间后,信号场为

$$E_N = E_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_N = E_0 + \sum_{K=1}^N x_K + j \sum_{K=1}^N y_K = X + jY, \quad (3)$$

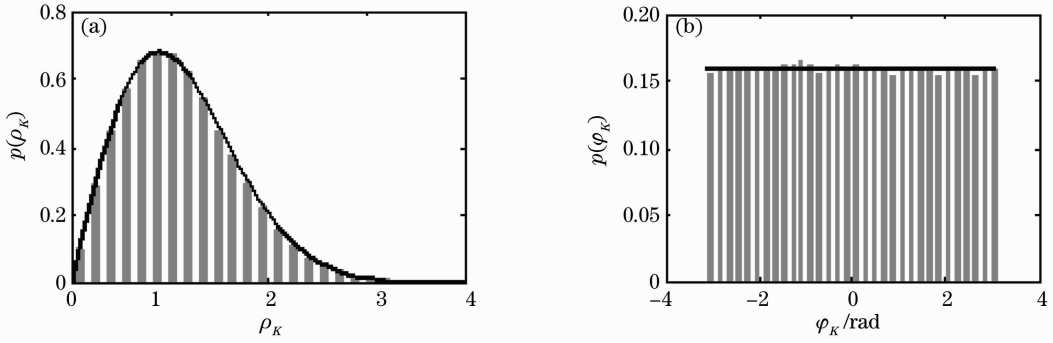


图3 单个放大器的自发辐射噪声的概率密度分布。(a)幅度概率密度分布,(b)相位概率密度分布

Fig. 3 Probability density distribution of ASE noise. (a) Amplitude probability density distribution, (b) phase probability density distribution

式中  $E_0$  是传输信号光场,  $n_K$  ( $K = 1, 2, \dots, N$ ) 是第  $K$  段的光放大器产生的噪声。对于满足高斯分布的独立变量  $x_K$  和  $y_K$ ,  $N$  个相同变量求和之后还具有相同的分布, 只是方差  $\sigma^2 = N\sigma_0^2$ , 因此接收到的信号的概率分布密度函数满足

$$p(X, Y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(X - E_0)^2 + Y^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (4)$$

下面计算  $E_N$  的相位分布特性。如果令  $\rho$  和  $\varphi$  分别为  $E_N$  的幅度和相位, 则有  $X = \rho \cos \varphi$ ,  $Y = \rho \sin \varphi$ , 则信号的概率分布函数又可以表示为  $\rho$  和  $\varphi$  的联合概率分布:

$$p(\rho, \varphi) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{\rho^2 + E_0^2 + 2\rho E_0 \cos \varphi}{2\sigma^2}\right]. \quad (5)$$

然后计算  $\varphi$  的边缘概率分布, 最终得到  $E_N$  的线性相位噪声  $\Phi_1$  的概率分布密度函数

$$p_{\Phi_1}(\varphi) = \int_0^{\infty} p(\rho, \varphi) d\rho = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{E_0^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{E_0 \cos \varphi}{\sigma} \exp\left(-\frac{E_0^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma^2}\right) \operatorname{erfc}\left(-\frac{E_0 \cos \varphi}{\sqrt{2}\sigma}\right), \quad (6)$$

信噪比较大时, 第一项值很小, 可忽略, 因此有

$$p_{\Phi_1}(\varphi) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{E_0 \cos \varphi}{\sigma} \exp\left(-\frac{E_0^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma^2}\right) \operatorname{erfc}\left(-\frac{E_0 \cos \varphi}{\sqrt{2}\sigma}\right). \quad (7)$$

取  $N = 32$ , 信噪比  $\rho_s = 18$  (对应于高斯信道误码率为  $10^{-9}$ ), 由 (7) 式可得到通过  $N$  个区间后, 仅

受线性噪声影响的信号场的相位概率分布; 在相同的条件下, 利用 (3) 式数值统计线性相位噪声的概率分布并得到与之对应的高斯型分布曲线, 结果如图 4 所示。将统计结果与解析结果作对比发现, 高斯分布与理论和统计结果得到的曲线, 基本形状非常类似, 而仅峰值大小不同, 且相差仅为 2%, 因此可以采用高斯模型来描述线性相位噪声的概率分布。

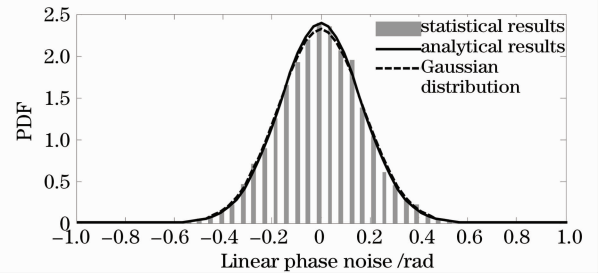


图4 线性相位噪声的概率分布密度

Fig. 4 Probability density function of linear phase noise

### 3.2 非线性相位噪声

由于克尔效应产生的包含了相位噪声的非线性相移表达式为

$$\Phi_{NL} = \gamma L_{\text{eff}} \{ |E_0 + n_1|^2 + |E_0 + n_1 + n_2|^2 + \dots + |E_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_N|^2 \}, \quad (8)$$

