

文章编号: 0253-2239(2010)10-2845-04

一般光束等效曲率半径的传输方程

季小玲

(四川师范大学物理学院, 四川 成都 610068)

摘要 给出了一般光束等效曲率半径在湍流大气和自由空间中的传输方程,推导出等效曲率半径达到最小值时光束的传输距离公式,解析地讨论了等效曲率半径的特性,并用数值计算例加以说明。研究表明,在自由空间中,一般光束等效曲率半径的传输方程与理想高斯光束的相同,当传输距离足够远时一般光束的等效等相面可以看成球面。但是,在湍流大气中,当传输距离足够远时一般光束的等效曲率半径仍然与光束参数有关,等效曲率半径随湍流的增强而减小。

关键词 大气光学;等效曲率半径传输方程;湍流;一般光束

中图分类号 O436; TN012 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20103010.2845

Propagation Equation of the Effective Radius of Curvature of General Beams

Ji Xiaoling

(Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan 610068, China)

Abstract The propagation equation of the effective radius of curvature of general beams in atmospheric turbulence and free space is given, and the formula of the position where the effective radius of curvature reaches its minimum is also derived. The properties of the effective radius of curvature are studied analytically, and illustrated by numerical calculation examples. It is shown that the effective radius of curvature of general beams obeys the same free-space propagation equation as the wavefront curvature of an ideal Gaussian beam. In free space the wavefront of general beams can be regarded as a spherical surface when the propagation distance is long enough. However, in turbulence the effective radius of curvature of general beams depends on the beam parameters when the propagation distance is long enough, and the effective radius of curvature decreases when the strength of turbulence-increases.

Key words atmospheric optics; propagation equation of effective radius of curvature; turbulence; general beam

1 引言

光束等相面的曲率半径是描述光束特性的重要参数。但由于一般光束的等相面为非球面或非高斯面,使得对光束等相面特性的研究遇到很大困难。迄今为止,对此问题研究涉及甚少。1992年, Miguel等^[1]提出了采用球面拟合实际非球面和非高斯等相面的方法,但未能给出拟合等相面曲率半径的简单解析式。2002年, Ricklin等^[2]利用互相干函数给出了高斯-谢尔模型(GSM)光束在湍流大气中的曲率半径公式,但这种方法仅适用于只含高斯项的光束。另一方面,激光在湍流大气中的传输是一个有重要理论和实际应用的课题^[3],对此已进行了许多研究。但研究工作大都限于湍流对光强分

布、光束扩展、光谱特性、偏振特性和相干特性等的影响^[4~15]。本文采用等效曲率半径的概念^[16],给出了一般光束在湍流大气和自由空间中等效曲率半径的传输方程,解析地讨论了等效曲率半径的特性,并用数值计算例加以说明。

2 一般光束等效曲率半径的传输方程及其讨论

Wigner分布函数是研究部分相干光的有利工具,它可用交叉谱密度函数 W 表示为^[17]

$$h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, z) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int W(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_d, z) \exp(-ik\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\rho}_d) d\boldsymbol{\rho}_d, \quad (1)$$

收稿日期: 2009-12-23; 收到修改稿日期: 2010-02-01

基金项目: 国家自然科学基金(60778048)资助课题。

作者简介: 季小玲(1963—),女,博士,教授,主要从事激光束的传输与控制等方面的研究。E-mail: jixl100@163.com

式中 $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2)/2$, $\boldsymbol{\rho}_d = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$, $\boldsymbol{\rho}_1 = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{\rho}_2 = (x_2, y_2)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y)$, $k\theta_x$ 和 $k\theta_y$ 分别表示 x 和 y 方向的波矢分量, 波数 $k=2\pi/\lambda$ (λ 为波长)。

三维光束的 $n_1 + n_2 + m_1 + m_2$ 阶矩的 Wigner 分布函数表示为^[17]

$$\langle x^{n_1} y^{n_2} \theta_x^{m_1} \theta_y^{m_2} \rangle = \frac{1}{P} \iint x^{n_1} y^{n_2} \theta_x^{m_1} \theta_y^{m_2} h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, z) d\rho d\theta, \quad (2)$$

式中 $P = \iint h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, z) d\rho d\theta$ 为光束总能量。

假设光束束腰位于 $z=0$ 平面处。根据 Wigner 分布函数二阶矩定义, 可以得到部分相干光通过湍流大气传输其二阶矩 $\langle \rho^2 \rangle$ 和 $\langle \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle$ 的一般传输变换公式为^[18]

$$\langle \rho^2 \rangle = \langle \rho_0^2 \rangle + \langle \theta_0^2 \rangle z^2 + (4/3) T z^3, \quad (3)$$

$$\langle \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle = \langle \theta_0^2 \rangle z + 2 T z^2, \quad (4)$$

