

文章编号: 0253-2239(2010)11-3197-06

# 基于斜率非球面度的非球面最接近比较球面定义

谢 枫 郝 群 朱秋东

(北京理工大学光电学院, 北京 100081)

**摘要** 为了准确表征非球面偏离球面的程度,并适用非球面检测技术,提出了采用斜率非球面来定义非球面最接近比较球面。分析了最小最大斜率非球面度相关与计算全息板的加工难度及非球面检测难度,并有利于减小激光束偏转法的测量误差。根据定义推导了最接近比较球面计算模型,分析了不同比较球面下的斜率非球面度分布、不同非球面的最接近比较球面位置、非球面参数对计算结果的影响及各种非球面度定义下的最接近比较球面。结果表明,不同非球面的最接近比较球面球心为非球面  $0.85 \sim 0.87$  口径法线与光轴的交点,从而优化了计算过程。定义求得的最接近比较球面不同于现有各种方法,是适应非球面检测需求的。

**关键词** 光学测量;最接近比较球面;最小最大斜率非球面度;非球面

中图分类号 O43 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103011.3197

## Best-Fit Spheric Surface Definition Based on Slope Asphericity for Aspheric Surface

Xie Feng Hao Qun Zhu Qiudong

(School of Optoelectronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract** In order to describe the difference between aspheric surface and sphere accurately and fit the aspheric surface measurement techniques, a best-fit spheric surface based on slope asphericity is proposed. First the min-max slope asphericity associated to manufacturing difficulty of computer-generated hologram and aspheric surface measurement difficulty was analyzed, when the min-max slope asphericity is beneficial to reduce the measurement error of laser deflectometry. Then a calculation model of best-fit sphere is proposed, and the distribution of slope asphericity corresponding to different comparing spheric surfaces, the best-fit spheric surface of different aspheric surfaces, the effects of aspheric surface parameters to calculation result, and the best-fit spheric surface of different asphericity definitions are analyzed. The results indicate that the center of best-fit spheres corresponding to different aspheric surfaces is the cross point between the normal of  $0.85 \sim 0.87$  aperture of aspheric surface and the optical axis, thereby the calculation process is optimized, and the best-fit sphere based on slope asphericity is different from prior methods, thus it fits aspheric surface measurement.

**Key words** optical measurement; best-fit spheric surface; mini-max slope asphericity; aspheric surface

## 1 引 言

光学系统中采用非球面元件具有校正系统像差、提高成像质量以及减少系统体积等优点,因此非球面元件越来越多地被应用于各种光学系统,从而,非球面加工及检测技术也聚焦了业界的眼球。为了表示相对起始球面所需要附加或者去除的量,提出

了非球面度<sup>[1]</sup>的概念,其内容包括寻找一个最适合的起始球面,即最接近的比较球面<sup>[2~4]</sup>,使得从该起始球面加工至非球面所需要附加或者去除的量最小,而附加或者去除的量,就称为非球面度。因此,非球面度的概念首先是基于加工的要求所提出的,表明了非球面与最接近比较球面的偏离量,而最大

收稿日期: 2010-02-08; 收到修改稿日期: 2010-04-26

基金项目: 高等学校学科创新引智计划(B08043)资助课题。

作者简介: 谢 枫(1982—),男,博士研究生,主要从事光学测量方面的研究。E-mail: xiefengns@163.com

导师简介: 郝 群(1968—),女,博士,教授,主要从事光电信息技术及精密光学测量等方面的研究。

E-mail: qhao@bit.edu.cn

非球面度则反映了非球面的加工难度,最大非球面度越大,加工越困难<sup>[1]</sup>。非球面度作为非球面最主要的特性,体现了非球面的加工难度。但是不能只看其绝对数值的大小,还要看镜面直径大小。确切的说,如要准确描述非球面加工难度,需要的是非球面度的梯度,即非球面子午曲线单位弧长内非球面度的变化量<sup>[1]</sup>。

