文章编号: 0253-2239(2010)10-3000-05

向列相液晶中的(1+1)维呼吸子解

朱叶青1 胡 巍2 曹龙贵2

(¹南京师范大学泰州学院应用物理系,江苏泰州 225300 ² 华南师范大学光子信息技术广东省高校重点实验室,广东广州 510006

摘要 理论分析了(1+1)维呼吸子在向列相液晶中传输时的情况,通过对原始方程作归一化计算和相应的傅里叶 变换,得到了特定情况下的强非局域非线性薛定谔方程,并且通过此方程最终求到了呼吸子解。在未作近似时可 以计算出呼吸子的周期和最大(最小)束宽,在平衡点处将势函数近似展开到二阶,此时不仅得出了呼吸子解的周 期和最大(最小)束宽,而且解出了波动振幅的解析解。通过数值模拟与解析解的比较,结果表明,解析结果成立于 非局域程度较强的情况,并且未作近似的解析解始终比较接近模拟解。

关键词 向列相液晶;非局域程度;非线性;薛定谔方程;呼吸子

中图分类号 0437.5 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103010.3000

(1+1)-D Breathers Solution in Nematic Liquid Crystals

Zhu Yeqing¹ Hu Wei² Cao Longgui²

¹Department of Applied Physics, Taizhou College, Nanjing Normal University, Taizhou, Jiangsu 225300, China ²Laboratory of Photonic Information Technology, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510006, China

Abstract The evolution of (1+1)-D breathers in nonlocal nonlinear media is theoretically discussed, and it is modeled by the nonlocal nonlinear Schrödinger equation (NNLSE) which is got from the normalized equations and corresponding Fourier transform. In the balance, the potential is approximate to the 2^{nd} order, a fundamental breathers solution is presented, and the solutions of the period and the maximal (minimal) beam width is obtained too. Without approximation, precise solutions of the period and the maximal (minimal) beam widths are also calculated here. Compared with the numerical simulations, it is obviously found that the analytical solutions are suitable in the strongly nonlocal case and the breathers solution in the 2^{nd} approximation is always less accurate than that with no approximation.

Key words nematic liquid crystal; degree of nonlocality; nonlinearity; Schrödinger equation; breathers

1 引 言

空间光孤子是一种自陷光束,当非线性效应与 衍射效应相平衡时,便形成了孤子;但是一旦达不到 平衡状态,光束便会形成呼吸子。向列相液晶 (NLC)作为一种优质的非局域非线性材料,可以实 现空间光孤子在其中稳定传输,利用传输时的相关 性质可以制成全光控制器件。1997年,Snyder等^[1] 提出了强非局域非线性介质中空间光孤子的线性模 型,将空间光孤子推入一个新的研究热潮^[1~12]。随 后,Assanto 等^[2]在外加电压的向列相液晶盒中实 现了低光强入射光条件下的空间光孤子的形成。 2002年,Peccianti 等^[3]利用光强为毫瓦量级的激光 光束在外加电压的 NLC 盒中产生了空间光孤子, 并利用其形成的导波实现了全光开关和逻辑门。 2005年,Peccianti 等^[4]在理论上发现改变液晶盒上 的偏压,可以改变 NLC 的非局域程度。2006年,胡 巍等^[5]在实验上证明了这一点。本文主要是对(1+ 1)维呼吸子在 NLC 中的传输进行研究。

基金项目:国家自然科学基金(10674050)和广东省高等学校科技创新团队计划项目(06CXTD005)资助课题。

收稿日期: 2010-01-10; 收到修改稿日期: 2010-02-20

作者简介:朱叶青(1983一),女,硕士,讲师,主要从事向列相液晶中空间光孤子及呼吸子等方面的研究。

2 非局域非线性薛定谔方程的简化模型和呼吸子解

以预倾角^[4]为任意角度的模型来描述 NLC 中 (1+1)维空间光孤子的传输,液晶盒的构造和文献 [4]中的一样。光场的包络 A 沿z 轴传输,沿 x 轴偏 振,用来控制液晶分子预倾角的低频电场 *E*_{RF} 加在 x 方向上。当输入的功率和临界功率不相等时,可以 得到呼吸子,且呼吸子的束宽在传输过程中是呈现 周期性变化的。光束传输方程可以通过以下的非局 域非线性薛定谔方程(NNLSE)表示^[4]:

