

文章编号: 0253-2239(2010)11-3244-05

# 分层介质中 p 偏振光透射系数的修正

洪小刚<sup>1</sup> 徐文东<sup>1</sup> 赵成强<sup>1</sup> 唐晓东<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 中国科学院上海光学精密机械研究所强激光材料重点实验室, 上海 201800)  
<sup>2</sup> 华东师范大学信息科学技术学院, 上海 200241)

**摘要** 通过理论计算获得了全反射时分层介质中 p 偏振光的透射系数计算公式, 并采用时域有限差分(FDTD)方法进行了验证。计算所获得的公式与传统的采用分层介质的特性矩阵法计算获得的相似, 不同之处在于当发生全反射时, 公式多了一个全反射修正因子。此外, 采用 FDTD 模拟的两层介质的全反射结构及表面等离子体共振(SPR)膜系结构的结果与修正后的公式符合得很好。该修正公式是对分层介质中电磁波传播的完善, 是对一些有影响力的文献关于场增强因子的修正, 它对 SPR 及倏逝场的研究具有参考价值。

**关键词** 薄膜; 多层介质; 全反射; 透射系数; p 偏振光; 表面等离子体共振

中图分类号 O484 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103011.3244

## Correction to Transmission Coefficient of p Polarized light in Layered Media

Hong Xiaogang<sup>1</sup> Xu Wendong<sup>1</sup> Zhao Chengqiang<sup>1</sup> Tang Xiaodong<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Key Laboratory of Materials for High Power Laser, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China  
<sup>2</sup> School of Information Science and Technology, East China Normal University, Shanghai 200241, China

**Abstract** The computing formula of the electric field strength transmission coefficient of p polarized light in layered media is obtained by theoretical computation, and verified by finite difference time domain(FDTD) method. This formula is similar with that of the traditional transmission coefficient of p polarized light in layered media computed by characteristic matrix method. The difference is that when the total internal reflection (TIR) occurs, a TIR correction factor arises. Furthermore, a two layer TIR structure and a surface plasmon resonance (SPR) film structure are simulated by FDTD method, and the results are in good agreement with those of the correction formula. This correction formula is a perfection to the propagation of electromagnetic wave in layered media, and an amendment to some influential references about the description of the field enhancement factor. It also has reference value for the researches on SPR and the evanescent field.

**Key words** thin films; layered media; total internal reflection (TIR); transmission coefficient; p polarized light; surface plasmon resonance (SPR)

## 1 引 言

电磁波在分层介质中的传播已经被深入地研究过<sup>[1~4]</sup>, 但大多数是研究非全反射的情况。对于全反射研究的主要是反射率<sup>[5~7]</sup>, 而其透射系数则被研究的较少。在一些情况下需要利用全反射产生的

倏逝场, 如表面等离子体共振(SPR)光刻技术<sup>[8~11]</sup>, 利用共振时产生的共振增强倏逝场, 就需要计算全反射时的透射系数。H. Raether 等<sup>[12,13]</sup> 对此进行过描述, 但采用时域有限差分(FDTD)模拟发现这些描述是不正确的, 这是因为倏逝波不是横波, 相关

收稿日期: 2009-12-11; 收到修改稿日期: 2010-03-18

基金项目: 国家自然科学基金(60490294)和上海曙光计划(06SG30)资助课题。

作者简介: 洪小刚(1982—), 男, 博士研究生, 主要从事近场纳米光刻方面的研究。E-mail: hxg910@siom.ac.cn

导师简介: 徐文东(1966—), 男, 研究员, 博导, 主要从事光存储相关测试、特殊光学显微镜、特殊 SPM 显微镜和特殊光学系统设计等方面的研究。E-mail: xuwendong@mail.siom.ac.cn(通信联系人)

的计算公式不能应用于实际分析和计算。本文通过理论计算获得分层介质中 p 偏振光的透射系数的计算公式,并采用 FDTD 方法进行数值模拟验证。所获得的公式可用于对 SPR 及倏逝场的研究。

## 2 传统的透射系数

采用分层介质的特性矩阵法<sup>[14]</sup>计算分层介质 p 偏振光的透射系数。如图 1 所示,  $N+1$  层介质结构包括一层光入射介质  $n_0$ ,  $N-1$  层膜及一层光出射介质  $n_N$ , 入射界面为  $xOz$  平面, 其中坐标原点在最后一个分界面上。