现有非球面度定义都是基于加工引入的,可分为沿横坐标定义的非球面度及沿最接近比较球面法线定义的非球面度两种<sup>[5~7]</sup>。沿最接近比较球面法线方向的定义,比沿横坐标的非球面度定义更能精确反映非球面特性,尤其是对于大孔径深型非球面来说,仅用横坐标差值来进行加工是不精确的<sup>[1]</sup>。然而不管哪种现有非球面度定义,都没有体现非球面度的梯度,在描述加工难度上都不够精确,同时,相对于非球面检测技术,如计算机全息检测法<sup>[8~10]</sup>等,非球面度的梯度反映了干涉波前的斜率,对应于干涉条纹的密度,是检测中的重要参数。因此,基于加工与检测的需求,本文提出了一种新的非球面最接近比较球面定义,该定义从非球面度的梯度出发,既可以准确定义非球面加工难度,又与多种非球面检测技术相联系,以表示非球面的检测难度。

## 2 最接近比较球面理论分析

### 2.1 非球面检测方法及其基于检测需求提出的最接近比较球面

非球面的检测方法包括计算机全息检测法<sup>[11,12]</sup>和激光束偏转法<sup>[13]</sup>等。

计算全息法是一种零补偿<sup>[14]</sup>的干涉检测方法,原理如图 1 所示。计算全息板(CGH)根据标准非球面的波前制作,将球面波前转化为标准的非球面波前,在被测非球面处反射后,非球面波前被测试光路转化为球面波前与参考波前发生干涉,其波前斜率对应于干涉条纹的密度,体现了波像差的变化梯度,因此最大波前斜率既反映了非球面度的最大梯度,又表征了干涉条纹的最小间距,可用于决定选择何种型号的 CCD 探测器,也决定了 CGH 补偿器的制作难度。因此,寻找一个最合适的比较球面,使得干涉条纹的最小间距最大,即非球面度的最大变化梯度最小,这对于 CGH 补偿器及探测器的选择都是很有意义的,表明了非球面的检测难度以及计算全息的制作难度<sup>[15]</sup>。

在另一种非球面的测量方法——激光束偏转法中,是采用转动法测量曲率半径较小的非球面,如图

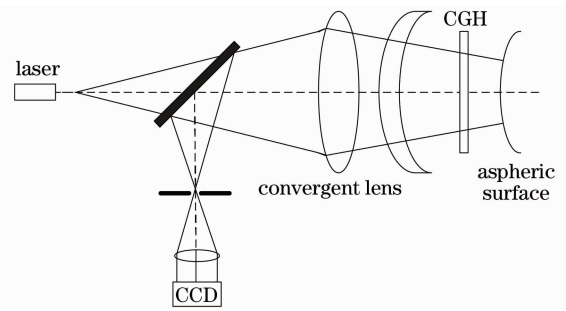


图 1 计算机全息检测原理图

2 所示,固定检测台,绕最接近比较球面的圆心转动被测面,转台带动被测面以一定间隔  $\Delta\theta$  转动,测得各个点的反射角,通过公式  $\rho(\theta) = R \exp \left[ \int_0^\theta \tan \beta(\theta) d\theta \right]$  可计算得到被测面的形状, ( $\beta$  为被测面表面斜率,可通过 CCD 上光斑的位置及其到非球面的距离求得)。在上述测量过程中,需要选择最接近比较球面,使反射光束的最大角度最小,即相对于比较球面,非球面度的最大变化梯度最小,以达到减小测量误差的目的<sup>[13]</sup>。

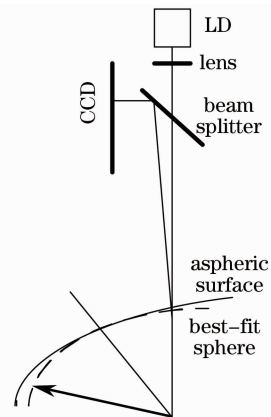


图 2 激光束偏转法

Fig. 2 Laser deflection measurement method

上述两种方法都要求计算最小最大的非球面度梯度。显然根据不同的比较球面所计算得到的非球面度梯度是不同的,因此,在提出采用非球面度梯度来表征非球面的加工与检测难度的同时,也提出了基于非球面度梯度的最接近比较球面定义。如图 3 所示,旋转对称的非球面半口径子午面被均分为  $n$  等份,可得点  $x_i, i=0, 1, \dots, n$ 。  $R_0$  为非球面顶点曲率半径,  $R_n$  为边缘点  $x_n$  的法线与  $x$  轴的交点,任意点  $x_i$  的非球面法线  $x_i x_i'$  与  $X$  轴交于点  $x_i'$ ; 定义非球面旋转对称轴上点  $C_0$  为最接近球面的球心,其与点  $x_i$  的连线与非球面法线  $x_i x_i'$  的夹角为  $\alpha_i$ ; 以  $C_0$

