

文章编号: 0253-2239(2010)12-3367-06

高阶奇异值分解在气动光学效应分析中的应用

许 东 刘浩伟 吴 琳 安永泉

(北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院, 北京 100191)

摘要 提出将湍流三维密度场数据用张量表示,利用高阶奇异值分解得到的较大奇异值及对应特征向量对其进行降秩处理,获得湍流密度场的最佳近似,从而实现了三维湍流密度场空间大尺度相干结构的提取。降秩近似后的结果保留了原始流场的主要信息,对气动光学效应的仿真结果表明,重构流场能够较好地反映原始流场对光传输的影响。

关键词 气动光学;最佳近似;高阶奇异值分解;湍流

中图分类号 V24932⁺6 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20103012.3367

High-Order Singular Value Decomposition Applied in Aero-Optical Effects Analysis

Xu Dong Liu Haowei Wu Lin An Yongquan

(School of Instrumentation Science and Opto-Electronics Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract Third-order tensor is introduced to represent 3D density field of turbulence. The third-order tensor is decomposed with high-order singular-value decomposition (HOSVD) method to get singular values and corresponding eigenvector. Several great singular values and corresponding eigenvectors are used to reconstruct the density field which is the optimal approximation of the original flow field and gives the large-scale coherent structure in 3D turbulence. The reconstructed 3D density field involves the dominated information of the original flow field. The simulation results of aero-optical effect give the evidences that light transmission in reconstructed field is similar to original field.

Key words aero-optics; optimal approximation; high-order singular-value decomposition (HOSVD); turbulence

1 引 言

红外成像探测与制导系统具有全天候工作、可选择攻击目标、自动目标识别以及较强的抗干扰能力,是现代探测与制导技术的研究热点之一。当飞行器在大气层内高速飞行时,其光学头罩与大气之间产生剧烈的相互作用,会在头罩周围产生复杂的湍流边界层。目标发出的光线在穿过湍流边界层时,光线的波前发生畸变,进而导致光学探测器上的图像质变差,大大影响了系统探测、识别和跟踪目标的能力,降低了探测和制导精度。为了提高红外成像系统的探测能力,有必要定量计算气动光学效

应的影响,并采取有效的方法补偿和校正这种影响^[1,2]。

国外气动光学效应的研究表明,折射率场的瞬时结构主要是由大尺度湍流结构产生的,流场引起的光学畸变主要依赖于大尺度结构的动态特性^[3]。因此,要对波前畸变进行补偿或校正,需要研究流场大尺度结构的动态特性。从庞杂的流场数据中提取大尺度相干结构,分析大尺度相干结构产生的气动光学畸变,以近似模拟全流场产生的气动光学畸变的情况,可以大大简化湍流场气动光学效应分析的复杂程度。

收稿日期: 2010-03-04; **收到修改稿日期**: 2010-04-12

基金项目: 国家自然科学基金(60878051)资助课题。

作者简介: 许 东(1973—),男,博士,副教授,主要从事成像制导、图像与信号处理、模式识别等方面的研究。

E-mail: xudong@buaa.edu.cn

本征正交分解(POD)作为一种十分有效的流场大尺度相干结构推演方法在湍流研究中取得了很大的成果^[4~6],并应用于气动光学的研究中。Cicchiolo等^[7,8]利用POD研究了二维时变流场,分析了分解后低阶模态系数的时变规律及其对气动光学畸变贡献率的影响。吴琳等^[9]在Cicchiolo的基础上利用奇异值分解(SVD)实现了二维湍流场的本征正交分解,并对时间平均的湍流折射率场进行研究,分析了不同截面上奇异值与气动光学畸变的关系。但这些研究大多局限于从三维流场中取不同截面的二维数据分别进行本征正交分解,处理结果只是每个截面的最佳近似,破坏了不同截面之间数据的相关性。真实的流场是三维的,只有对完整三维流场数据进行分析,才可能得到更接近真实物理结构的三维流场大尺度相干结构。