 $2ikA_z + A_{xx} + k_0^2 \varepsilon_a^{OP} \sin(2\theta_0) \Psi A = 0,$ (1) $\Psi(x,z)$ 的调制方程是由于形变而使 NLC 的内能降 低到最小之后得到的,满足以下方程^[6]:

$$\Psi_{xx} - \frac{1}{\omega_{\mathrm{m}}^{2}} \Psi + \frac{\varepsilon_{0} \varepsilon_{\mathrm{a}}^{\mathrm{OP}}}{4K} \sin(2\theta_{0}) \mid A \mid^{2} = 0, \quad (2)$$

式中 K 为液晶的平均弹性系数,k 为液晶中的波矢 值, k_0 为真空中的波矢值, ϵ_0 为真空介电常数, θ_0 是 没有光场时 NLC 分子的最大预倾角, ϵ_a^{OP} 为光频介 电各向异性。根据傍轴近似理论,方程(2)中的 Ψ_{zz} 已被忽略掉,且特征长度 w_m 的表达式为

$$w_{\rm m} = \frac{1}{E_{\rm RF}} \left\{ \frac{2\theta_0 K}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\rm a}^{\rm RF} \sin(2\theta_0) [1 - 2\theta_0 \cot(2\theta_0)]} \right\}^{1/2}.$$
(3)

通过运用和文献[7]相同的方法,得到非线性系数 $n_2 = \epsilon_a^{\text{RF}} w_m^2 \sin(2\theta_0) / (4n_0^2 cK)$ 。当低频电场 E_{RF} 高于 Freederichsz 阈 值 电 场 (E_{FR})时, $\theta_0 \approx \pi/2[1 - (E_{\text{FR}}/E_{\text{RF}})^{1/3}]$ 。可见 w_m 和 n_2 都是由 E_{RF} (或偏压V)决定的。

将方程(1)和(2)归一化,令 $X = x/\omega_0, Z = z/k\omega_0^2, a = A/A_0, \psi = \Psi/(A_0^2\Psi_0), 其中 A^2 = 1/(n_0n_2k_0^2\omega_0^2), \Psi_0 = \epsilon_0\epsilon_a^{OP}w_m^2\sin(2\theta_0)/4K, w_0 是初$ 始束宽,因此可以得到以下两个无量纲的方程:

$$\mathrm{i}\partial_Z a + \frac{1}{2}a_{XX} + \psi a = 0, \qquad (4)$$

$$\psi_{XX} - \alpha^2 \psi + \alpha^2 |a|^2 = 0, \qquad (5)$$

 $R(X) = (\alpha/2)\exp(-\alpha|X|)$ 是归一化响应函数, α 代表非局域程度, 当 α 越小非局域程度越强。通过傅 里叶变换,因此 ϕ 可以表示为 $\phi = \int R(X - X')|a(X')|^2 dX'$ 。在强非局域情况下, 将 ϕ 做泰勒 展开到二阶并将各项展开结果代入到(4)式中, 可 以得到以下非局域非线性薛定谔方程

$$i\partial_{Z}a + \frac{1}{2}a_{XX} + \frac{\alpha P_{0}}{2}a + \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^{3}P_{0}}{2} - \alpha^{2} |a(0)|^{2}\right]X^{2}a = 0.$$
(6)