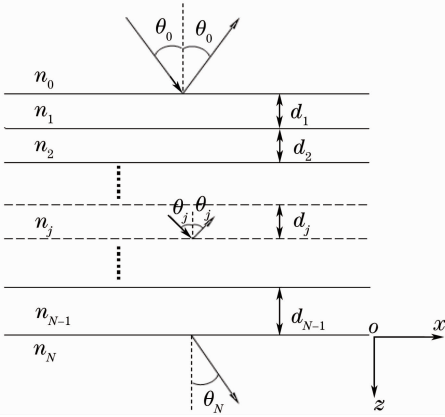


图 1 分层介质结构示意图

Fig. 1 Diagram of the layered media model

图中  $n_j$  为第  $j$  层介质的折射率 ( $j=0\sim N-1$ ),  $\theta_0$  为入射角,  $\theta_j$  ( $j=1\sim N$ ) 为折射角,  $d_j$  为第  $j$  层膜的厚度 ( $j=1\sim N-1$ )。第  $j$  层膜的特性矩阵为

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} \cos \delta_j & -\frac{i}{\eta_j} \sin \delta_j \\ -i\eta_j \sin \delta_j & \cos \delta_j \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中  $\delta_j = \frac{2\pi}{\lambda} n_j d_j \cos \theta_j$  为膜层的相位厚度,  $\eta_j = \cos \theta_j / n_j$ ,  $\lambda$  为入射光波长。

$N-1$  层膜总的特性矩阵为

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \cdots \mathbf{M}_{N-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

令

$$\begin{cases} m_1 = a_{11} + a_{12} \eta_N \\ m_2 = a_{21} + a_{22} \eta_N \end{cases}, \quad (3)$$

磁场强度透射系数为

$$|t_H| = |2\eta_0 / m_1 \eta_0 + m_2|. \quad (4)$$

电场强度透射系数<sup>[12,13]</sup>为

$$t_E = |t_H n_0 / n_N| \cdot \exp(i\Delta\delta) = t_p \exp(i\Delta\delta), \quad (5)$$

式中  $\Delta\delta$  为透射场相对于入射场的相位差,  $t_p$  即为

分层介质的振幅透射系数。

基于双波法的原理,采用 FDTD 方法<sup>[15]</sup>数值模拟,对上述推导过程进行验证。数值模拟采用的入射光波长为 514.5 nm,模拟对象为两层介质的全反射结构,包括基底 ( $n_0=1.768$ ) 和空气层 ( $n_1=1$ ),其全反射临界角为  $34.447^\circ$ 。取入射电场强度振幅为 1,分别计算单色平面正弦和余弦波源在光出射界面处的电场强度分量及磁场强度分布,并计算其振幅  $E_x, E_z$  和  $H_y$ 。则有

$$\begin{cases} t_{\text{FDTD}} = \sqrt{E_x^2 + E_z^2} \\ t_{\text{FDTDH}} = H_y / H_0 \end{cases}, \quad (6)$$

式中  $H_0 = \sqrt{\epsilon_0 n_0 / \mu_0}$  为入射平面波磁场强度振幅,  $\epsilon_0$  为真空中介电常数,  $\mu_0$  为真空磁导率,  $t_{\text{FDTD}}, t_{\text{FDTDH}}$  分别为 FDTD 计算获得的电场和磁场强度透射系数。

计算结果如图 2 所示,图中  $t_p$  与  $t_{\text{FDTDH}} * n_0 / n_1$  重合,证明(4)式的推导是正确的。但  $t_{\text{FDTD}}$  与  $t_p$  不完全重合,并且在入射角大于全反射临界角时不重合,说明了全反射时电场强度振幅透射系数的计算不能采用(5)式。这是因为倏逝波不是横波,而(5)式是在横波情况下推导得出的结论。当发生全反射时,磁场强度矢量,波矢矢量及电场强度矢量不再相互垂直,(5)式在物理上没有实际意义,不能用来计算电场强度振幅的透射系数,因此必须对其进行修正。

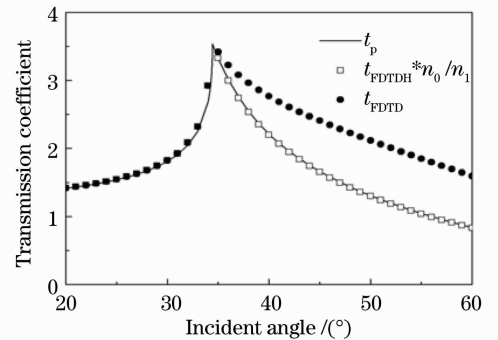


图 2 全反射结构的透射系数曲线图

Fig. 2 Transmission coefficient curves of TIR structure

## 3 透射系数的修正

假设入射波电场矢量为

$$\mathbf{E}_0 = A \exp(ik_{x0}x + ik_{z0}z - i\omega t) \mathbf{e}_0, \quad (7)$$