由Lathauwei等^[10,11]提出的高阶奇异值分解(HOSVD)是矩阵奇异值分解在高阶张量中的推广,能够实现对高阶张量主要成分的分析。利用这一方法对湍流三维密度场数据进行降秩处理,从而实现三维流场大尺度相干结构的提取,并利用重构的结果分析了湍流场对气动光学效应畸变的影响。

2 湍流场相干结构及光在其中的传输

湍流数值模拟和试验观察都证实,湍流并非是完全不规则的运动,表面上看来不规则的运动中具有可检测的、有明确周期和外形的相干结构(Coherent structure),又称拟序结构^[12]。例如,Trolinger^[13]认为从结构上分析湍流是由许多不同尺度的涡旋组成的,其模型如图1所示。相干结构对湍流的脉动和演化都起着主宰作用。

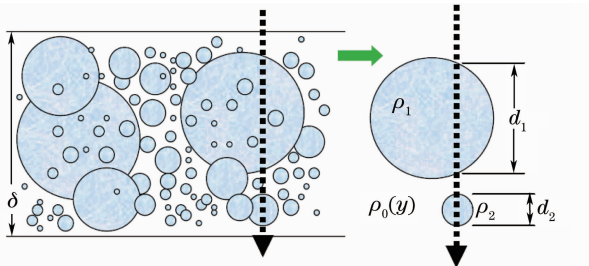


图1 湍流中的涡结构模型

Fig.1 Vortices structure model in turbulence

气动光学研究也表明湍流相干结构尺度的大小与光学系统的图像畸变密切相关。大尺度相干结构集中了湍流场主要的密度梯度分布,对光传输的影响起主要作用。由于湍流中大尺度相干结构的尺度要远远大于光波波长,可以利用几何光学中的光线

追迹法计算光线传输的光程长

$$L = \sum_i (1 + K_{GD}\rho_i)d, \quad (1)$$

式中 K_{GD} 为Gladstone-Dale常数,可取经验公式为 $K_{GD} = 0.133 + 0.00092/\lambda^2$,波长 λ 单位取为 μm , K_{GD} 单位取 cm^3/g ; ρ_i 为第 i 个小单元的节点处的密度值; d 为网格尺寸。

选择真空中($\rho=0$)传输的光线为参考光线,则可利用下式计算每条光线在流场中传输产生的光程差,即可获得光波前畸变(OPD)

$$D = \sum_i K_{GD}\rho_i d. \quad (2)$$

3 高阶奇异值分解与重构

3.1 高阶奇异值分解

对于 N 阶实张量 $\mathcal{A} \in R^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$, $I_1, I_2, \dots, I_N \in N$,有如下分解形式^[10]:

$$\mathcal{A} = \mathcal{G} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_N \mathbf{U}^{(N)}, \quad (3)$$

式中 \times_n 为张量与矩阵的 n -模乘积。对于给定张量 $\mathcal{A} \in R^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ 与矩阵 $\mathbf{U} \in R^{J_n \times I_n}$,其 n -模乘积是一个 $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_N$ 阶张量,张量中的元素由下式给定:

$$(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_N} u_{j_n i_n}, \quad (4)$$

式中 $a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_N}$ 和 $u_{j_n i_n}$ 分别为张量 \mathcal{A} 和矩阵 \mathbf{U} 中的元素。

\mathcal{G} 为 $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N$ 阶核心张量,其任意两个子张量正交,即对于任意 $n=1,2,\dots,N$ 和 $i_n=1,2,\dots,I_n$ 满足

$$\langle \mathcal{G}_{i_n=p}, \mathcal{G}_{i_n=q} \rangle = 0, \quad p \neq q. \quad (5)$$

对于任意 $n=1,2,\dots,N$,核心张量 \mathcal{G} 的子张量 $\mathcal{G}_{i_n=i}, i=1,2,\dots,I_n$ 是根据其Frobenius范数 $\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{G}_{i_n=i}\|$ 的大小排序的,即有

$$\sigma_{i=1}^{(n)} \geq \sigma_{i=2}^{(n)} \geq \dots \geq \sigma_{i=I_n}^{(n)}, \quad (n=1,\dots,N). \quad (6)$$