为球心,可做球面与非球面相切于  $x_c$  点,两点之间的距离即为比较球面的半径  $R$ 。因此,定义非球面某点法线与过该点与比较球球心的连线的夹角为斜率非球面度,即  $\alpha_i$ ,该角度就表征了非球面度的梯度,使得最大斜率非球面度最小的球面即为所求的最接近比较球面。

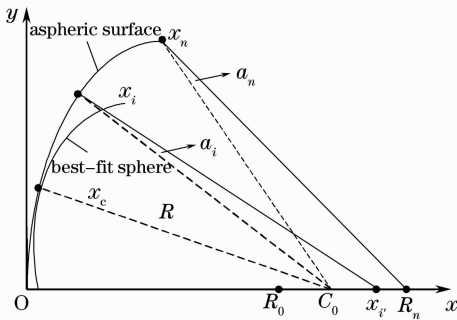


图 3 斜率非球面度定义图

Fig. 3 Slope asphericity definition

### 2.2 数学模型及计算方法

从定义可知,上述斜率非球面度定义适用于一般非球面,只需求得非球面的法线分布并确定比较球面的球心,即可求得斜率非球面度的分布。鉴于在大多数光学系统中,应用二次非球面已可满足要求。

二次非球面可以表示为

$$y^2 + z^2 = 2R_0x - (1+k)x^2, \quad (1)$$

式中  $R_0$  为非球面顶点曲率半径,  $k$  为二次曲面常数,其法线方程可以表示为

$$\frac{x - x_i}{(1+k)x_i - R} = \frac{y - y_i}{y_i} = \frac{z - z_i}{z_i}, \quad (2)$$

对于回转对称二次非球面,(1)式退化成  $x - y$  平面内的曲线。坐标为  $(x_i, y_i)$  的任意点的法线斜率为

$$K_1 = \frac{y_i}{x_i - R_0 + kx_i}. \quad (3)$$

非球面上任意点与球心  $C_0(c, 0)$  连线的斜率为

$$K_2 = y_i / (x_i - c). \quad (4)$$

根据前文所定义的最接近比较球面,可得到如(5)式的数学模型

$$\begin{aligned} \min \max | \tan \alpha_i | \Rightarrow \min \max | K_1 - K_2 | \\ [ x_i \in (x_0, x_n), c \in (R_0, R_n) ], \end{aligned} \quad (5)$$

求解后可得到使得最大斜率非球面度最小的比较球球心的横坐标  $c$ , 及最小最大斜率非球面度处的非球面横坐标  $x_i$ 。

为求解上述数学模型,需要先确定最接近比较球面球心横坐标  $c$  的范围,以确定解的存在及该数

学模型的性质。观察当  $C_0$  在不同位置时,斜率非球面度  $\alpha_i$  (非绝对值) 的分布,可得到图 4。在曲线 1 处,  $0 < c < R_0$ ; 在曲线 2 处,  $c = R_0$ ; 在曲线 3 处,  $R_0 < c < R_n$ ; 在曲线 4 处  $c = R_n$ ; 在曲线 5 处,  $R_n < c$ 。从图中斜率非球面度的分布可知所求最接近比较球面的球心必定位于  $(R_0, R_n)$  区间,即曲线 3 所示情况。