(6)式代表了 NLC 的重取向非线性并且是呼吸子解的简化模型,将此模型与 Snyder-Mitchell 模型进行比较,比他们的模型多了 $\alpha^3 P_0/2$ 这一项。当 $\alpha \ll 1$ 时,近似正比于轴上光强,但是 Snyder-Mitchell 模型的这一项却是正比于功率,所以该模型不同于以前的工作,满足此模型的呼吸子解可以用高斯型函数来描述

$$a = \frac{\sqrt{P_0}}{\left[\sqrt{\pi}\omega(Z)\right]^{1/2}} \times \exp\left[i\theta(Z)\right] \exp\left[-\frac{X^2}{2\omega^2(Z)} + ic(Z)X^2\right], (7)$$

式中w(Z)为束宽, $\theta(Z)$ 为相位,c(Z)为波前曲率, 将以上试探解代入(6)式中,X的零次方以及平方 项的实部和虚部分别为零,因此,

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}Z} + \frac{1}{2\omega^2} - \frac{\alpha P_0}{2} = 0, \qquad (8)$$

$$-\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}Z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega^4} - 4c^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^3 P_0}{2} - \frac{\alpha^2 P_0}{\sqrt{\pi}\omega} \right) = 0, (9)$$

$$-\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}Z} + 2c = 0. \tag{10}$$

将(10)式代入(9)式中,得到

$$\frac{d^2 w}{dZ^2} - \frac{1}{w^3} - \frac{\alpha^3 P_0 w}{2} + \frac{\alpha^2 P_0}{\sqrt{\pi}} = 0, \qquad (11)$$

在经典力学中,(11)式类似于牛顿第二定律,质点的 质量为1, $F = 1/w^3 + \alpha^3 P_0 w/2 - \alpha^2 P_0 / \sqrt{\pi}$ 等效于 粒子受到的外力,F的前两项等效于衍射效应(使等 效粒子加速),光束将被展宽或者有被展宽的趋势, 主要是由初始速度 dw/dZ |_{Z=0} ≥ 0 或 < 0 来决定。 相反地,F 的第三项即非线性效应,会使光束压缩 (使等效粒子减速)。当非线性效应等价于衍射效应 时,F = 0,粒子的速度将不会改变,即形成了所谓的 孤子态,这时w = 1,所以就可以得到此时孤子传输 的临界功率:

$$P_{\rm c} = \frac{2\sqrt{\pi}}{(2-\sqrt{\pi}\alpha)\cdot\alpha^2}.$$
 (12)

当 α 足够小时,(12)式分母中的 $\sqrt{\pi \alpha}$ 这一项可 以舍掉,因此在强非局域情况下,临界功率近似正比 于 $1/\alpha^2$,此结论和文献[13]中的结论一样。

因为F可以表示为F(w) = -dV(w)/dw,所以 F 是个保守力,因此等效势函数V(w)为

$$V(w) = \left(\frac{1}{2w^2} + \frac{\alpha^3 P_0}{4}\right)(1 - w^2) - \frac{\alpha^2 P_0}{\sqrt{\pi}}(1 - w),$$
(13)

V(w)的积分常数会使得入射点 Z = 0 处,V(1) =

光

报

0。粒子的总能量 E = T + V,是个守恒量,其中 $T = (dw/dZ)^2/2$ 是动能。假定从光束束腰处入射, $dw/dZ \mid_{Z=0} = 0$,因此粒子的初始总能量为零,则有

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}Z}\right)^2 + \left(\frac{1}{2w^2} + \frac{\alpha^3 P_0}{4}\right) (1 - w^2) - (\alpha^2 P_0) / \sqrt{\pi} (1 - w) = 0.$$
(14)

因为 dw/dt = $\sqrt{2[E - V(w)]/m}$,且质量 m = 1,因此周期 T 可以表示为

$$T = 2t = \sqrt{2} \int_{1}^{w_1} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{-V(w)}},\qquad(15)$$