其中  $A$  为电场强度振幅,  $\mathbf{e}_0$  为  $\mathbf{E}_0$  的方向矢量。

透射电场可表示为

$$\mathbf{E}_t = A t_p \exp(i\Delta\delta) \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t) \mathbf{e}_t, \quad (8)$$

式中  $\mathbf{e}_t$  为  $\mathbf{E}_t$  的方向矢量。

沿平行界面方向和沿垂直界面方向上的电场分量可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{x_t} = A t_p \exp(i\Delta\delta) \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t) \mathbf{e}_x \cos \theta_N = E_{x_{t0}} \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t + i\Delta\delta) \mathbf{e}_x \\ \mathbf{E}_{z_t} = A t_p \exp(i\Delta\delta) \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t) \mathbf{e}_z \sin \theta_N = E_{z_{t0}} \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t + i\Delta\delta) \mathbf{e}_z \end{cases}, \quad (9)$$

式中  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$  分别为  $\mathbf{E}_{x_t}, \mathbf{E}_{z_t}$  的方向矢量,  $E_{x_{t0}}, E_{z_{t0}}$  为  $\mathbf{E}_{x_t}, \mathbf{E}_{z_t}$  的振幅。

(7)~(9)式中  $k_x = k \sin \theta_N, k_z = k \cos \theta_N, k_{x0} = k_0 \sin \theta_0, k_{z0} = k_0 \cos \theta_0$ , 而  $\mathbf{k} = \omega n_N / c$  为透射光波波矢,  $\mathbf{k}_0 = \omega n_0 / c$  为入射光波波矢,  $\omega$  为光波角频率,  $c$  为真空中光速。

对于入射单色平面波, 要求透射波的电场强度振幅, 可分别采用余弦和正弦波源计算电场强度再平方相加开根即可。而余弦和正弦波源产生的场强可分别采用复数描述的场强的实部和虚部来表示。则余弦和正弦波源的透射波电场强度大小可分别表示为

$$\begin{cases} E_{t\cos} = \sqrt{(\operatorname{Re} E_{x_t})^2 + (\operatorname{Re} E_{z_t})^2} \\ E_{t\sin} = \sqrt{(\operatorname{Im} E_{x_t})^2 + (\operatorname{Im} E_{z_t})^2} \end{cases}, \quad (10)$$

式中  $\operatorname{Re}$  表示取实部,  $\operatorname{Im}$  表示取虚部。

透射波的电场强度振幅可表示为

$$E_{t\text{amp}} = \sqrt{(\operatorname{Re} E_{x_t})^2 + (\operatorname{Re} E_{z_t})^2 + (\operatorname{Im} E_{x_t})^2 + (\operatorname{Im} E_{z_t})^2} = \sqrt{|E_{x_{t0}}|^2 + |E_{z_{t0}}|^2}, \quad (11)$$

将(9)式代入(11)式可见, 问题的关键在于  $\cos \theta_N$  及  $\sin \theta_N$ 。由折射定律可得

$$\sin \theta_N = \frac{n_0 \sin \theta_0}{n_N}, \quad \cos \theta_N = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{n_0 \sin \theta_0}{n_N}\right)^2}. \quad (12)$$

只考虑入射介质和出射介质为非吸收介质的情况, 此时  $n_0$  与  $n_t$  均为实数。那么对于  $\cos \theta_N$  及  $\sin \theta_N$ , 只有当发生全反射时  $\cos \theta_N$  才会变成虚数, 而  $\sin \theta_N$  始终是实数。当发生全反射时, 由(8), (9)式可以看出, 此时  $\mathbf{e}_t$  是一个复数。

1) 未发生全反射时,

$$\begin{aligned} t_p = |\mathbf{E}_t| / A = |\mathbf{E}_{x_t} + \mathbf{E}_{z_t}| / A = |A t_p \cos \theta_N \mathbf{e}_x + A t_p \sin \theta_N \mathbf{e}_z| / A = \\ \sqrt{|E_{x_{t0}}|^2 + |E_{z_{t0}}|^2} / A = E_{t\text{amp}} / A \quad . \end{aligned} \quad (13)$$

2) 发生全反射时,

$$\cos \theta_N = i \sqrt{\left(\frac{n_0 \sin \theta_0}{n_N}\right)^2 - 1} = ai, \quad (14)$$