$\mathbf{U}^{(n)} = (\mathbf{U}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{U}_{I_n}^{(n)})$ 为阶数为 $I_n \times I_n$ 的酉矩阵。

定义张量 \mathcal{A} 的 n -模展开矩阵 $\mathbf{A}_{(n)} \in R^{I_n \times (I_1 I_2 \dots I_{n-1} I_{n+1} \dots I_N)}$ 通过将张量中元素重新排列获得,图2给出了三阶张量的展开过程。

高阶张量的高阶奇异值分解与其展开矩阵的奇异值分解密切相关,可以把 N 阶张量 \mathcal{A} 的高阶奇异值分解转化为 \mathcal{A} 的 N 个 n -模展开矩阵 $\mathbf{A}_{(n)}, n=1,\dots,N$ 的奇异值分解。

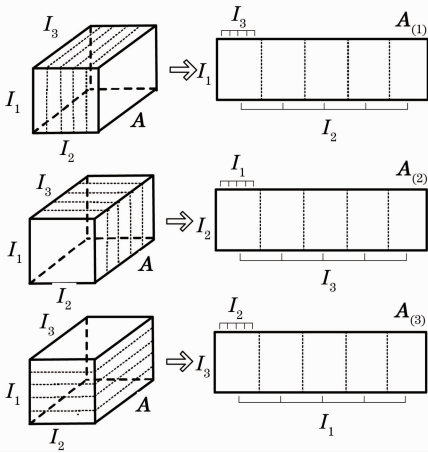


图 2 三阶张量的矩阵展开

Fig. 2 Third-order tensor is unfolded into matrices

对张量 \mathcal{A} 的 n -模展开矩阵 $\mathbf{A}_{(n)}$, $n=1, 2, \dots, N$ 进行奇异值分解可得

$$\mathbf{A}_{(n)} = \mathbf{U}^{(n)} \boldsymbol{\Sigma}^{(n)} \mathbf{V}^{(n)H}, \quad (7)$$

式中 $\mathbf{U}^{(n)}$ 和 $\mathbf{V}^{(n)}$ 是酉矩阵,

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(n)} = \text{diag}(\sigma_{i=1}^{(n)}, \sigma_{i=2}^{(n)}, \dots, \sigma_{i=I_n}^{(n)}).$$

利用得到的左特征矩阵 $\mathbf{U}^{(n)}$, 可以计算得到核心张量 \mathcal{S} :

$$\mathcal{S} = \mathcal{A} \times_1 \mathbf{U}^{(1)H} \times_2 \mathbf{U}^{(2)H} \times_3 \dots \times_N \mathbf{U}^{(N)H}. \quad (8)$$

对于三阶张量 $\mathbf{A} \in R^{I_1 \times I_2 \times I_3}$, 可分解为

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(3)}. \quad (9)$$

其分解过程可用图 3 所示。

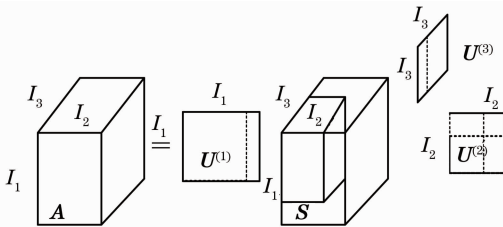


图 3 三阶张量奇异值分解

Fig. 3 Illustration of HOSVD for a third-order tensor

3.2 张量的重构

基于高阶奇异值分解的张量重构本质上是对张量的降秩处理。定义 N 阶张量 \mathcal{A} 的 n -秩为

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = \text{rank}[\mathbf{A}_{(n)}], n=1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

