

文章编号: 0253-2239(2010)01-0257-05

双模腔场与一个 V 型三能级原子共振相互作用的压缩特性

郑乃清

(宁德师范高等专科学校物理系, 福建 宁德 352100)

摘要 采用全量子理论和数值计算方法, 研究了初始处于相干态的双模腔场与一个 V 型三能级原子共振相互作用的压缩特性, 讨论了在没有对原子进行态选择测量、直接对原子进行态选择测量和应用经典微波场并对原子进行态选择测量的三种情况下, 腔模平均光子数、耦合系数以及相互作用时间对压缩特性的影响。证明了压缩随着两个腔模光子数的增加而增加, 而且通过对原子进行态选择性测量可以使压缩大大地增强, 即使少光子数也一样。综合所有情形, 发现最大压缩可以接近 75%。

关键词 量子光学; 双模腔场; 压缩特性; 共振相互作用; 态选择性测量

中图分类号 O431 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20103001.0257

The Squeezing Properties of a Two-Mode Cavity Field Resonantly Interacting with a Three-Level V-Type Atom

Zheng Naiqing

(Department of Physics, Ningde Teachers College, Ningde, Fujian 352100, China)

Abstract The squeezing properties of a two-mode field initially in a coherent state resonantly interacting with a three-level V-type atom are investigated by means of the quantum theory and numerical calculations. The dependence of the squeezing on the average photon number of the cavity mode, the coupling constant and the interaction time is discussed for three cases: 1) no state-selective atomic measurement; 2) direct state-selective atomic measurement; 3) state-selective atomic measurement after the application of a classical field. It is show that the squeezing increases with the average photon number of the two cavity mode, and it is greatly enhanced if the atom is state-selectively measured even for the case of low photon number. It is concluded that the maximal squeezing is approximately 75% for all the considered cases.

Key words quantum optics; two-mode cavity; squeezing properties; resonant interaction; state-selective measurement

1 引 言

光场与原子的相互作用是量子光学的一个重要研究课题, 人们广泛研究了光场与原子相互作用过程中的动力学特征^[1~5]和非经典效应^[6~8]。光场的压缩特性是光场的非经典特性之一, 它在光学通信、弱信号检测和引力波探测等方面有潜在的应用, 一直备受关注^[9~11]。人们已经研究了单模腔场与一个两能级原子相互作用的压缩特性^[12~14]。Meystre

等^[12]证明了在一个双能级原子和腔场共振相互作用的 Jaynes-Cummings (J-C) 模型中可以获得单模量子化电磁场的压缩, 当光场初始处于相干态且平均光子数 10 个或更少时, 获得的压缩量确实是不大的, 仅约 20%。Hillery^[13]证明了在单光子 J-C 模型中一个单模腔场的有效压缩要求大的光子数。Gerry 等^[14]证明了通过选择原子测量可以大大地增强压缩, 即使少光子数也一样。近几年, 人们研究了

收稿日期: 2009-03-12; 收到修改稿日期: 2009-04-07

作者简介: 郑乃清(1963—), 男, 副教授, 主要从事量子光学方面的研究。E-mail: fjndtc_znq@sina.com.

初始处于相干态的双模腔场和一个三能级原子相互作用的压缩特性^[15,16], Wu 等^[15]研究了由一个初始处于相干态的双模腔场与一个 Λ 型三能级原子共振相互作用而产生的电磁场的压缩特性。本文证明了在一个初始处于相干态的双模腔场与一个 V 型三能级原子共振相互作用的过程中存在压缩, 压缩随着两个腔模光子数的增加而增加, 而且对原子进行选择测量后压缩大大地增强。

2 理论模型

考虑一个双模腔场与一个 V 型三能级原子的相互作用。原子的两个高能级分别用 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 表示, 低能级用 $|3\rangle$ 表示, 能级 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 之间的跃迁是电偶极禁戒的。假设能级 $|1\rangle$ 和 $|3\rangle$ 之间的跃迁只与第一个腔模耦合, 能级 $|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 之间的跃迁只与第二个腔模耦合, 在相互作用绘景中, 在旋转波近似下, 系统的哈密顿量为 (令 $\hbar = 1$)

$$H_I = g_1(aA_1^\dagger A_3 + a^\dagger A_1 A_3^\dagger) + g_2(bA_2^\dagger A_3 + b^\dagger A_2 A_3^\dagger), \quad (1)$$

式中 a^\dagger (b^\dagger) 和 a (b) 表示两个腔场的产生和湮没算符, A_j^\dagger 和 A_j 表示原子处于 j 能级的产生及湮没算符, g_1 和 g_2 (令 $g_1 = g_2 = g$ 为实数) 是原子与相应腔场的耦合系数。

假设原子初始处于基态 $|3\rangle$, 而腔场初始调制于一种场态, 即

$$|\Psi_i^{(0)}\rangle = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} |m,n\rangle, \quad (2)$$