式中  $L_{\text{eff}}$  为每个区间的非线性有效长度,  $\gamma$  为光纤的非线性系数。通过解析方式直接得到  $\Phi_{NL}$  的概率分布密度非常困难。2003 年, Ho<sup>[7]</sup> 用求特征函数的方法得到了克尔效应导致的非线性相位噪声的概率密度。具体思路如下: 鉴于 (8) 式中  $\gamma L_{\text{eff}}$  是常数, 不影响最终  $\Phi_{NL}$  的归一化概率分布, 暂不考虑。令  $E_0 = A$  为实数, 将 (8) 式改写为

$$\begin{cases} \Phi_{NL} = \varphi_2 + \varphi_1 \\ \varphi_1 = |A + x_1|^2 + |A + x_1 + x_2|^2 + \dots + |A + x_1 + \dots + x_N|^2, \\ \varphi_2 = y_1^2 + |y_1 + y_2|^2 + \dots + |y_1 + \dots + y_N|^2 \end{cases} \quad (9)$$

由于  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  相互独立,故  $\Phi_{NL}$  的特征函数可以写为

$$\psi_{\Phi_{NL}}(\nu) = \psi_{\varphi_1}(\nu) \psi_{\varphi_2}(\nu) = E[\exp(j\nu \varphi_1)] E[\exp(j\nu \varphi_2)], \quad (10)$$

将(9)式代入(10)式,经过计算最终得到<sup>[7]</sup>

$$\psi_{\Phi_{NL}}(\nu) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - 2j\nu \sigma_0^2 \lambda_k} \exp\left[\frac{j\nu NA^2 (\mathbf{v}_k^T \boldsymbol{\omega})^2 / \lambda_k}{1 - 2j\nu \sigma_0^2 \lambda_k}\right], \quad (11)$$

式中  $\boldsymbol{\omega} = [N, N-1, \dots, 2, 1]^T$ ,  $\lambda_k$  和  $\mathbf{v}_k$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) 为协方差矩阵  $\mathbf{C}$  的本征值和本征向量,协方差矩阵  $\mathbf{C}$  满足:  $\mathbf{C} = \mathbf{M}^T \mathbf{M}$ , 其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

通过对(11)式进行傅里叶变换得到非线性相位噪声的概率密度函数。另外还通过数值统计的方法得到了归一化的非线性相位噪声的概率密度分布,如图5所示,可见这两种结果符合得很好。但与高斯模型的分布曲线有明显的差别。

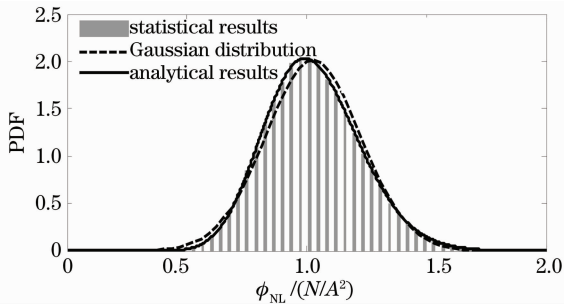


图5 归一化的非线性相位噪声的概率分布密度  
Fig. 5 Probability density function of normalized nonlinear phase noise

### 3.3 综合考虑线性和非线性相位噪声

考虑综合线性和非线性的总的相位噪声分布。由于线性相位噪声和非线性相位噪声并非统计独立,从概率论出发求解接收端光信号的相位概率分布解析式非常困难。采用图1所示的传输链路模型,取32个跨段,每个跨段的光纤长度  $L=60$  km,光纤的非线性系数  $\gamma=2 \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1}$ ,光纤的损耗系数  $\alpha=0.2 \text{ dB/km}$ ,入射信号光功率  $P_0=5 \text{ mW}$ ,掺铒光纤放大器(EDFA)的自发辐射噪声假定为白高斯噪声,综合考虑线性的和非线性的相位噪声,运用Matlab软件自行编程得到光纤链路末端的光场  $E_{\text{out}} = E_N \exp(-i\Phi_{NL})$ ,其中  $E_N$  和  $\Phi_{NL}$  分别对应(3)式和(8)式。仿真实验中,传输  $2 \times 10^{10}$  bit 信息,通

过多次数值统计,直接得到接收信号的相位概率分布曲线,如图6所示,并与文献[4]中的高斯型分布曲线进行比较。从图6看出,综合考虑线性和非线性噪声时,实际的接收相位  $\phi$  的分布与高斯分布有较明显的区别,表现在实际  $\phi$  分布曲线的峰值明显偏离均值  $m_\phi = -1.0 \text{ rad}$  点,且最高点两侧的拖尾并不对称。在当前假设下,  $\phi < -1.06 \text{ rad}$  及  $\phi \geq -0.17 \text{ rad}$  时,使用高斯模型会低估实际的分布概率,而在  $-1.06 \text{ rad} \leq \phi \leq -0.17 \text{ rad}$  时,实际的接收相位分布概率小于高斯模型。