式中 $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$, $\langle \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle = \langle x\theta_x \rangle + \langle y\theta_y \rangle$, $\langle \rho_0^2 \rangle$ 和 $\langle \theta_0^2 \rangle$ 表示 $z=0$ 平面处对应的二阶矩, 并且

$$T = \pi^2 \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa, \quad (5)$$

式中 $\Phi_n(\kappa)$ 为湍流介质的折射率起伏空间谱密度函数。

各二阶矩具有明确的物理意义。例如, $\langle \rho^2 \rangle$ 表示束宽, $\langle \theta^2 \rangle$ 表示角扩展, $\langle \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle$ 反比与光束等相面曲率半径。根据文献^[16], 任意场的等效曲率半径可以用二阶矩定义为

$$R = \frac{\langle \rho^2 \rangle}{\langle \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle}, \quad (6)$$

将(3), (4)式代入(6)式得到一般光束在湍流大气中等效曲率半径的传输方程为

$$R = \frac{\langle \rho_0^2 \rangle + \langle \theta_0^2 \rangle z^2 + (4/3) T z^3}{\langle \theta_0^2 \rangle z + 2 T z^2}. \quad (7)$$

(7)式表明, 一般光束的等效曲率半径由 $\langle \rho_0^2 \rangle$, $\langle \theta_0^2 \rangle$, z 和 T 共同确定。

对(7)式讨论如下:

1) 当 $T=0$, (7)式简化为自由空间中的等效曲率半径的传输方程, 即

$$R|_{\text{free}} = z_R|_{\text{free}} \left(\frac{z_R|_{\text{free}}}{z} + \frac{z}{z_R|_{\text{free}}} \right), \quad (8)$$

式中

$$z_R|_{\text{free}} = \sqrt{\langle \rho_0^2 \rangle / \langle \theta_0^2 \rangle}, \quad (9)$$

为一般光束在自由空间中的瑞利长度^[16]。(8)式表明, 由(6)式定义的一般光束的等效曲率半径的传输方程与理想高斯光束的相同。

2) 当 $z \rightarrow \infty$ 时, (7)式简化为

$$R_\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} R \approx \frac{\langle \theta_0^2 \rangle}{2T} + \frac{2}{3} z. \quad (10)$$

(10)式表明, R_∞ 正比于 $\langle \theta_0^2 \rangle$ 和 z , 反比于 T 。对于自由空间情况, (10)式失效, 利用(8)式得到

$$R_\infty|_{\text{free}} = \lim_{z \rightarrow \infty} R|_{\text{free}} \approx z. \quad (11)$$

(11)式表明, 在自由空间中, 当传输距离足够远时一般光束的等效等相面可以看成球面, 这一结论与光束参数无关。但是, 由(10)式可知, 湍流大气中 R_∞ 与光束参数有关, 随着传输距离和湍流强度的继续增大光束参数对 R_∞ 的影响减弱。

3) 对(7)式求一阶导数 dR/dT 得到

$$\frac{dR}{dT} = -\frac{2(3\langle \rho_0^2 \rangle + \langle \theta_0^2 \rangle z^2)}{3(\langle \theta_0^2 \rangle + 2Tz)^2}. \quad (12)$$

显然, $dR/dT < 0$, 即一般光束的等效曲率半径随湍流的增强而减小。

4) 对(7)式求一阶导数 dR/dz , 并令 $dR/dz=0$ 得到

$$\frac{8}{3} T^2 z^4 + \frac{8}{3} \langle \theta_0^2 \rangle T z^3 + \langle \theta_0^2 \rangle^2 z^2 - 4\langle \rho_0^2 \rangle T z - \langle \rho_0^2 \rangle \langle \theta_0^2 \rangle = 0. \quad (13)$$

方程(13)是一个关于传输距离 z 的四次方程, 有四个根, 但其中只有一个是正的实数根, 它即便是等效曲率半径达到最小值时的传输距离 z_{\min}

$$z_{\min} = -\frac{\langle \theta_0^2 \rangle}{4T} + \frac{1}{2} \sqrt{C} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{C}} \left(\frac{\langle \theta_0^2 \rangle^3}{2T^3} + \frac{12\langle \rho_0^2 \rangle}{T} \right) - 4C \right]^{1/2}. \quad (14)$$

式中

$$C = \frac{1}{4\sqrt{2}T^2} \left(\frac{3\langle \theta_0^2 \rangle^4}{\sqrt{2}B} + \frac{1}{6} B \right), \quad (15)$$

$$B = (A - \sqrt{A^2 - 54\langle \theta_0^2 \rangle^{12}})^{1/3}, \quad (16)$$

$$A = 54(\langle \theta_0^2 \rangle^3 + 24\langle \rho_0^2 \rangle T^2)^2. \quad (17)$$