其中 $|m,n\rangle$ 为双模福克态。

经过相互作用时间 t 后, 系统的态演化为

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} (\cos \Omega_{m,n} t |3,m,n\rangle - i \sin \theta_{m,n} \sin \Omega_{m,n} t |1,m-1,n\rangle - i \cos \theta_{m,n} \sin \Omega_{m,n} t |2,m,n-1\rangle), \quad (3)$$

其中 $\Omega_{m,n} = g \sqrt{m+n}$, $\sin \theta_{m,n} = \frac{g \sqrt{m}}{\Omega_{m,n}}$,

$$\cos \theta_{m,n} = \frac{g \sqrt{n}}{\Omega_{m,n}}.$$

若腔场初始处于双模相干态, 则

$$C_{m,n} = \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2] \frac{\alpha^m \beta^n}{\sqrt{m!n!}}.$$

为了方便, 设 α 和 β 均为实数, 这时双模腔场的平均光子数分别为 $\bar{m} = \alpha^2$, $\bar{n} = \beta^2$ 。

如果原子和双模腔场相互作用 t 时间后离开腔场, 那么原子和腔场处于一个纠缠态。如果没有对原子进行态选择测量, 这时双模腔场一般处于一种混合态, 可以用约化密度算符来描述腔场:

$$\rho_f(t) = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + |\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|, \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} \cos \Omega_{m,n} t |m,n\rangle, \\ |\Psi_2\rangle &= -i \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} \sin \theta_{m,n} \sin \Omega_{m,n} t |m-1,n\rangle, \\ |\Psi_3\rangle &= -i \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} \cos \theta_{m,n} \sin \Omega_{m,n} t |m,n-1\rangle. \end{aligned}$$

现在, 直接对原子进行态选择测量, 假设探测到原子处于激发态 $|2\rangle$, 腔场将坍缩为

$$|\Psi_f(t)\rangle = \frac{1}{N} \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} \cos \theta_{m,n} \sin(\Omega_{m,n} t) |m,n-1\rangle, \quad (5)$$

其中 N 是归一化因子:

$$N = \left[\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}^2 \cos^2 \theta_{m,n} \sin^2(\Omega_{m,n} t) \right]^{1/2}.$$

如果探测到原子处于基态 $|3\rangle$, 腔场将坍缩为

$$|\Psi_f(t)\rangle = \frac{1}{N'} \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} \cos(\Omega_{m,n} t) |m,n\rangle, \quad (6)$$

其中 N' 是归一化因子:

$$N' = \left[\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}^2 \cos^2(\Omega_{m,n} t) \right]^{1/2}.$$

假设把原子注入到一个经典微波场, 经过和微波场相互作用后离开, 那么原子经历了以下的变换^[17]:

$$|3\rangle \rightarrow \cos \varphi |3\rangle + i \exp(-i\phi) \sin \varphi |2\rangle \quad (7)$$

$$|2\rangle \rightarrow \cos \varphi |2\rangle + i \exp(i\phi) \sin \varphi |3\rangle \quad (8)$$

式中参数 φ 和 ϕ 可通过调节经典场的幅度和相位加以控制, 在此, 取 $\varphi = \pi/4$, $\phi = \pi$ 。

那么系统的态演化为

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_{m,n} t) (|3,m,n\rangle - i |2,m,n\rangle) - i \sin \theta_{m,n} \sin(\Omega_{m,n} t) |1,m-1,n\rangle - \right. \\ &\quad \left. \frac{i}{\sqrt{2}} \cos \theta_{m,n} \sin(\Omega_{m,n} t) (|2,m,n-1\rangle - i |3,m,n-1\rangle) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

然后, 对原子也进行态选择测量, 假设探测到原子处于激发态 $|2\rangle$, 腔场将坍缩为

$$|\Psi_1(t)\rangle = \frac{1}{N''} \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} [\cos(\Omega_{m,n}t) |m,n\rangle + \cos\theta_{m,n} \sin(\Omega_{m,n}t) |m,n-1\rangle], \quad (10)$$

其中 N'' 为归一化因子

$$N'' = \left\{ \sum_{m,n=0}^{\infty} [C_{m,n}^2 \cos^2(\Omega_{m,n}t) + C_{m,n} C_{m,n+1} \cos(\Omega_{m,n}t) \cos\theta_{m,n+1} \sin(\Omega_{m,n+1}t) + C_{m,n} C_{m,n-1} \cos\theta_{m,n} \sin(\Omega_{m,n}t) \cos(\Omega_{m,n-1}t) + C_{m,n}^2 \cos^2\theta_{m,n} \sin^2(\Omega_{m,n}t)] \right\}^{1/2}. \quad (11)$$

为了描述双模腔场的压缩特性, 引进双模正交算符^[18]:

$$U_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(a + a^+ + b + b^+), \quad (12)$$

$$U_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}i}(a - a^+ + b - b^+). \quad (13)$$

二者满足对易关系:

$$[U_1, U_2] = \frac{i}{2}. \quad (14)$$

方差满足测不准关系:

$$\langle(\Delta U_1)^2\rangle \langle(\Delta U_2)^2\rangle \geq \frac{1}{16}. \quad (15)$$