其中的 $w_1 \neq V(w) = 0$ 的一个根,并且它也是呼吸 子真正的最大或者最小束宽。令 $\Lambda = P_c/P_0$,当 $\Lambda \neq$ 1时,就不会产生孤子,而是产生呼吸子。对于 $\Lambda >$ 1,衍射效应大于非线性效应,光束先展宽后压缩,因 此 $w_1 > 1$;对于 $\Lambda < 1$,情况恰好相反,光束先压缩 后展宽, $w_1 < 1$,所以 V(w) = 0有两个根应被舍弃 掉,而只有以下这个根满足条件,即

$$w_{1} = \frac{2}{3}\sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(1-\frac{4}{\sqrt{\pi\alpha}}\right),$$

$$r = \left(1-\frac{4}{\sqrt{\pi\alpha}}\right)^{2} - \frac{6}{\alpha^{3}P_{0}},$$

$$\theta = \arccos\left\{r^{-3/2}\left[\left(\frac{4}{\sqrt{\pi\alpha}}-1\right)^{3} - \frac{18}{\alpha^{3}P_{0}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi\alpha}}+1\right)\right]\right\}.$$
(16)

注意这里的势函数 V(w) 不是抛物线,在经典 力学中,只有抛物线型的势阱才能做简谐振动,否则 只能做周期性振荡,且其解析解很难得到。为了求解 (14) 式,将势函数 V(w) 在平衡位置近似展开到二 阶,V'(w') = 0, V''(w') > 0,因此 w' 是平衡位置。 通过求解四次方程 F = 0,可以得到两个虚根和两 个实根,但是因为以上条件的限制,只有以下一个根 符合条件:

$$w' = \frac{1}{2} \left[t^{1/2} - \left(-t + \frac{3}{\pi \alpha^2} + \frac{2}{\pi^{3/2} \alpha^3 t^{1/2}} \right)^{1/2} \right] + \frac{1}{2\sqrt{\pi \alpha}},$$

$$t = \frac{1}{\pi \alpha^2} + \left[\frac{4}{\pi \alpha^5 P_0} + \frac{4}{\alpha^5 P_0} \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{32\alpha}{27P_0} \right)^{1/2} \right]^{1/3} + \left[\frac{4}{\pi \alpha^5 P_0} - \frac{4}{\alpha^5 P_0} \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{32\alpha}{27P_0} \right)^{1/2} \right]^{1/3}.$$
 (17)

在平衡点 w=w'处将势函数展开到二阶,再结合初 始边界条件等,最终可以得到

$$w(Z) = w' + (1 - w') \cos\left[\left(\frac{3}{w'^4} - \frac{\alpha^3 P_0}{2}\right)^{1/2} Z\right],$$
(18)

从(18)式中,可以很明显地观察到束宽是呈现周期

性振荡的,这个近似解的振荡周期为 $L_1 = 2\pi/Q$,其 中 $Q = [3/w'^4 - \alpha^3 P_0/2]^{1/2}$,最大(小)束宽是 $w_M = 2w' - 1$ 。在这种近似条件下,归一化束宽 w 总是在 w_M 和1之间振荡的。对于 $\Lambda = 1$,只有当w = 1时, 势函数V(w) = 0;当 $\Lambda \neq 1$ 时,存在两个解,其中一 个是1,另一个是 w_1 。当输入功率越接近临界功率 时, w_1 就越接近于1,而此时所求得的抛物线势函 数就能更好地替代原本的势函数。因此,(18)式在 临界功率附近适用,将此方程代入(8)式和(10)式就 可以得到

$$\theta(Z) = \frac{\alpha P_0 Z}{2} + \frac{(1 - w') \sin(QZ)}{2Q(2w' - 1)[w' + (1 - w')\cos(QZ)]} - \frac{w'}{Q(2w' - 1)^{3/2}} \arctan\left[\sqrt{2w' - 1} \tan\left(\frac{QZ}{2}\right)\right], (19)$$

