

文章编号: 0253-2239(2010)10-3054-05

对相干态与原子作用后非经典性质的演化

郑小兰 陈子翊

(福州大学物理与信息工程学院, 福建 福州 350002)

摘要 利用 Jaynes-Cummings 模型来讨论初始处于对相干态的腔场的两个模分别与两个二能级原子共振相互作用后非经典性质的演化, 例如双模压缩性、亚泊松分布、模间二阶相干度和对柯西-施瓦茨不等式的违背和对贝尔不等式的违背等。通过数值模拟, 发现原子在与腔场共振相互作用后, 并选择性探测原子的内态, 能使上述某些非经典效应得到明显增强。此外, 在原子-腔相互作用后再对原子施加一个共振经典微波场, 这个经典场将对原子态做么正变换, 适当选择变换的参数后再对原子进行选择测量, 则此时腔场的双模压缩性可得到一定增强。

关键词 量子光学; 非经典性质; 共振作用; 对相干态; 选择性探测

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20103010.3054

Nonclassical Properties of Fields in Pair Coherent States Interacting With Two Two-Level Atoms

Zheng Xiaolan Chen Zihong

(College of Physics and Information Engineering, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350002, China)

Abstract Under the Jaynes-Cummings model, the evolution of nonclassical properties of two cavity modes is discussed, such as squeezing, sub-Poissonian statistics and violations of Cauchy-Schwarz inequalities and Bell inequalities are discussed. The two cavity modes are initially in pair coherent states, each mode interacts with two two-level atoms resonantly. Numerical simulation results show that some nonclassical properties can be enhanced after resonant interaction between the atoms and the cavity and the performance of a selective atomic measurement. Moreover, after atom-cavity interaction, a resonant classical microwave field is applied to the atoms, which performs a unitary transformation on the atomic states, a selective measurement is performed to the atoms after selecting transform parameters the two-mode squeezing can be somehow enhanced.

Key words quantum optics; nonclassical properties; resonant interaction; pair coherent states; selective measurement

1 引言

光场本质上是量子场。光的量子性使其呈现出许多经典理论无法解释的效应。研究光场的非经典效应不仅有助于揭示光场的量子本质, 而且在量子保密通信^[1]、高精度干涉测量和微弱信号检测^[2]等领域都有重要的意义。人们对非经典效应进行了广泛而深入的研究^[3~10], 例如 Chai^[3] 讨论了双模相干态的叠加态的性质, 指出双模偶相干态的压缩性与相干振幅 α 有关, 在 $\alpha=0.565$ 时达到最大压缩性。Agarwal^[4] 系统地讨论了对相干态的非经典性质。

Gerry 和 Grobe^[5] 计算了对相干态叠加态的非经典性质, 证明在光子数较小的情况下存在压缩性。

Gerry 和 Ghosh^[6] 指出在 Jaynes-Cummings(J-C)模型下利用选择性探测原子的内态, 场的压缩性可大大增强。吴怀志等^[7] 讨论了三能级 Λ 型原子与双模相干态腔场共振相互作用后的非经典性质, 指出经过选择性原子探测后腔场的压缩性可显著增强。叶赛云^[8] 研究了双光子 J-C 模型中腔场的压缩性, 指出比起单光子 J-C 模型腔场的压缩性, 在一定条件下双光子 J-C 模型中腔场的压缩性可大大增