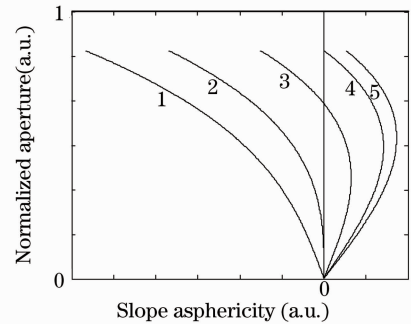


图 4 斜率非球面度的分布图

Fig. 4 Distribution of slope asphericity

(5)式描述的数学模型为非线性二次数列问题,没有公式解,Matlab 优化工具箱专门提供了函数  $f_{\min \max}$  求解这类问题,过程简单快捷。Matlab 在计算中采用了序列二次规划法,对一维搜索法和赫斯(Hessian)矩阵进行了修改,该算法对初始点的位置要求较高,否则有可能仅得到局部最优点,而非全局最优点。因此有必要对计算各种非球面的最接近比较球面的分布,指导初始点的选取。

采用迭代法对不同顶点曲率半径、非球面系数及口径的非球面进行计算,得到最接近比较球面的数据,如图 5 所示。对于其中任一确定参数的非球面计算方法如下:首先以坐标轴原点作为比较球面球心,计算非球面上各点的斜率非球面度,得到最大斜率非球面度;再以一定步长更改球心位置,得到各个球心位置处的最大斜率非球面度;比较所有最大值得到最小值;然后减小步长进一步搜索,直至最小最大斜率非球面度随球心位置的改变量小于某一设定值为止,此时的球心即为最接近比较球面球心。得到球心位置后,即可求得最接近比较球面与非球面的切点(图 3 中  $x_c$  点)所在非球面归一化纵坐标口径(简称切点口径),及比较球的半径。可以看到,尽管非球面参数分布较广,但是切点口径都集中在  $0.85 \sim 0.87$  范围,因此,可在使用  $f_{\min \max}$  函数计算时,选择非球面  $0.85 \sim 0.87$  口径处法线与  $x$  轴的交点作为比较球球心初始点。

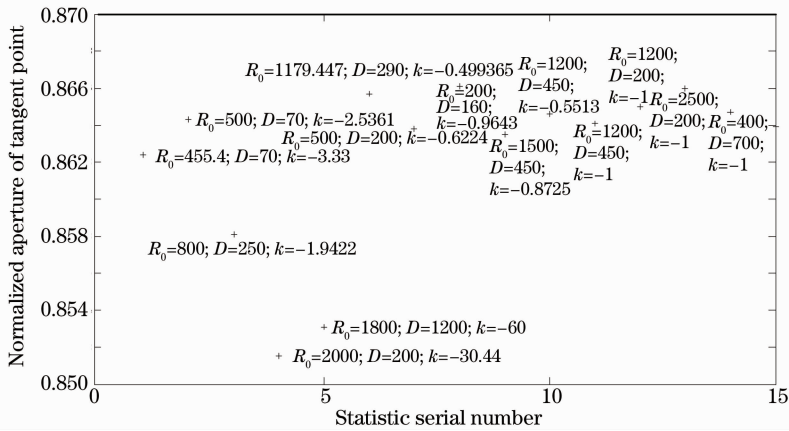


图 5 计算不同非球面的最接近比较球面位置

Fig. 5 Distribution of best-fit spheres for different aspheric surfaces

另一方面,大量计算表明,当最大斜率非球面度最小时,最小斜率非球面度(负值)的绝对值应近似等于最大斜率非球面度,如图 6 所示。使用的算例为顶点曲率半径为 1179.447 mm,口径为 580 mm,二次曲面常数  $k = -0.499365$ 。采用迭代法计算,当球心位于(1192.867, 0)时,在半口径处得到最大斜率非球面度为  $9.2010 \times 10^{-4}$  rad,在边缘口径处得到最小斜率非球面度  $-9.1809 \times 10^{-4}$  rad。图中曲线两次过零点,一处位于非球面顶点,另一处为最接近比较球面与非球面的切点。因此可选用非球面 0.5 口径对应横坐标作为(5)式中非球面横坐标的初始点。采用上述分析得到的初始点代入函数  $f_{\text{minimax}}$ ,计算得到,当球心位于(1192.862, 0)时,最大斜率非球面度为  $9.1960 \times 10^{-4}$  rad,最小斜率非球面度为  $-9.1911 \times 10^{-4}$  rad,计算结果更为精确。