实质上,张量的 n -秩为矩阵秩的推广。若 N 阶张量 \mathcal{A} 的 n -秩分别为 $\text{rank}_1(\mathcal{A})=R_1, \text{rank}_2(\mathcal{A})=R_2, \dots, \text{rank}_N(\mathcal{A})=R_N$, 可简记为 $\text{rank}-(R_1, R_2, \dots, R_N)$ 。

对于矩阵 \mathbf{A} , 通过奇异值分解可得

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \quad (11)$$

式中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ 为矩阵 \mathbf{A} 的非零奇异值, $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ 为对应于 λ_i 的单位正交奇异向量。奇异值大小

代表了矩阵 \mathbf{A} 投影到对应特征向量空间上信息量的多少。只取前 d 个奇异值及对应的特征向量进行重构可得

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T. \quad (12)$$

与此类似,对于张量 \mathcal{A} 也可以只取其 n -模展开矩阵的前几阶较大的奇异值和特征向量进行重构,从而实现张量的低阶最佳近似,称为张量 \mathcal{A} 的最佳 $\text{rank}-(R_1, R_2, \dots, R_N)$ 近似。

3.3 重构算法

根据矩阵理论知识,较大特征值对应的特征向量包含了较多的密度场特征信息,因此可以选取前 t 个较大特征值所对应的特征向量就可以近似的表示任意的密度场特征信息组合。针对三阶张量 $\mathbf{A} \in R^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ 进行高阶奇异值分解,并利用其 n -模展开矩阵的前几阶较大的奇异值和对应的特征向量进行重构,得到最佳 $\text{rank}-(R_1, R_2, R_3)$ 近似。具体算法如下^[11]:

1) 将张量 \mathcal{A} 展开,得到三个 n -模展开矩阵 $\mathbf{A}_{(1)}, \mathbf{A}_{(2)}, \mathbf{A}_{(3)}$, 维数为 $I_1 \times (I_2 I_3), I_2 \times (I_1 I_2), I_3 \times (I_1 I_2)$;

2) 用(7)式对展开矩阵 $\mathbf{A}_{(1)}, \mathbf{A}_{(2)}, \mathbf{A}_{(3)}$ 分别进行奇异值分解,得到左特征矩阵 $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}$;

3) 对 n -模展开矩阵 $\mathbf{A}_{(1)}, \mathbf{A}_{(2)}, \mathbf{A}_{(3)}$ 分别取前 R_1, R_2, R_3 个最大奇异值及其对应的左特征矩阵 $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}$ 中的特征向量,构成新的特征矩阵 $\mathbf{W}^{(1)}, \mathbf{W}^{(2)}, \mathbf{W}^{(3)}$ 。利用(13)式计算核心张量 \mathcal{S} 在特征矩阵 $\mathbf{W}^{(1)}, \mathbf{W}^{(2)}, \mathbf{W}^{(3)}$ 张成的子空间上的投影

$$\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{A} \times_1 \mathbf{W}^{(1)H} \times_2 \mathbf{W}^{(2)H} \times_3 \mathbf{W}^{(3)H}. \quad (13)$$

4) 利用计算得到的核心张量 $\hat{\mathcal{S}}$ 和特征矩阵 $\mathbf{W}^{(1)}, \mathbf{W}^{(2)}, \mathbf{W}^{(3)}$ 对张量 \mathcal{A} 进行重构可得

$$\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{S}} \times_1 \mathbf{W}^{(1)} \times_2 \mathbf{W}^{(2)} \times_3 \mathbf{W}^{(3)}. \quad (14)$$

重构得到的张量 $\hat{\mathcal{A}}$ 为 \mathcal{A} 最佳 $\text{rank}-(R_1, R_2, R_3)$ 近似,它包含了三阶张量 \mathcal{A} 的最主要信息。

4 湍流场数据处理

仿真所用的流场数据为导弹红外窗口的绕流流场 CFD 计算数据,探测窗口采用凹窗结构,光学系统孔径大小为边长 $60 \text{ mm} \times 60 \text{ mm}$ 的方形。图 4 给出了探测窗口附近的三维密度场分布。取紧贴探测窗口的流场数据进行仿真计算,截取大小为 $64 \text{ mm} \times 64 \text{ mm} \times 80 \text{ mm}$ 的方形流场,并对其进行网格化,网格大小为 $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$,如图 5 所示。