收稿日期: 2009-12-21; 收到修改稿日期: 2010-02-24

基金项目: 国家自然科学基金(10974028)和福建省自然科学基金(2009J06002)资助课题。

作者简介: 郑小兰(1984—), 女, 硕士研究生, 主要从事量子光学方面的研究。E-mail: zxlan435@yahoo.com.cn

强。随着实验设备和实验技术水平的提高,某些量子光场的反群聚效应^[11]和压缩效应^[12]等已经被实验证实了。

2 理论计算

2.1 在 J-C 模型下原子与腔场的相互作用

对相干态^[5]是一类双模量子态,它既是两个场模的湮灭算符乘积的本征态,又是模数差算符的本征态。即对相干态 $|\zeta, q\rangle$ 满足

$$ab|\zeta, q\rangle = \zeta|\zeta, q\rangle, \quad (1)$$

$$(a^+a - b^+b)|\zeta, q\rangle = q|\zeta, q\rangle, \quad (2)$$

式中 $a(a^+)$ 和 $b(b^+)$ 分别是模式 1 和模式 2 的湮灭(产生)算符。在 Fock 态表象展开,则对相干态可以表示为

$$|\zeta, q\rangle = N_q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{[n!(n+q)!]^{1/2}} |n+q, n\rangle, \quad (3)$$

式中 N_q 是归一化系数。可以看出,对相干态是一类 $2 \times \infty$ 的纠缠态,并且模式间有高度的关联性。

在本文中,将考虑对相干态的腔场与两个二能级原子共振相互作用后:1)对原子不作任何操纵;2)对原子态做选择性探测;3)对原子先作么正变换再选择性探测原子态,腔场呈现的非经典性质。

考虑两个二能级的原子分别与处于对相干态的两个腔场的相互作用。设原子的激发态为 $|e\rangle$,基态为 $|g\rangle$ 。假定两个场模分别处于两个不同的腔中,原子 1 只与 a 模共振耦合,而原子 2 只与 b 模共振耦合,且两个原子与腔模之间的耦合系数相等,设为 g 。在相互作用绘景中,利用旋波近似得到相互作用哈密顿量为

$$H_1 = g(a|e\rangle_1\langle g| + a^+|g\rangle_1\langle e| + b|e\rangle_2\langle g| + b^+|g\rangle_2\langle e|), \quad (4)$$

式中下标 1, 2 分别代表第 1, 2 个原子。

设原子-腔场系统的初态为

$$|\Psi(0)\rangle = |g\rangle_1 |e\rangle_2 \otimes |\zeta, q\rangle = |g\rangle_1 e |e\rangle_2 \otimes N_q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{[n!(n+q)!]^{1/2}} |n+q, n\rangle. \quad (5)$$

经过时间 t 后,系统的态演化可表达为

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & N_q \sum_{n=0}^{\infty} C_n [\cos(\sqrt{n+q}g_1t) |g\rangle_1 |n+q\rangle - \text{isin}(\sqrt{n+q}g_1t) |e\rangle_1 |n+q-1\rangle] \otimes \\ & [\cos(\sqrt{n+1}g_2t) |e\rangle_2 |n\rangle - \text{isin}(\sqrt{n+1}g_2t) |g\rangle_2 |n+1\rangle] = \\ & N_q \sum_{n=0}^{\infty} C_n [\cos(\sqrt{n+q}g_1t)\cos(\sqrt{n+1}g_2t) |g_1, e_2\rangle |n+q, b\rangle - \\ & \text{icos}(\sqrt{n+q}g_1t)\text{isin}(\sqrt{n+1}g_2t) |g_1, g_2\rangle |n+q, n+1\rangle - \\ & \text{isin}(\sqrt{n+q}g_1t)\cos(\sqrt{n+1}g_2t) |e_1, e_2\rangle |n+q-1, n\rangle - \\ & \text{sin}(\sqrt{n+q}g_1t)\text{sin}(\sqrt{n+1}g_2t) |e_1, g_2\rangle |n+q-1, n+1\rangle], \quad (6) \end{aligned}$$

式中

$$C_n = \frac{\zeta^n}{[n!(n+q)!]^{1/2}}.$$

如果在原子与场相互作用一段时间 t 之后,选择性探测原子处于 $|e\rangle_1 |g\rangle_2$ 态,场态就塌缩为

$$|\Psi(t)\rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} C_n \text{sin}(\sqrt{n+q}g_1t)\text{sin}(\sqrt{n+1}g_2t) |n+q-1, n+1\rangle, \quad (7)$$