$$c(Z) = \frac{Q(w' - 1) \sin(QZ)}{2[w' + (1 - w')\cos(QZ)]}. (20)$$

将所求得的 $w(Z), \theta(Z), c(Z)$ 代人(7)式,即为 所要求的呼吸子解。

3 解析结果与数值模拟结果的对比

根据卷积方程,模拟光束在不同非局域程度下 的传输情况,并且将其与解析结果作了相应的比较。 如图 1 所示,图中实线($P_0 = 0.73P_c$)和虚线($P_0 =$ 1.36P_c)是根据(18)式的解析结果画出来的,而方 块和圆圈是数值模拟的结果,并且初始条件是 图 $1(a)_{\alpha}=0.1$,图 $2(b)_{\alpha}=0.25$,图 $3(c)_{\alpha}=0.45$ 。 初始束宽都是归一化的,当 $\Lambda < 1(\Lambda > 1)$ 时,会存在 一个最小(大)束宽,并且呼吸子的束宽呈现周期性 振荡。从图1中,可以很明显地看到当非局域程度 越强时,解析结果和模拟结果吻合越好。在图1中, 当 $\Lambda \neq 1$ 时,伴随着 α 的逐渐增大,束宽的峰值会在 传输过程中发生较大的变化,主要原因是在这种情 况下前面的↓做二阶近似有点不太严格,所以呼吸 子解的形式不是严格的 Gauss 型函数,而是介于 Gauss 和 sech 函数之间的波形^[14]。由此也说明了 液晶的非局域程度并没有达到 Snyder 等^[8]所指的 那种强非局域程度。

模拟得出(1+1)维不同输入功率下的呼吸子束 宽传输距离变化曲线,并且分别测出了他们的周期, 如图 2 所示。图中虚线和实线分别是根据(15)式中 T 的解析结果和根据(18)式所求得的 L₁,实心方块 是模拟结果。从图 2 中可以看出,在临界功率附近 T,L₁ 和模拟结果符合得很好;当远离临界功率时, 三个结果逐渐分开。并且当非局域程度逐渐变弱时,分开越明显。但是不管怎样,T解析结果始终比 L1的结果更接近模拟结果,因为L1是势函数V(w) 作二阶近似后得到的。

利用同样的方法,得到了呼吸子最大(小)束宽 在不同输入功率和不同非局域程度下的关系曲线, 如图 3 所示。此结果和图 2 的结果很类似,实心方 块是数值模拟结果,实线是由(18)式所得到的 2w'-1的解析结果,它仅成立于强非局域。由图中 可以明显地看出,当非局域程度不足够强时,此结果 不正确。虚线是精确的解析解,它是根据(16)式所 画的曲线,此结果比 2w'-1更精确一些。



图 1 (1+1)维呼吸子在液晶中传输的束宽变化图





图 2 呼吸子的振荡周期和周期平方的倒数随输入功率的变化图 Fig. 2 Period and the reciprocal of its square versus the input powers



图 3 呼吸子的最大(最小)束宽和最大(最小)束宽平方的倒数随输入功率的变化关系图 Fig. 3 Maximal (minimal) beam width and the reciprocal of its square versus the input powers

光

报

通过将数值模拟结果和解析结果的相互比较, 可以很明显地看到当非局域程度越强时,两结果吻 合得越好。并且图 2 和图 3 中随输入功率的不断变 化,呼吸子的振荡周期和最大(最小)束宽及其平方 的倒数的变化趋势与文献[15]中的实验结果基本一 致,因此证明了文中理论的合理性。但与此同时,很 明显地看到当输入功率远离临界功率时,精确解析 解和数值模拟结果也会分开,这是因为光束中心的 非线性折射率分布曲线变得更陡峭了,(4)式中的φ 展开到二阶已经不能很好地近似了,也就是说这时 近似模型(6)式已开始失效。

4 结 论

本文以预倾角为任意角度的模型来描述 NLC 中(1+1)维空间光孤子的传输情况,基于液晶的一 些基本理论方程,通过相应的傅里叶变换,得到了强 非局域非线性薛定谔方程,并对此模型作了定性的 解释,最终通过此方程求得了呼吸子解。在未作近 似时计算出呼吸子的周期和最大(最小)束宽;且在 平衡点处将势函数近似展开到二阶,不仅得出了呼 吸子解的周期和最大(最小)束宽,而且解出了波动 振幅的解析解。最后,将数值模拟结果与解析结果 进行比较,相互验证,并且分析了两结果存在差异的 实质原因。