得合理的计算结果以及较快的计算速度。

综合来说,只需给出非球面 0.5 口径处的横坐标以及 0.85~0.87 口径范围内任意一点的法线与  $x$  轴的交点,通过  $f_{\text{minimax}}$  函数即可快速求得(5)式的解,可避免迭代法计算的繁琐,同时获得满意的精度。

### 3 结果分析

#### 3.1 非球面参数对计算结果的影响

由第 2 节的分析可知,针对不同非球面计算最接近比较球面,切点口径都聚集在 0.85~0.87 归一化口径之间,但是依然存在差别,因此有必要研究非球面参数对计算结果的影响。图 7~9 表明了不同非球面参数对切点口径及球心位置计算结果的影响,采用的算例同图 6。其中曲线  $c-D$  表示比较球球心与非球面半口径的变化关系,曲线  $c-R_0$  表示比较球球心与非球面顶点曲率半径的变化关系,曲线  $c-k$  表示比较球球心与二次曲面常数的变化关系。从图 8,9 可以看出,非球面口径及顶点曲率半径对切点口径的计算结果影响不大,不呈现明显的分布

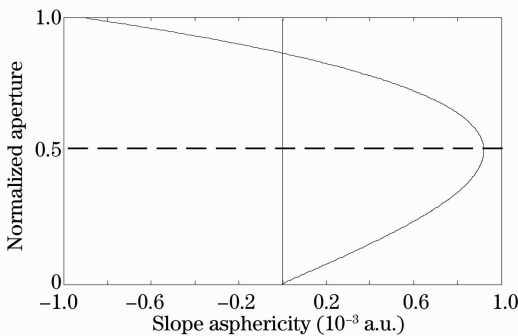


图 6 最大斜率非球面度最小的斜率非球面度非绝对值分布

Fig. 6 Distribution of slope asphericity (not absolute value) corresponding to minimax slope asphericity

以上分析表明,虽然不同非球面的参数改变了,但是最接近比较球面与非球面的切点都位于非球面纵坐标 0.85~0.87 归一化口径处,因此,球心坐标初始点应选择这个区间内法线与  $x$  轴的交点,以获

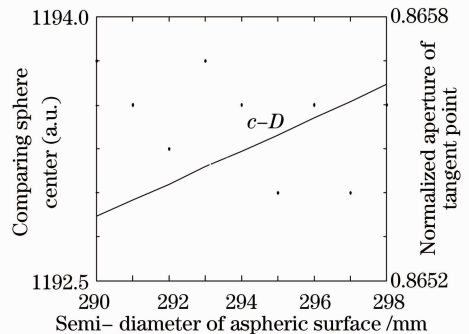


图 7 比较球球心、切点口径与非球面口径关系

Fig. 7 Relation between reference sphere center/tangent point aperture and aspheric surface aperture  $D$

特征；而图 9 表明二次曲面常数对切点口径的计算结果影响较大，随着二次曲面常数绝对值的增大，切点口径逐渐减小。并且比较球球心位置与非球面顶点曲率半径、口径及二次曲面常数均成正比。

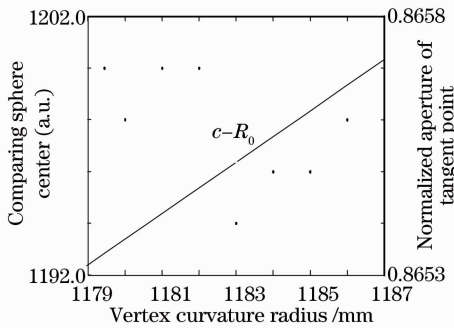


图 8 比较球球心、切点口径与顶点曲率半径关系

Fig. 8 Relation between reference sphere center/tangent point aperture and vertex curvature radius  $R_0$