利用湍流密度场数据构造一个三阶张量 $\mathcal{A} =$

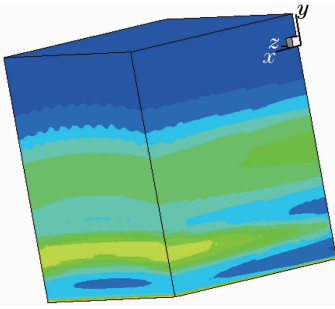


图 4 三维流场密度分布示意图

Fig. 4 Distribution of the 3D density field

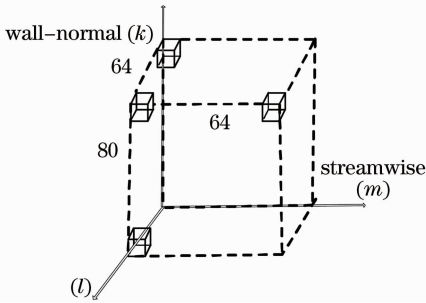


图 5 流场数据的网格分布示意图

Fig. 5 Distribution of the grids of the flow field data

$(a_{kml})_{k,m,l=1}^{80,64,64} \in R^{80 \times 64 \times 64}$, a_{kml} 代表法向坐标 k , 流向坐标 m , 展向坐标 l 的网格结点处的密度。对张量 \mathcal{A} 进行高阶奇异值分解, 并利用较大的奇异值进行重构, 可以获得三维密度场的大尺度相干结构。

为分析通过湍流场后光线波前畸变情况, 采用基于网格的光线传输递推方法^[14], 计算光线在流场中传输产生的光程差, 图 6 给出了该算法的图示说明。为分析简便, 假设光线是沿壁面法向的负向入射的。由于入射角为 0, 可以不必考虑光线在变折射率介质中传输时的折射现象, 只需计算每个小单

元产生的光程长, 叠加后便得到光线穿过流场后的总光程长, 进而获得光线总的光程差。

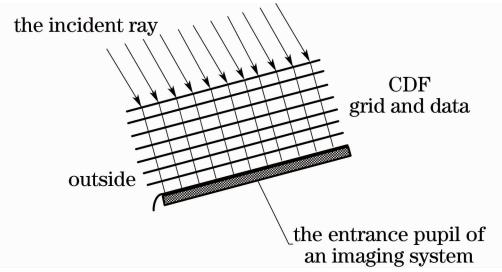


图 6 气动光学计算图

Fig. 6 Illustration of aero-optical calculation

5 实验结果与分析

针对高度 $H=30$ km, 飞行马赫数 $Ma=5$ 的一组湍流密度场数据进行仿真计算, 取入射波长 $\lambda=8 \mu\text{m}$ 。

对由流场数据构造的张量 \mathcal{A} 的展开矩阵进行奇异值分解, 得到的奇异值分布如图 7 所示。可以看到每个展开矩阵奇异值分解后得到的第一阶 n -模奇异值都远远大于其它阶 n -模奇异值, 表 1 给出了最大的前三阶奇异值。

表 1 展开矩阵的奇异值分解结果(只取前三阶)

Table 1 Results of the SVD for the unfolding matrices

Unfolding matrix	$\mathbf{A}_{(1)}$	$\mathbf{A}_{(2)}$	$\mathbf{A}_{(3)}$
The first-order singular value	17.543	17.556	17.602
The second-order singular value	1.381	1.399	0.723
The third-order singular value	0.671	0.407	0.115