式中  $a > 0$ , 此处只取了正号, 负号不对应真实的物理情况。

由(8), (9)和(14)式可得

$$\begin{aligned} t_p = |\mathbf{E}_t| / A = |\mathbf{E}_{x_t} + \mathbf{E}_{z_t}| / A = |A t_p \cos \theta_N \mathbf{e}_x + A t_p \sin \theta_N \mathbf{e}_z| / A = |A t_p (ai) \mathbf{e}_x + A t_p \sin \theta_N \mathbf{e}_z| / A = \\ A t_p \sqrt{|\sin^2 \theta_N - a^2|} / A = \sqrt{||E_{z_{t0}}|^2 - |E_{x_{t0}}|^2|} / A \quad . \end{aligned} \quad (15)$$

由(8), (9), (11), (12)和(14)式可得

$$\begin{aligned} E_{t\text{amp}} = A t_p [\sin^2(k_x x - \omega t + \Delta\delta) a^2 + \cos^2(k_x x - \omega t + \Delta\delta) \sin^2 \theta_N + \cos^2(k_x x - \omega t + \Delta\delta) a^2 + \\ \sin^2(k_x x - \omega t + \Delta\delta) \sin^2 \theta_N]^{1/2} \exp(-akz) = A t_p \exp(-akz) \sqrt{a^2 + \sin^2 \theta_N} = \\ A t_p \exp(-akz) \sqrt{2 \left(\frac{n_0 \sin \theta_0}{n_N}\right)^2 - 1}. \end{aligned} \quad (16)$$

可见发生全反射时, 电场强度振幅透射系数多了一个修正因子。修正后的电场强度振幅透射系数在出射界面即  $z=0$  处为

$$t_c = \begin{cases} |t_H n_0 / n_N|, & \theta_0 < \theta_c \\ |t_H n_0 / n_N| \sqrt{2 \left(\frac{n_0 \sin \theta_0}{n_N}\right)^2 - 1}, & \theta_0 \geq \theta_c \end{cases} \quad (17)$$

式中  $\theta_c$  为全反射临界角。

同样地,采用前述模型进行 FDTD 模拟验证。  
又令

$$t'_{\text{FDTD}} = \begin{cases} \sqrt{E_x^2 + E_z^2}, & \theta < \theta_c \\ \sqrt{|E_x^2 - E_z^2|}, & \theta \geq \theta_c \end{cases}, \quad (18)$$

模拟结果如图 3 所示,图中  $t_p$  与  $t'_{\text{FDTD}}$  重合,亦即  $t_{\text{FDTDH}} \cdot n_0/n_1$  与  $t'_{\text{FDTD}}$  重合,可见式所表示的物理含义是(13)和(15)式。而  $t_c$  与  $t_{\text{FDTD}}$  重合,就表明了(17)式的正确性。

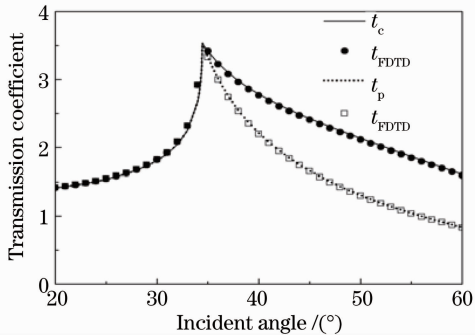


图 3 理论计算及 FDTD 模拟的透射系数曲线图

Fig. 3 Theoretical and FDTD simulated transmission coefficient curves

(17)式对 SPR 膜系结构优化设计非常有用。

图 4 为同一 SPR 膜系结构采用修正的和未修正的电场强度透射系数计算公式及采用 FDTD 模拟获得的透射系数曲线,亦即 SPR 场增强曲线。如图 4 所示, $t_c$  曲线在  $t_p$  的上面,并且两条曲线峰值所对应的入射角度也稍有差距。在膜系结构优化设计时,采用这两个不同的计算公式就会得到不同的结果。而  $t_c$  与  $t_{\text{FDTD}}$  的重合,则表明采用修正后的透射系数计算公式进行 SPR 膜系结构的优化设计必将带来更好的效果。