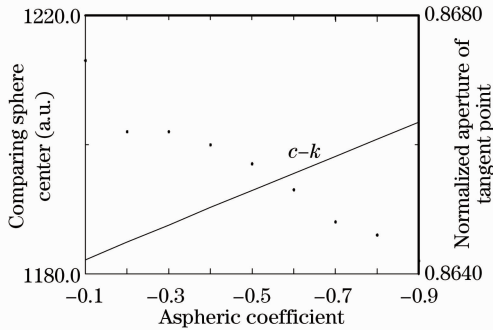


图 9 比较球球心、切点口径与二次曲面常数关系

Fig. 9 Relation between reference sphere center/tangent point aperture and quadratic surface constant  $k$

### 3.2 比较不同非球面度定义下的计算结果

现有非球面度计算方法包括有近似公式法、精确公式法、最小最大残差法等<sup>[5]</sup>，其中近似公式法沿

非球面横坐标定义非球面度，精确公式法沿比较球法线定义非球面度，但是二者定义的比较球均为过非球面顶点与边缘点的球面，因此计算得到的最大斜率非球面度相同；最小最大残差法<sup>[13]</sup>定义的比较球可使沿比较球法线的最大非球面度最小，方法简单，易于编程。

近似公式法及精确公式法定义的比较球半径如下式所示：

$$R = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2x_1}, \tag{6}$$

式中  $x_1, y_1$  为二次曲面边缘点的坐标。最小最大残差法采用迭代计算求取比较球面，计算式如下：

$$\delta_{\max} = \max \delta_i, \tag{7}$$

式中  $\delta_i$  表示沿比较球法线计算的非球面度。表 1 列出了几种最接近比较球面计算方法所得到的最接近比较球面球心位置及半径  $R$ 。 $\alpha_{\max}$  为在各自定义的比较球面计算得到的最大斜率非球面度； $c$  表示比较球球心横坐标。

对于上述三种非球面，本方法计算得到的最小最大斜率非球面度，不同于以近似公式法或最小最大残差法定义的比较球面所计算出的最大斜率非球面度。因此，由于比较球面定义的不合适，现有的几种方法，都不能有效得到最小最大斜率非球面度，不能准确描述非球面的表面变化，同样地，也不能有效应用于非球面检测技术。针对前文所述的全息补偿法及激光束偏转法来说，本方法求得的最小最大斜率非球面度表征了干涉条纹的最大密度，并可在激光束偏转法检测中指导比较球面的选取，这都是现有非球面度定义无法实现的。

表 1 不同方法求得的最接近比较球面

Table 1 Best-fit spheric surface with the various methods

Parameters of aspheric surface	Approximate formula method	Least maximum error method	Min-max slope asphericity method
$D = 110$	$R = 457.566$	$R = 457.566$	$R = 460.6801$
$K = -1.306$	$\alpha_{\max} = 5.6643 \times 10^{-4}$	$\alpha_{\max} = 5.6643 \times 10^{-4}$	$\alpha_{\max} = 2.8384 \times 10^{-4}$
$R_0 = 455.4$	$c = 457.566$	$c = 457.566$	$c = 458.6500$
$D = 188.11036$	$R = 1495.397$	$R = 1496.038$	$R = 1542.697$
$K = -64.44$	$\alpha_{\max} = 0.0038$	$\alpha_{\max} = 0.0037$	$\alpha_{\max} = 0.0019$
$R_0 = 1400$	$c = 1495.397$	$c = 1496.038$	$c = 1540.82$
$D = 310$	$R = 445.754$	$R = 445.754$	$R = 461.7198$
$K = -2.3081$	$\alpha_{\max} = 0.0235$	$\alpha_{\max} = 0.0235$	$\alpha_{\max} = 0.0120$
$R_0 = 413.6523$	$c = 445.754$	$c = 457.754$	$c = 460.8623$

## 4 结 论

提出一种新的最接近比较球面定义方法,方法表明不同非球面的最接近比较球面球心为非球面 $0.85\sim 0.87$ 口径径线与光轴的交点根据该方法可以得到使最大斜率非球面度最小的比较球面,可直接应用于非球面检测技术,能够准确表示加工难度,有重要的实际应用价值,通过本方法定义非球面难度,可以实现补偿系统的快速选择,提高检测速度。在后续的研究中,将应用该概念定义各种补偿系统的检测能力。