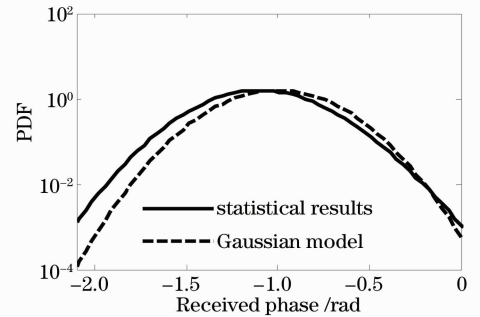


图6 接收端信号相位的概率分布密度

Fig. 6 Probability density function of received phase

利用上面的数值仿真模型,改变入射光的光功率  $P_0$ ,并且保证到达接收机的信噪比  $\rho_s = 18$  的条件下,计算得到了链路中的相位噪声方差随  $P_0$  的变化曲线,如图7所示。可以看出,在入射光功率  $P_0 = 4.5 \text{ mW}$  时,线性相位噪声的方差与非线性相位噪声的方差相等;当入射光功率小于  $4.5 \text{ mW}$  时,线性相位噪声在总的相位噪声中占有主导作用,而非线性相位噪声较小,采用高斯模型进行系统评价就可以;但随入射光功率的增加,非线性相移增大,非线性相位噪声开始占优势,使用高斯模型将会造成较大的偏差。

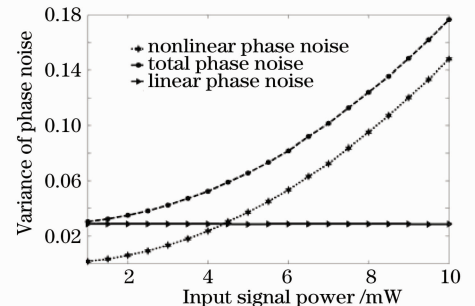


图7 相位噪声方差分布

Fig. 7 Distribution of variance of phase noise

## 4 结 论

讨论了线性相位噪声和非线性相位噪声的来

源,理论推导和数值仿真了线性相位噪声和非线性相位噪声的概率分布特性,并与较通用的高斯模型作了比较。结果表明,对线性相位噪声,高斯模型能较准确地反映实际链路中的噪声分布,但不能够准确地描述受非线性相位噪声影响严重的系统。因此对于不同传输距离的光纤链路,采取何种模型需具体分析。本文对于相位调制的光通信系统中光接收机设计、光波相位信息恢复、以及全光再生的实现机制方面可以提供一定的理论依据。

### 参 考 文 献

- 1 Shao Yufeng, Li Jia, Cheng Lili *et al.*. Four serial differential phase-shift keying modulation formats for 100 Gb/s transmission applications [J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(3): 574~580  
邵宇丰, 李 佳, 程黎黎 等. 四种级联差分相位调制码的 100 Gb/s 传输[J]. *中国激光*, 2009, **36**(3): 574~580
- 2 Xianfeng Tang, Xiaoguang Zhang, Lixia Xi *et al.*. A scheme for improving the performance of 100-Gb/s polarization-multiplexed RZ33 DQPSK signals using the phase regenerator and PMD compensator [C]. OFC/NFOEC 2010, JWA25
- 3 L. D. Coelho, O. Gaete, E. -D. Schmidt *et al.*. Impact of PMD and nonlinear phase noise on the global optimization of DPSK and DQPSK systems [C]. OFC/NFOEC 2010, OWE5
- 4 J. P. Gordon, L. F. Mollenauer. Phase noise in photonic communication systems using linear amplifiers [J]. *Opt. Lett.*, 1990, **15**(23): 1351~1353
- 5 Ho, Keang-Po. Phase-Modulated Optical Communication Systems [M]. Berlin: Springer, 2005. 143~148
- 6 Boivin, David. Optical Phase-Modulated Systems: Numerical Estimation and Experimental Measurement of Phase Jitter [D]. Georgia Institute of Technology, 2006. 45~49
- 7 K. -P. Ho. <http://arxiv.org/abs/physics/0301018>, 2003
- 8 Qin Xi, Chen Yong, Cao Jihong *et al.*. Influence of dispersion compensation schemes on phase noise of phase modulation systems [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(1): 64~68  
秦 曦, 陈 勇, 曹继红 等. 色散补偿方式对相位调制系统中相位噪声的影响[J]. *中国激光*, 2007, **34**(1): 64~68
- 9 Tang Xianfeng, Zhang Xiaoguang, Xi Lixia. Analysis of phase regeneration of DPSK/DQPSK signals based on phase-sensitive amplification [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2009, **7**(5): 380~383
- 10 Xi Lixia, Xie Yangge, Tang Xianfeng *et al.*. A semiconductor optical amplifier based regenerator for phase modulated signals [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(4): 940~943  
席丽霞, 谢扬戈, 唐先锋 等. 基于半导体光放大器的相位调制信号再生器[J]. *光学学报*, 2010, **30**(4): 940~943