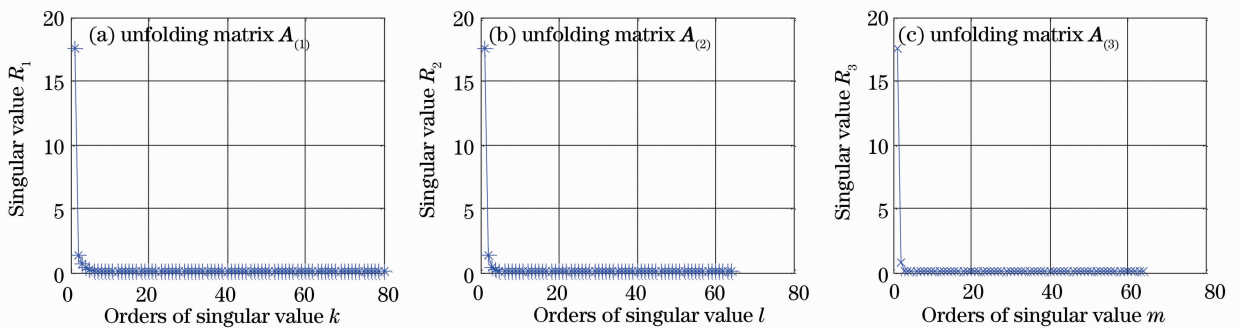


图 7 三维密度场数据展开矩阵的奇异值分解结果

Fig. 7 Results of the SVD for the unfolding matrices of the 3D density field data

通过选取不同的 R_1, R_2, R_3 , 可以得到不同尺度结构和精度的重构流场。为定量分析流场重构的效果, 取展向 $l=0$ 处的二维截面进行分析。分别取 $R_1=R_2=R_3=1$ 和 $R_1=R_2=R_3=3$ 进行重构计

算, 其原始密度场、重构密度场和重构误差的分布情况如图 8 所示。从图中可以看出, 重构密度场包含了原始密度场的主要成份, 主要反映了原始密度场的大尺度相干结构, 而重构误差更多地反应了流场的高频

细节信息。随着重构阶数的提高,重构精度也相应提高。当 $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ 时,重构密度场与原始密度

场的相对误差为 9.43%;当 $R_1 = R_2 = R_3 = 3$ 时,重构密度场与原始密度场的相对误差为 3.14%。

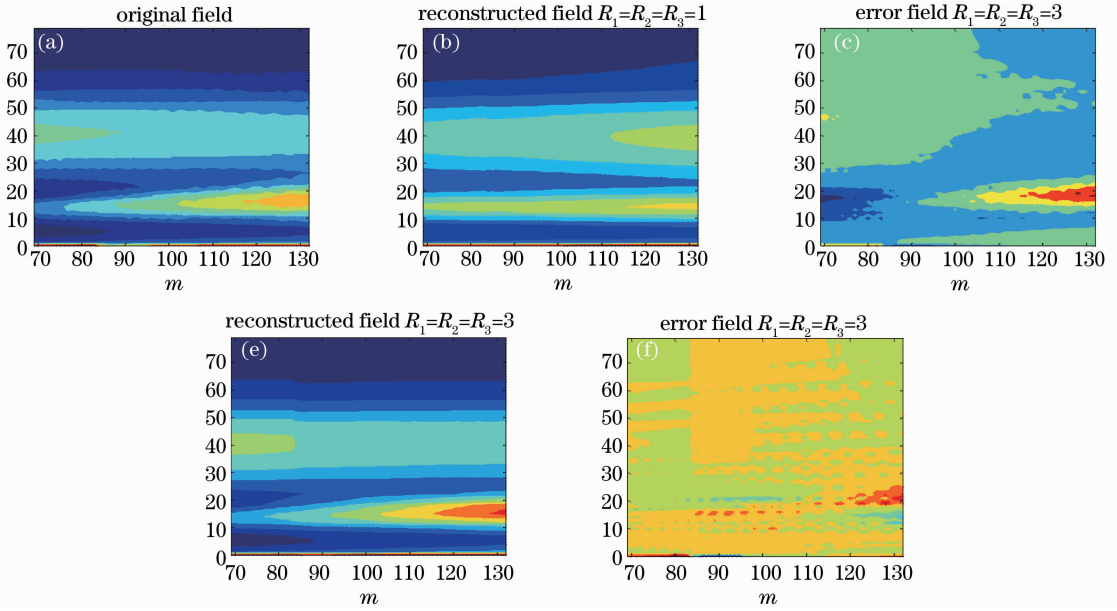


图 8 展向截面 $l=0$ 处原始密度场、重构密度场和重构误差密度分布

Fig. 8 Density distribution of original, reconstruction and error field at the profile $l=0$