式中 N 是归一化系数。

如果在原子-腔相互作用后再对原子施加一个共振经典微波场,这个经典场将对第 2 个原子态做么正变换^[13]:

$$|g\rangle \rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |g\rangle + \text{iexp}(-\text{i}\varphi)\text{sin}\left(\frac{\theta}{2}\right) |e\rangle, |e\rangle \rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |e\rangle + \text{iexp}(\text{i}\varphi)\text{sin}\left(\frac{\theta}{2}\right) |g\rangle, \quad (8)$$

式中 θ, φ 可以由经典场调节。再探测原子处于 $|e\rangle_1 |g\rangle_2$ 态,则此时系统的态便塌缩为

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & N \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left[\text{sin}(\sqrt{n+q}g_1t)\cos(\sqrt{n+1}g_2t)\text{exp}(\text{i}\varphi)\text{sin}\left(\frac{\theta}{2}\right) |n+q-1, n\rangle - \right. \\ & \left. \text{sin}(\sqrt{n+q}g_1t)\text{sin}(\sqrt{n+1}g_2t)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |n+q-1, n+1\rangle \right], \quad (9) \end{aligned}$$

式中 N 是归一化系数。

2.2 非经典性质

2.2.1 压缩性

在度量腔场的压缩性之前, 引用 Loudon 和 Knight^[14] 定义的腔场的双模正交相位振幅算符

$$U_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(a + a^+ + b + b^+)$$

$$U_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}i}(a - a^+ + b - b^+), \quad (10)$$

振幅算符的均方偏差满足海森伯不确定性原理 $\langle(\Delta U_1)^2\rangle\langle(\Delta U_2)^2\rangle \geq 1/16$, 如果此不等式取等号, 则光场处于最小测不准态; 如果 $\langle(\Delta U_i)^2\rangle < 0.25$ ($i=1$ 或 2), 则光场第 i 个正交相位振幅存在压缩性, 即该正交分量上的量子涨落小于真空态的量子涨落。定义函数^[8]

$$q_{u_i} = \frac{\langle(\Delta U_i)^2\rangle - 0.25}{0.25}, \quad (11)$$

如果 $-1 < q_{u_i} < 0$, 则 U_i 存在压缩性。

2.2.2 亚泊松分布

亚泊松分布用 Mandel 的 Q 函数表征为

$$Q_a = \frac{\langle a^+ a a^+ a \rangle - \langle a^+ a \rangle^2 - \langle a^+ a \rangle}{\langle a^+ a \rangle}. \quad (12)$$

同理 b 的 Mandel 的 Q 函数用 b 代替上式中的 a 。 Q 函数表示出光子的量子统计特性, 即光子数分布对泊松分布的偏离程度。当 $-1 \leq Q_i < 0$ ($i = a$ 或 b), 光子数分布比泊松分布更窄即存在亚泊松分布。

2.2.3 二阶相干度

二阶相干度用来度量两个模式之间的关联性的

$$Q_{ab} = \frac{\langle a^+ a b^+ b \rangle}{\langle a^+ a \rangle \langle b^+ b \rangle} - 1. \quad (13)$$

如果 $Q_{ab} > 0$, 则光场的 a 模 b 模存在正关联; 函数等于零, 则光场两个模式是无关联的; 反之小于零, 光场的两个模式反关联。

2.2.4 柯西-施瓦茨不等式的违背

在经典电磁场中, 柯西-施瓦茨不等式为 $\langle |A|^2 \rangle \langle |B|^2 \rangle \geq |\langle A^* B \rangle|^2$ 。在量子理论中对柯西-施瓦茨不等式违背的函数, 参考 Agarwal 定义的函数

$$I_0 = \frac{(\langle a^+ a^+ a a \rangle \langle b^+ b^+ b b \rangle)^{1/2}}{|\langle a^+ a b^+ b \rangle|} - 1, \quad (14)$$

如果出现 $\langle a^+ a^+ a a \rangle \langle b^+ b^+ b b \rangle < \langle a^+ a b^+ b \rangle^2$, 即柯西-施瓦茨不等式有违背, 此时函数 I_0 应小于零。