对于自由空间情况, (14)式失效, 利用(8)式得到自由空间中等效曲率半径达到最小值时的传输距离为

$$z_{\min}|_{\text{free}} = \sqrt{\langle \rho_0^2 \rangle / \langle \theta_0^2 \rangle}. \quad (18)$$

3 数值计算例及其分析

部分相干厄米-高斯(H-G)光束在 $z=0$ 处的交叉谱密度函数表示为

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z=0) = Q_m^2 Q_n^2 H_m \left[\frac{\sqrt{2}x_1}{w_0^2} \right] H_m \left[\frac{\sqrt{2}x_2}{w_0^2} \right] H_n \left[\frac{\sqrt{2}y_1}{w_0^2} \right] \times H_n \left[\frac{\sqrt{2}y_2}{w_0^2} \right] \exp \left[-\frac{\boldsymbol{\rho}_1^2 + \boldsymbol{\rho}_2^2}{w_0^2} - \frac{(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)^2}{2\sigma_0^2} \right], \quad (19)$$

式中 w_0 为对应高斯光束束腰宽度, σ_0 为在 $z=0$ 处

光束的空间相干长度, $H_i (i=m, n)$ 为 i 阶厄米多项式, 并且

$$Q_i^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} 2^i \omega_0 i!}. \quad (20)$$

对于部分相干 H-G 光束可以得到

$$\langle \rho_0^2 \rangle = \frac{1+m+n}{2} \omega_0^2, \quad (21)$$

$$\langle \theta_0^2 \rangle = \frac{2}{k^2 \omega_0^2} \left(1+m+n + \frac{1}{\alpha^2} \right), \quad (22)$$

式中 $\alpha = \sigma_0 / \omega_0$ 为光束的相干参数。

数值计算中若采用 von Kármán 谱, 即^[3]

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \left(\kappa^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right)^{-11/6} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \quad (23)$$

式中 $\kappa_m = 5.92/l_0$, l_0 和 L_0 分别为湍流的内、外尺度。 C_n^2 是折射率结构常数, 它表征湍流的强弱。当湍流的内、外尺度取典型值 $l_0 = 0.01\text{m}$ 和 $L_0 = 10\text{m}$, 并将 (23) 式代入 (5) 式积分后得到 $T = 7.067 C_n^2$ 。

图 1, 图 2 分别为部分相干 H-G 光束的等效曲率半径 R 随传输距离 z 和等效曲率半径达到最小

值时的位置 z_{\min} 随折射率结构常数 C_n^2 的变化曲线, 计算参数取为 $\lambda = 1.06\mu\text{m}$ 和 $\omega_0 = 0.02\text{m}$ 。从图 1 可看出: 随着传输距离 z 的增加, 在自由空间中不同参数光束的等效曲率半径趋于相同 (即 R_∞ 相同), 而在湍流大气中 R_∞ 与光束参数有关; 湍流使得 R 减小; 不论在自由空间还是在湍流大气中 R 随 z 变化的存在一个极小值。图 2(a) 表明, 对于 $m=n=0$ (GSM 光束) 情况, 当光束相干参数 α 较小时 z_{\min} 几乎不随 C_n^2 而变化, 当 α 较大时 z_{\min} 随着 C_n^2 的增大而减小。由图 2(b) 可知, 当光束阶数较高时 z_{\min} 也几乎不随 C_n^2 而变化。

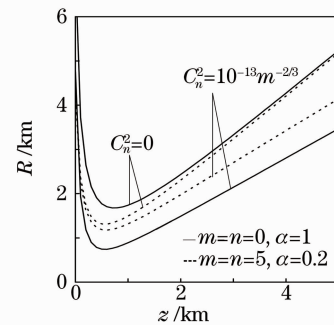


图 1 R 随 z 变化曲线

Fig. 1 Curves of R versus z

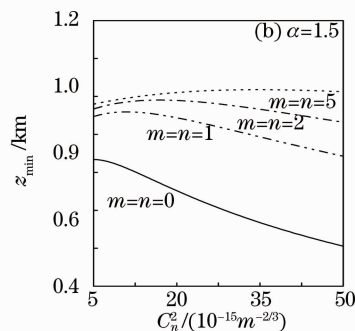
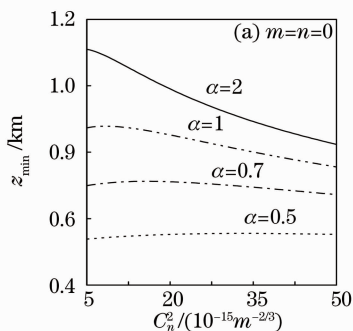