取 $R_1 = R_2 = R_3 = 3$,分别利用原始流场和重构流场计算光程差(OPD),可以得到光线的波前畸变情况,结果如图 9 和图 10 所示。从图中可以看出,重构流场 OPD 分布与原始流场 OPD 分布空间形态

大致是一样的,为更精确地定量分析重构的效果,计算重构 OPD 的绝对误差与相对误差分别如图 11 和图 12 所示。

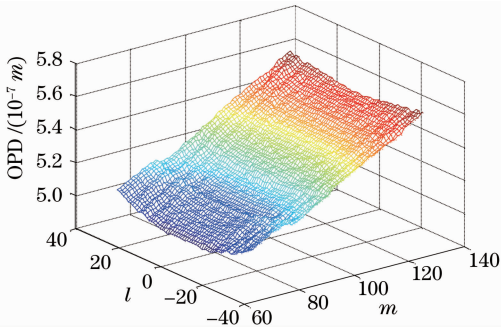


图 9 原始流场 OPD 分布

Fig. 9 OPD caused by original flow field

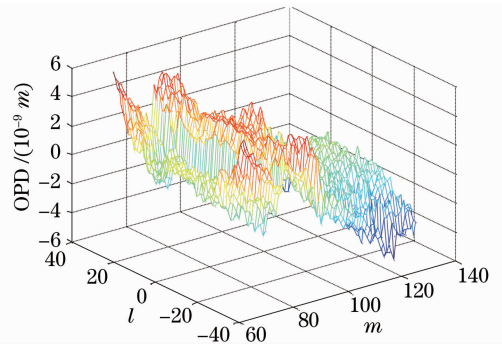


图 11 重构流场 OPD 的绝对误差

Fig. 11 Absolute error of OPD between original flow field and reconstructed flow field

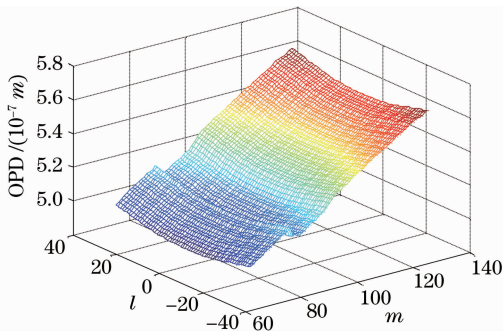


图 10 重构流场 OPD 分布

Fig. 10 OPD caused by the reconstructed flow field

从图 12 可以看出,重构流场 OPD 相对原始流场 OPD 的最大相对误差 R_{OPD} 只有 1.16%,重构效果比较好,能够反映原始流场对光传输的影响。

6 结 论

湍流场的结构决定了折射率场的分布,与光在其中的传输有密切关系。利用高阶奇异值分解方法,通过对湍流密度场数据进行降秩重构,可以有效提取三维流场的相干结构。气动光学效应畸变的仿

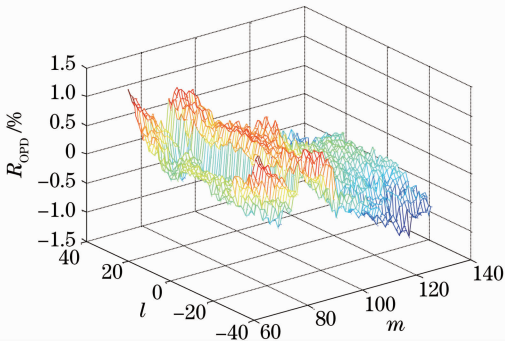


图 12 重构流场 OPD 的相对误差

Fig. 12 Relative error of OPD between original flow field and the reconstructed flow field