## 参 考 文 献

- Pan Junhua. The Design, Manufacture and Test of the Aspherical Optical Surfaces[M]. Suzhou: Soochow University Press, 2004. 1~9  
潘君骅. 光学非球面的设计、加工与检验[M]. 苏州: 苏州大学出版社, 2004. 1~9
- T. W. J. Unti. Best-fit sphere approximation to a general aspheric surface[J]. *Appl. Opt.*, 1966, **5**(2): 319~322
- Berge Tatian. Least-squares fitting of aspheric surfaces by a conicoid[J]. *Appl. Opt.*, 1989, **28**(21): 4687~4696
- Zhao Xing, Song Lippei, Kong Qiang *et al.*. Resolving of the best-fit sphere and the material removal in off-axis asphere fabrications [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(s1): 61~64  
赵 星, 宋丽培, 孔 强 等. 离轴非球面加工中最接近球面及研磨去除量的求解[J]. 光学学报, 2009, **29**(s1): 61~64
- Liu Huilan, Sha Dingguo, Hao Qun *et al.*. A method for calculating asphericity of high-order optical aspheric surface[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2004, **31**(6): 44~47  
刘惠兰, 沙定国, 郝 群 等. 一种高次光学非球面度的计算方法[J]. 光电工程, 2004, **31**(6): 44~47
- Sha Dingguo, Quan Shuxue, Zhu Qiudong *et al.*. An optical asphericity definition and its accurate calculation [J]. *Acta Photonica Sinica*, 1995, **24**(1): 91~94  
沙定国, 全书学, 朱秋东 等. 光学非球面度的定义及其准确计算[J]. 光子学报, 1995, **24**(1): 91~94
- Du Yujun, Ren Haixia, Liu Zhongben. The method of calculation to asphericity of optical aspheric surface component [J]. *J. Appl. Opt.*, 2002, **23**(5): 42~45  
杜玉军, 任海霞, 刘中本. 光学非球面元件非球面度计算方法[J]. 应用光学, 2002, **23**(5): 42~45
- Xi Qingkui, Zhu Rihong, Chen Lei *et al.*. Methods on testing an aspheric with a computer generated hologram [J]. *Laser Journal*, 2004, **25**(6): 67~69  
席庆奎, 朱日宏, 陈 磊 等. 计算全息用于非球面检测的方法[J]. 激光杂志, 2004, **25**(6): 67~69
- Qiao Yujing, Lü Ning. The research of CGH for testing aspheric surface[J]. *Journal Harbin Univ. Sci. & Technol.*, 2005, **10**(2): 97~99  
乔玉金, 吕 宁. 计算全息用于非球面检测的研究[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2005, **10**(2): 97~99
- Toshihito Takahashi, Kunio Konno, Masaharu Kawai *et al.*. Computer generated holograms for testing aspheric lenses[J]. *Appl. Opt.*, 1976, **15**(2): 546~549
- Xie Yi, Chen Qiang, Wu Fan *et al.*. Concave aspherical surface testing with twin computer-generated holograms[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(7): 1313~1317  
谢 意, 陈 强, 伍 凡 等. 用双计算全息图检测凹非球面[J]. 光学学报, 2008, **28**(7): 1313~1317
- J. Ma, Z. Gao, R. Zhu *et al.*. Problems on fabrication of computer-generated holograms for testing aspheric surfaces[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2009, **7**(1): 70~73
- Zhu Qiudong, Hao Qun. Aspheric surface testing and calculating by laser deflectometry [J]. *Optical Technique*, 2002, **28**(1): 22~27  
朱秋东, 郝 群. 激光束偏转法非球面面形测量和计算[J]. 光学技术, 2002, **28**(1): 22~27
- Zhu Yongjian, Pan Weiqing. Measurement of aspheric surface [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2010, **47**(1): 11202  
朱勇建, 潘卫清. 非球面面形测量技术[J]. 激光与光电子学进展, 2010, **47**(1): 11202
- Z. Gao, M. Kong, R. Zhu *et al.*. Problems on design of computer-generated holograms for testing aspheric surfaces: principle and calculation [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2007, **5**(4): 241~244