2.2.5 贝尔不等式的违背

由于共振相互作用, 原子与腔场存在着高度非

经典的强关联, 即存在着量子纠缠特性。当两个子系统 A, B 处于一个纠缠态时, 不管它们在空间上分开多远, 它们都存在着关联, 即对 A 进行测量可推出 B 的性质, 反之亦然。量子力学的非定域性可以用贝尔不等式的违背来表征。本文讨论在赝自旋算符基础上^[15] 的 Bell-CHSH 不等式: $B_{\text{CHSH}} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}_1) \otimes (\mathbf{b} \cdot \mathbf{S}_2) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}_1) \otimes (\mathbf{b}' \cdot \mathbf{S}_2) + (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{S}_1) \otimes (\mathbf{b} \cdot \mathbf{S}_2) - (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{S}_1) \otimes (\mathbf{b}' \cdot \mathbf{S}_2)$ 的期望值。其中 $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$ 是 4 个任意的三维单位方向矢量, $\theta_a(\varphi_a)$ 是单位矢量 \mathbf{a} 的极角(方位角), \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 分别为该腔场模 1 和模 2 的赝自旋算符, 定义为

$$S_z = \sum_{n=0}^{\infty} [|2n+1\rangle\langle 2n+1| - |2n\rangle\langle 2n|],$$

$$S_{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} |2n\rangle\langle 2n+1| = (S_{\pm})^{\dagger}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} = S_z \cos \theta_a +$$

$$\sin \theta_a [\exp(i\varphi_a) S_{-} + \exp(-i\varphi_a) S_{+}], \quad (15)$$

所以:

$$\langle B_{\text{CHSH}} \rangle = E(\theta_a, \theta_b) +$$

$$E(\theta_a, \theta_{b'}) + E(\theta_{a'}, \theta_b) - E(\theta_{a'}, \theta_{b'}), \quad (16)$$

式中

$$E(\theta_a, \theta_b) = \langle \psi | \mathbf{a} \cdot \mathbf{S} | \psi \rangle =$$

$$\cos \theta_a \cos \theta_b + K \sin \theta_a \sin \theta_b. \quad (17)$$

假设 $\theta_a = 0, \theta_{a'} = \pi/2, \theta_b = -\theta_{b'}, \varphi_a = \varphi_b = \varphi_{a'} = \varphi_{b'} = 0$, 代入(16)式得

$$\langle B_{\text{CHSH}} \rangle = 2(\cos \theta_b + K \sin \theta_b). \quad (18)$$

通过适当调节 θ_b , 可得到贝尔算符期望值为

$$\langle B_{\text{CHSH}} \rangle_{\max} = 2\sqrt{1+K^2}. \quad (19)$$

局域实在论要求不等式 $|\langle B_{\text{CHSH}} \rangle| \leq 2$ 应得到满足, 但是在量子理论中 $\langle B_{\text{CHSH}} \rangle$ 可能超过 2, 它的上限是 $2\sqrt{2}$, 即存在着量子态的非定域性。

3 数值模拟

基于第 2 节中的 3 种量子态, 分别计算了包括单模压缩、双模压缩、亚泊松分布和对柯西-施瓦茨不等式的违背和建立在赝自旋算符基础上的贝尔不等式的违背等非经典性质, 指出经过对原子做么正变换再进行选择性探测原子内态后腔场的一些非经典性质的改变, 如图 1~3 所示。

经过数值模拟, 发现没有单模压缩, 并且 q_{u_1} 也不存在压缩性。与不对原子进行测量的情形相比, 对原子做测量后(图 1), 使 q_{u_2} 的压缩性质得到一定增强。图 2 中对原子加一经典场, 当 θ 取 $\pi/2$ 时 q_{u_2} 的压