图 2 z_{\min} 随 C_n^2 变化曲线

Fig. 2 Curves of z_{\min} versus C_n^2

4 结 论

本文给出了一般光束等效曲率半径 R 在湍流大气和自由空间中的传输方程, 推导出等效曲率半径达到最小时光束的传输距离 z_{\min} , 解析地讨论了等效曲率半径的特性, 并用数值计算例加以说明。研究表明, 在自由空间中, 一般光束的等效曲率半径的传输方程与理想高斯光束的相同, 当传输距离足够远时一般光束的等效等相面可以看成球面。但是, 在湍流大气中, 当传输距离足够远时一般光束的等效曲率半径仍然与光束参数有关, 等效曲率半径随湍流的增强而减小。对于部分相干 H-G 光束, z_{\min} 随湍流的增强而减小, 但是当光束相干参数较小

和光束阶数较高时 z_{\min} 几乎不随湍流强度而变化。

参 考 文 献

- 1 A. P. Miguel, A. Javier, B. Eusebio. Complex beam parameter and ABCD law for non-Gaussian and nonspherical light beams [J]. *Appl. Opt.*, 1992, **31**(30): 6389~6402
- 2 J. C. Ricklin, F. M. Davidson. Atmospheric turbulence effects on a partially coherent Gaussian beam: implications for free-space laser communication [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2002, **19**(9): 1794~1802
- 3 L. C. Andrews, R. L. Phillips. *Laser Beam Propagation through Random Media*, 2nd ed. [M]. Bellingham, Washington: SPIE Press, 2005
- 4 H. T. Eyyuboglu, Y. Baykal. Hermite-sine-Gaussian and Hermite-sinh-Gaussian laser beams in turbulent atmosphere [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2005, **22**(12): 2709~2718
- 5 G. Gbur, E. Wolf. Spreading of partially coherent beams in

- random media [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2002, **19**(8): 1592~1598
- 6 Y. J. Cai, S. He. Propagation of various dark hollow beams in a turbulent atmosphere [J]. *Optics Express*, 2006, **14**(4): 1353~1367
- 7 X. L. Ji, E. T. Zhang, B. D. Lü. Superimposed partially coherent beams propagating through atmospheric turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am. B.*, 2008, **25**(5): 825~833
- 8 X. Q. Li, X. L. Ji. Angular spread and directionality of Hermite-Gaussian array beams propagating through atmospheric turbulence[J]. *Applied Optics*, 2009, **48**(22): 4338~4347
- 9 Wang Tao, Pu Jixiong. Propagation of Bessel-correlated partially coherent hollow beams in the turbulent atmosphere [J]. *Acta Physica Sinica.*, 2007, **56**(11): 6754~6760
王 涛, 蒲继雄. 部分相干空心光束在湍流介质中的传输特性 [J]. *物理学报*, 2007, **56**(11): 6754~6760
- 10 H. T. Eyyuboglu, Y. J. Cai, Y. Baykal. Spectral shifts of general beams in turbulent media [J]. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 2008, **10**: 015005
- 11 Ji Xiaoling, Zhang Tao, Chen Xiaowen *et al.*. Spectral properties of flat-topped beams propagating through atmospheric turbulence [J]. *Acta Optica Sinica.*, 2008, **28**(1): 12~16
季小玲, 张 涛, 陈晓文 等. 平顶光束通过湍流大气传输的光谱特性 [J]. *光学学报*, 2008, **28**(1): 12~16
- 12 M. Salem, O. Korotkova, A. Dogariu *et al.*. Polarization changes in partially coherent electromagnetic beams propagating through turbulent atmosphere [J]. *Waves in Random Media*, 2004, **14**: 513~523
- 13 Ji Xiaoling, Chen Sunhui, Li Xiaoqing. Polarization properties of partially coherent electromagnetic Hermite-Gaussian beams in atmospheric turbulence [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(1): 67~72
季小玲, 陈森会, 李晓庆. 部分相干电磁厄米-高斯光束通过湍流大气传输的偏振特性 [J]. *中国激光*, 2008, **35**(1): 67~72
- 14 Y. Zhu, D. Zhao. Propagation of a stochastic electromagnetic Gaussian Schell-model beam through an optical system in turbulent atmosphere [J]. *Appl. Phys. B.*, 2009, **96**: 155~160
- 15 X. L. Ji, X. W. Chen, S. H. Chen *et al.*. Influence of atmospheric turbulence on the spatial correlation properties of partially coherent flat-topped beams [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2007, **24**(11): 3554~3563
- 16 H. Weber. Propagation of higher-order intensity moments in quadratic-index media [J]. *Optical and Quantum Electronics*, 1992, **24**: 1027~1049
- 17 J. Serna, R. Martinez-Herreor, P. M. Mejias. Parametric characterization of general partially coherent beams propagating through ABCD optical system [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1991, **8**(7): 1094~1098
- 18 Y. Dan, B. Zhang. Second moments of partially coherent beams in atmospheric turbulence [J]. *Opt. Lett.*, 2009, **34**(5): 563~565