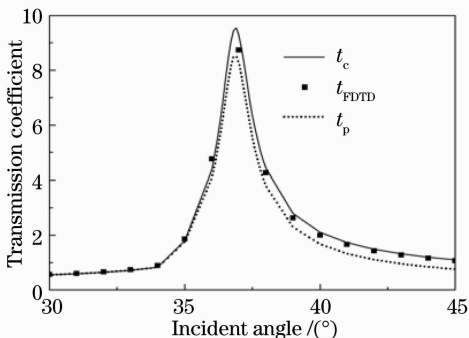


图 4 SPR 膜系结构的透射系数曲线图

Fig. 4 Transmission coefficient curves of SPR film structure

## 4 结 论

通过理论计算获得了分层介质中的 p 偏振光的透射系数,并采用 FDTD 数值模拟证明了理论计算的正确性。分层介质中 p 偏振光的透射系数在全反射时相对于非全反射时的多了一个修正因子,这主要是因为倏逝波不是横波。该透射系数计算公式只与分层介质的光入射和出射介质有关,因此它适用于所有能采用特性矩阵计算的且光入射和出射介质为非吸收介质的均匀介质结构。这对 SPR 场增强的膜系结构优化设计是非常重要的。对于 s 偏振光,其电场强度透射系数与 p 偏振光的磁场强度透射系数类似,发生全反射和未发生全反射时是一样的,推导只需将 p 偏振光的电场和磁场对偶即可获得结论,此处不再叙述。

## 参 考 文 献

- Liu Xinya. The transmission of electromagnetic waves in multilayer media [J]. *Acta Optica Sinica*, 1995, **15** (1): 122~125
- 刘新芽. 电磁波在多层介质内的透射[J]. *光学学报*, 1995, **15**(1): 122~125
- Zhao Lin, Zhao Junming, Xu Xiaofei *et al.*. Optical polarization manipulation by multilayered structure of metal-dielectric films [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(s2): 331~334
- 赵 林, 赵俊明, 徐晓非 等. 金属/介质多层薄膜结构光极化调控特性[J]. *中国激光*, 2008, **35**(s2): 331~334
- Jianqi Shen, Haitao Yu, Jindeng Lu. Light propagation and reflection-refraction event in absorbing media [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2010, **8**(1): 111~114
- Ren Xincheng, Guo Lixin. Optical transmission from exponentially distributed rough surface of layered medium using perturbation method [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28** (6): 1208~1214
- 任新成, 郭立新. 指数型分层介质粗糙面光透射问题的微扰法 [J]. *光学学报*, 2008, **28**(6): 1208~1214
- Haichun Zhou, Chunfang Li, Xi Chen. Analysis of the positive or negative lateral shift of the reflected beam in Otto configuration under grazing incidence [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2008, **6** (6): 446~448
- Yingcai Wu, Zhengtian Gu. Relationship between normalized light intensity and attenuated total reflection ratio [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2008, **6**(1): 32~35
- Cao Di, Zhang Huifang, Tao Feng. Theoretical study on properties of surface plasmon polaritons at interfaces of metamaterials with three-layered asymmetric structures [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(8): 1601~1610
- 曹 迪, 张惠芳, 陶 峰. 三层不对称人工电磁材料界面处表面等离子体激元的理论研究 [J]. *光学学报*, 2008, **28** (8): 1601~1610
- Hong Xiaogang, Xu Wendong, Li Xiaogang *et al.*. Numerical simulation of probe induced surface plasmon resonance coupling nanolithography [J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, **57** (10): 6643~6648

- 洪小刚, 徐文东, 李小刚 等. 数值模拟探针诱导表面等离子体共振耦合纳米光刻[J]. *物理学报*, 2008, **57**(10): 6643~6648
- 9 D. Haefliger, A. Stemmer. Writing subwavelength-sized structures into aluminium films by thermo-chemical aperture-less near-field optical microscopy[J]. *Ultramicroscopy*, 2004, **100**(3-4): 457~464
- 10 Fang Liang, Du Jinglei, Guo Xiaowei *et al.*. The theoretic analysis of maskless surface plasmon resonant interference lithography by prism coupling[J]. *Chinese Physics B*, 2008, **17**(7): 2499~2503
- 11 Guo Xiaowei, Du jinglei, Guo Yongkang *et al.*. Large-area surface-plasmon polariton interference lithography [J]. *Opt. Lett.*, 2006, **31**(17): 261~263
- 12 H. Raether. Surface Plasmon on Smooth and Rough Surface and on Gratings [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 16~18
- 13 Biow Hiem Ong, Xiaocong Yuan, Swee Chuan Tjin *et al.*. Optimised film thickness for maximum evanescent field enhancement of a bimetallic film surface plasmon resonance biosensor [J]. *Sensors and Actuators B*, 2006, **114**(2): 1028~1034
- 14 M. Born, E. Wolf. Principles of Optics [M]. Yang Jiasun Transl. Beijing: Publishing House of Electronics Industry Press, 2005, 49~54  
玻 恩, 沃尔夫. 光学原理[M]. 杨葭孙 译. 北京: 电子工业出版社, 2005, 49~54
- 15 A. Taflove, S. Hagness. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, 2nd ed [M]. Boston: Artech House, 2000