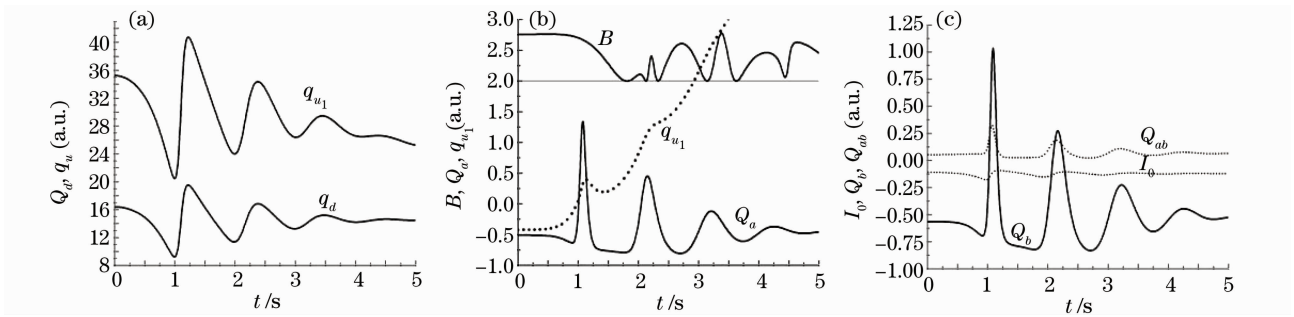


图 1 探测原子处于 $|e\rangle_1 |g\rangle_2$ 后 (a) q_d, q_{u_1} ; (b) q_{u_2}, Q_a ; (c) Q_b, Q_{ab}, I_0 (在 $q=1, \zeta=8$ 时) 和 $\langle B \rangle$ (在 $q=2, \zeta=1$ 时) 与时间 t 的函数图像

Fig. 1 Curves of (a) q_d, q_{u_1} ; (b) q_{u_2}, Q_a ; (c) Q_b, Q_{ab}, I_0 ($q=1, \zeta=8$) and $\langle B \rangle$ ($q=2, \zeta=1$) versus time t after detecting atoms are in state $|e\rangle_1 |g\rangle_2$

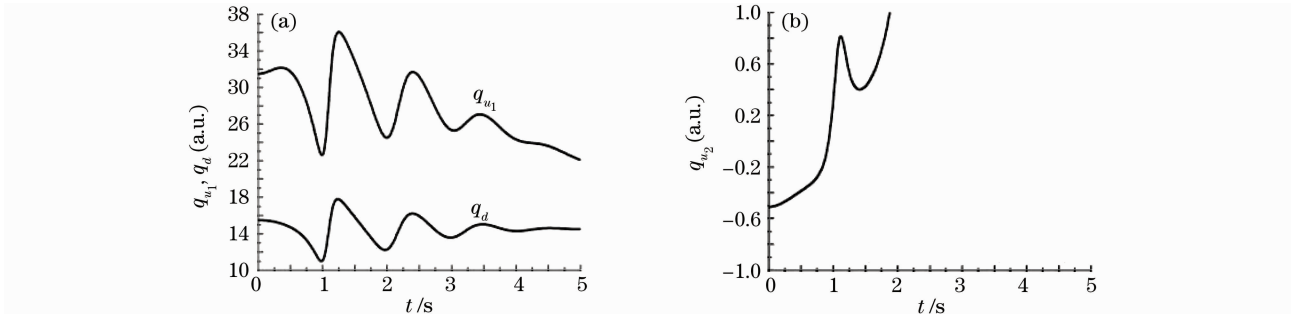


图 2 对第 2 个原子做么正变换 ($\theta=\pi/2, \varphi=-\pi/2$) 再探测原子处于 $|e\rangle_1 |g\rangle_2$ 后 q_d, q_{u_1}, q_{u_2} (在 $q=1, \zeta=8$ 时) 与时间 t 的函数图像

Fig. 2 Curves of (a) q_d, q_{u_1} ; (b) q_{u_2} versus time t after unitary transform is performed to the second atom (parameters $\theta=\pi/2, \varphi=-\pi/2$) and redetecting atoms are in state $|e\rangle_1 |g\rangle_2$