参考文献

- 1 A. W. Snyder, D. J. Mitchell. Accessible solitons[J]. Science, 1997, 286(5318): 1518~1530
- 2 M. Peccianti, A. de Rossi, G. Assanto *et al.*. Electrically assisted selfconfinement and waveguiding in planar nematic liquid crystal cells[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2000, **77**(1): 01427-3
- 3 M. Peccianti, Brzdaliewicz, G. Assanto. All-optical switching and logic gating with spatial solitons in liquid crystals[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2002, 81(18): 3335-3

- 4 M. Peccianti, C. Conti, G. Assanto. Interplay between nonlocality and nonlinearity in nematic liquid crystals[J]. Opt. Lett., 2005, 30(4): 415-7
- 5 W. Hu, T. Zhang, Q. Guo *et al.*. Nonlocality-controlled interaction of spatial soliton in nematic liquid crystals[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2006, **89**(7): 071111-1~071111-3
- 6 M. Peccianti, C. Conti, G. Assanto *et al.*. Nonlocal optical propagation in nonlinear nematic liquid crystals [J]. J. Opt. Phys. Mat., 2003, 12(4): 525~538
- 7 Zhu Yeqing, Long Xuewen, Hu Wei *et al.*. The influence of nonlocality on solions in nematic liquid crystals[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, **57**(4): 2260~2264
 朱叶青,龙学文,胡 巍等. 非局域程度謝向列相液晶中空间光
- 孤子的影响[J]. 物理学报, 2008, **57**(4): 2260~2264
- 8 Qi Guo, Boren Luo, Fahuai Yi et al.. Large phase shift of nonlocal optical spatial solitons[J]. Phys. Rev. E, 2004, 69(1): 016602-1~016602-8
- 9 Wang Xinghua, Guo Qi, Xie Xiqun. Analysis of Gaussian beam parameters evolution law in strongly nonlocal media[J]. Chinese J. Lasers, 2005, 32(8): 1059~1062
- 王形华,郭 旗,谢逸群.强非局域介质中高斯光束参量演化规 律的分析[J].中国激光,2005,**32**(8):1059~1062
- Wang Xinghua, Guo Qi. Propagation properties of hyperbolic secant shaped optical beam in strongly nonlocal media[J]. *Chinese* J. Lasers, 2006, 33(5): 645~649 王形华,郭 旗.双曲正割型光束在强非局域介质中的传输特性 [J]. 中国激光, 2006, 33(5): 645~649
- 11 Zhang Tao, Hu Wei, Long Xuewen *et al.*. Experimental observation of strong nonlocal optical spatial solitons in nematic liquid crystals[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, 27(1): 143~147
 张 涛,胡 巍,龙学文等.向列相液晶中强非局域空间光孤子的实验观察[J]. 光学学报, 2007, 27(1): 143~147
- 12 Zhao Xin, Chu Cunkun, Zhang Dongsheng *et al.*. (1+1)-Dimensional higher-order mode breathers in strongly nonlocal nonlinear media[J]. Acta Optica Sinica, 2008, 28(5): 965~970 赵 昕,楚存坤,张东升等. (1+1)维强非局域非线性介质中的 高阶模呼吸子[J]. 光学学报, 2008, 28(5): 965~970
- 13 S. Ouyang, Q. Guo, W. Hu. Perturbative analysis of generally nonlocal spatial optical solitons[J]. *Phys. Rev. E*, 2006, 74(9): 036622-1~036622-8
- 14 G. I. Stegeman, M. Segev. Optical spatial solitons and their interactions: universality and diversity [J]. Science, 1999, 286(5444): 1518~1530
- 15 C. Conti, M. Peccianti, G. Assanto. Observation of optical spatial solitons in a highly nonlocal medium [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 92(11): 113902-1~113902-4