真结果表明,重构的流场能够较好地反映原始流场对光传输的影响。利用这一方法进行气动光学效应分析与校正,可以大大简化问题的复杂程度。考虑了大尺度相干结构对光传输的影响,在进一步的工作中,还需要对不同尺度相干结构对流场中光传输的影响进行研究,从而更准确地分析光在流场中的传输情况。

参 考 文 献

- 1 Yin Kexin, Jiang Huilin. Evaluations on aero-optic effects of subsonic airborne electro-optical system[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2006, **4**(8): 435~438
- 2 Wu Lin, Fang Jiancheng, Yang Zhaohua. Study on aero-optical distortion simulation of high refraction index gradient regions in hypersonic turbulent flow [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(11): 2952~2957
吴琳, 房建成, 杨照华. 高超声速湍流流场高折射率梯度区域气动光学畸变仿真研究[J]. *光学学报*, 2009, **29**(11): 2952~2957
- 3 C. R. Truman, R. I. Zadoks, Staveley Brian *et al.*. Prediction and measurement of aero-optic effects through the dynamics of a passive scalar in turbulent shear flow[C]. 18th AIAA Aerospace Ground Testing Conference, Colorado Springs, 1994, AIAA 94~2549
- 4 Giancarlo Alfonsi. Coherent structures of turbulence; methods of deduction and results [J]. *Appl. Mech. Rev.*, 2006, **59**(6): 307~323
- 5 He Jiang, Fu Song. POD Analysis of large-scale coherent structures in natural convection between two vertical plates [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **35**(4): 385~392
何江, 符松. 竖直平板间自然对流大尺度相干结构的 POD 分析[J]. *力学学报*, 2003, **35**(4): 385~392
- 6 B. E. Johnson, K. T. Christensen. Turbulent flow over low-order models of highly irregular surface roughness [J]. *AIAA Journal*, 2009, **47**(5): 1288~1299
- 7 J. M. Cicchiello. Low order representation of dynamic aero-optic distortions [D]. University of Notre Dame, 2001
- 8 J. M. Cicchiello, E. J. Jumper. Addressing the oblique-viewing aero-optic problem with reduced order methods[C]. 32nd AIAA plasmadynamics and lasers conference, Anaheim CA, 2001, AIAA 2001~2799
- 9 Wu Lin, Fang Jiancheng, Yang Zhaohua. Proper orthogonal decomposition applied in the analysis of simulating aero-optical distortions [J]. *J. Infrared Millim. Waves*, 2007, **26**(4): 312~316
吴琳, 房建成, 杨照华. 本征正交分解在气动光学畸变仿真中的分析与应用[J]. *红外与毫米波学报*, 2007, **26**(4): 312~316
- 10 L. de Lathauwer, B. D. Moor, J. Vandewalle. A multilinear singular value decomposition [J]. *Siam J. Matrix Anal. Appl.*, 2000, **21**(4): 1253~1278
- 11 L. de Lathauwer, B. D. Moor, J. Vandewalle. On the best rank-1 and rank-(R1, R2, ..., RN) approximation of higher-order tensors [J]. *Siam J. Matrix Anal. Appl.*, 2000, **21**(4): 1324~1342
- 12 Qiu Xiang, Liu Yulu. Turbulent coherent structure [J]. *Chin. J. Nature*, 2004, **26**(4): 187~193
邱翔, 刘宇陆. 湍流的相干结构[J]. *自然杂志*, 2004, **26**(4): 187~193
- 13 Trolinger. Technique for simulating and evaluating aero-optical effects in optical systems. [C]. 36th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference, Toronto, Ontario Canada, 2005, AIAA 2005~4654
- 14 Wang Tao, Zhao Yan, Xu Dong. Numerical study of evaluating the optical quality of supersonic flow field [J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(23): 5545~5551