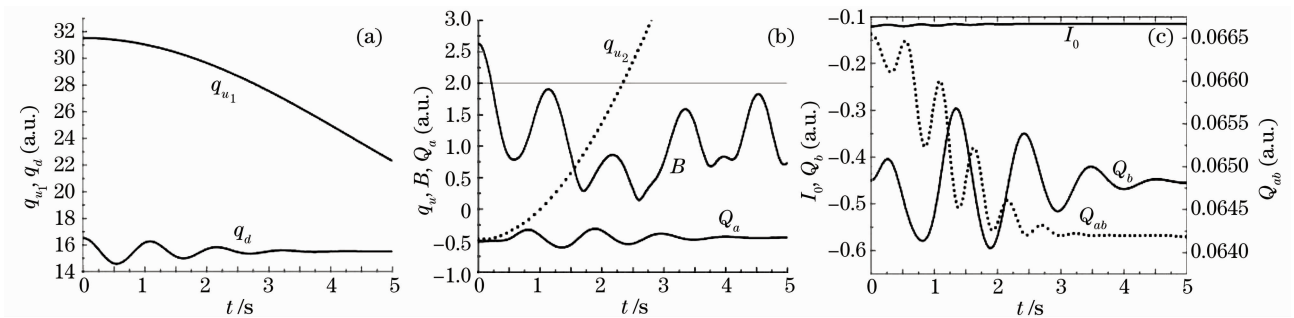


图 3 腔场直接演化后 (a) q_d, q_{u_1} ; (b) q_{u_2}, Q_a ; (c) Q_b, Q_{ab}, I_0 (在 $q=1, \zeta=8$ 时) 和 $\langle B \rangle$ (在 $q=2, \zeta=1$ 时) 与时间 t 的函数图像

Fig. 3 Curves of (a) q_d, q_{u_1} ; (b) q_{u_2}, Q_a ; (c) Q_b, Q_{ab}, I_0 ($q=1, \zeta=8$) and $\langle B \rangle$ versus time t ($q=2, \zeta=1$) after the direct evolution of the cavity

缩性达到最大值 -50.83% 。从数值模拟来看 q 的值越小 ζ 的值越大, 腔场的压缩性就越强。Agarwal^[4] 对对相干态的压缩性做了详细的研究, 指出在 q 的值越小 ζ 的值越大则双模压缩 q_{u_2} 就逼近于 -50% , 研究对相干态的腔场与原子共振相互作用后压缩性也得到了类似的结论。亚泊松分布的分析中, Q_a 和 Q_b 的值在第一种态(图 3)中总是在小于零的区域振荡, 即第一种态的光子数分布存在着亚泊松分布的性质。

进行原子选择性探测, 即在图 1 中 Q_a 和 Q_b 的值在绝大部分时间内在小于零的区域振荡, 即光子数分布在大部分时间内存在着亚泊松分布性质。关联性的度量函数 Q_{ab} 在两个图中总是呈现正值, 说明这两种态的模式之间都是关联的, 而且经过选择性探测后 Q_{ab} 的最大值在图 1 中达到了 0.32, 关联性显著增强。出现如此强的关联性, 原因也是明显的, 因为腔场初始就处于对相干态, 两个模式的光子数差总是为 q ,

其关联性就已很明显,与原子进行共振相互作用再对其做选择性探测更增强了腔场模式间的关联性。 I_0 用于度量对柯西-施瓦茨不等式违背的程度, I_0 在两个图中总是在负值区域振荡意味着柯西施-瓦茨不等式在两种态中总是有违背现象存在,而且从图中分析我们知道对原子做选择性探测后此不等式的违背更强烈,此时腔场的非经典效应更强。对于非定域性的度量,如图 1,3 所示先考虑在模数差 q 为偶数的情况下 $\langle B \rangle$ 在这两种态中的值($q=2, \zeta=1$)。图 3 指出开始处于对相干态的光场与原子做共振相互作用后,在 $t \leq 0.25$ 的时间内 $\langle B \rangle$ 的值在大于 2 的区域振荡,即贝尔不等式在此时间段有违背,之后贝尔不等式不出现违背现象,贝尔不等式处于违背的时间比较短。图 1 中的 $\langle B \rangle$ 的值总是处在 2 以上区域振荡,贝尔不等式的违背说明腔场存在着非定域性,且 $\langle B \rangle$ 的值接近于最大违背值 $2\sqrt{2}$ 。用赝自旋算符来计算的 $\langle B \rangle$ 在模数差 q 为奇数时没有违背,不能表明腔场是否有非定域性现象存在。 $\langle B \rangle, Q_a, Q_b, Q_{ab}, I_0$ 在经典场变换中当 $\theta=0$ 时非经典性质最好,即与图 1 一致。

4 结 论

利用 J-C 模型讨论了处于对相干态的腔场与两能级原子共振相互作用后的一些非经典性质。数值模拟表明 q 的值越小 ζ 的值越大下腔场的压缩性就越强。对原子施加幺正变换即经典微波场变换后再对原子做选择性探测,适当调节参数可以使亚泊松分布、模间关联度、柯西-施瓦茨不等式的违背和在赝自旋算符基础上的贝尔不等式的违背(模数差 q 为偶数)等有显著增强,腔场体现出明显的非经典效应, q 为奇数时贝尔不等式无法度量腔场的非定域性。

参 考 文 献

- 1 T. Pellizzari, S. A. Gardiner, J. I. Cirac *et al.*. Decoherence, continuous observation, and quantum computing: A cavity QED model[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**: 3788~3791
- 2 B. W. Shore, P. L. Knight. The Jaynes-Cummings model[J]. *J. Mod. Opt.*, 1993, **40**: 1195~1238
- 3 C. Chai. Two-mode nonclassical state via superpositions of two-mode coherent states[J]. *Phys. Rev. A.*, 1992, **46**: 7187~7191
- 4 G. S. Agarwal. Nonclassical statistics of fields in pair coherent states[J]. *J. Opt. Soc. Am. B.*, 1988, **5**(9): 1940~1947
- 5 C. C. Gerry, R. Grobe. Nonclassical properties of correlated two-mode Schrödinger cat states[J]. *Phys. Rev. A.*, 1995, **51**(2): 1698~1701
- 6 C. C. Gerry, H. Ghosh. Squeezing enhancement in the Jaynes-Cummings model via selective atomic measurements[J]. *Phys. Lett. A.*, 1997, **229**: 17~22
- 7 H. Wu, W. Su. Nonclassical properties in the resonant interaction of a three level Λ -type atom with two-mode field in coherent state [J]. *Chin. Phys.*, 2007, **16**(106): 106~110
- 8 S. YE. Enhancement of squeezing in two-photon Jaynes-Cummings model with atomic measurement [J]. *Commun. Theor. Phys.*, 2006, **45**: 147~150
- 9 Zhang Guoshun, Cao Zhuoliang. Emission spectrum of Λ -type three-level atom with two-mode entangled coherent states cavity fields[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(8): 1611~1617
章国顺, 曹卓良. 纠缠相干态光场驱动下 Λ -型三能级原子的辐射谱[J]. *光学学报*, 2008, **28**(8): 1611~1617
- 10 Xiao Xiaoqi, Yang Lianhua. Remote preparation of qubit via tripartite entangled W state in cavity QED[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(9): 1812~1815
肖骁琦, 杨联华. 利用三原子 W 类纠缠态在腔量子电动力学体系中实现单原子态的远程制备 [J]. *光学学报*, 2008, **28**(9): 1812~1815
- 11 M. Koashi, K. Kono, T. Hirano *et al.*. Photon antibunching in pulsed squeezed light generated via parametric amplification [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **71**(8): 1164~1166
- 12 L. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall *et al.*. Generation of squeezed states by parametric down conversion [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **57**(20): 2520~2523
- 13 G. Guo, S. Zheng. Generation of Schrodinger cat states via the Jaynes-Cummings model with large detuning [J]. *Phys. Lett. A.*, 1996, **223**: 332~336
- 14 R. Loudon, P. L. Knight. Squeezed light [J]. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**: 709~759
- 15 Z. Chen, J. Pan, G. Hou *et al.*. Maximal violation of Bell's inequalities for continuous variable systems [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, **88**(4): 040406-1