当 $\langle(\Delta U_i)^2\rangle < \frac{1}{4}$, $i = 1$ 或 2 , 第 i 个正交分量被压缩。为了描述压缩程度, 定义参数

$$q_i = \frac{\langle(\Delta U_i)^2\rangle - 0.25}{0.25}, \quad (i = 1 \text{ or } 2) \quad (16)$$

如果 $-1 \leq q_i < 0$, 则第 i 个正交分量有压缩。

3 数值模拟

根据(3)式、(5)式、(6)式和(10)式的四种状态, 通过数值计算绘制了 q_1 的时间 ($T = gt$) 演化曲线, 所得的结果如图 1~图 9 所示, 并通过分析图 1~图 9 的情况来研究双模腔场的压缩特性。从图中可以发现 q_2 从来没有存在压缩。现在研究 q_1 的压缩程度, 先讨论没有对原子进行态选择性测量这种情况[对应(3)式], 当两个腔模的平均光子数 $\bar{m} = \bar{n} = 5$ (q_1 的结果如图 1) 或更少, 发现没有出现压缩现象。当 $\bar{m} = 5$, $\bar{n} = 8$ (图 2) 和 $\bar{m} = 20$, $\bar{n} = 23$ (图 3) 时, 短时间内 ($T < 2$) 都出现压缩但压缩很小(分别约为 5% 和 6%), 发现短时间内 ($T < 2$), 不管平均光子数多或少压缩量都很小且变化不大; 长时间后, 对于 $\bar{m} = 5$, $\bar{n} = 8$ 的情况再一次发生压缩接近 11% ($T \approx 19$), 说明平均光子数少时压缩小于 20%, 对于 $\bar{m} = 20$, $\bar{n} = 23$ 的情况再一次发生压缩接近 66% ($T \approx 36$), 这说明两个腔模的平均光子数增多且长相互作用时间后, 压缩显著地增强。接着讨论选择性测量对压缩的影响, 当 $\bar{m} = 5$, $\bar{n} = 8$, 并且直接测量到原子处于

$|2\rangle$ 态时 (图 4), 第一次压缩能够达到接近 46% ($T \approx 2$), 再次压缩接近 39% ($T \approx 18$), 与没有对原子做选择性测量的情况相比较, 二者的差别是十分显著的, 而且发现对原子进行测量后在短时间内可以使压缩大大地增强。当直接测量到原子处于 $|3\rangle$ 态 (图 6) 时, 第一次压缩接近 43% ($T \approx 2$), 再次压缩接近 34% ($T \approx 19$), 压缩同样显著地增强了。当应用参数 $\varphi = \pi/4$, $\phi = \pi$ 的经典微波场并测量到原子处于 $|2\rangle$ 态的情况下 (图 8), 短时间内 ($T \approx 2$) 的压缩仍保持约 46% 不变, 但长时间后 ($T \approx 22$) 的压缩可以达到接近 66%, 与没有对原子进行态选择性测量及直接对原子进行态选择性测量情况相比较压缩也显著地增强。最后讨论平均光子数对压缩的影响, 当 $\bar{m} = 20$, $\bar{n} = 23$, 并直接测量到原子处于 $|2\rangle$ 态 (图 5) 或 $|3\rangle$ 态 (图 7) 时, 短时间内 ($T \approx 2$) 的压缩接近 52%, 长时间后 ($T \approx 37$) 的压缩可以达到接近 74%; 当应用参数 $\varphi = \pi/4$, $\phi = \pi$ 的经典微波场并测量到原子处于 $|2\rangle$ 态 (图 9) 时, 短时间内 ($T \approx 2$) 的压缩接近 53%, 长时间后 ($T \approx 37$) 的压缩可以达到接近 75%。发现在短时间内图 5、图 7 和图 9 三种情况的压缩量几乎没有差别, 但与没有对原子进行态选择性测量 (图 3) 相比较, 压缩都显著地增强了 (从约 6% 增强至约 52%); 长时间后, 图 5、图 7 和图 9 三种情况的压缩量也是几乎没有差别, 但与图 3 相比较压缩同样都

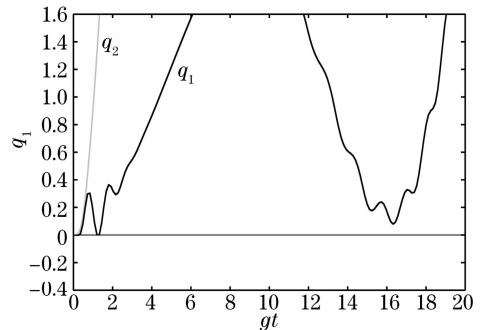


图 1 没有对原子进行态选择测量, 两个腔模平均光子数少 ($\bar{m} = \bar{n} = 5$) 的压缩

Fig. 1 Squeezing of two cavity mode for less average photons ($\bar{m} = \bar{n} = 5$) when no state-selective atomic measurement is made

增强了(从约 66% 增强至约 75%), 但压缩增强的程度不如短时间内那么明显。对原子直接进行态选择性测量或应用经典微波场并对原子进行态选择性测量后, 最大压缩可以达到接近 75%。

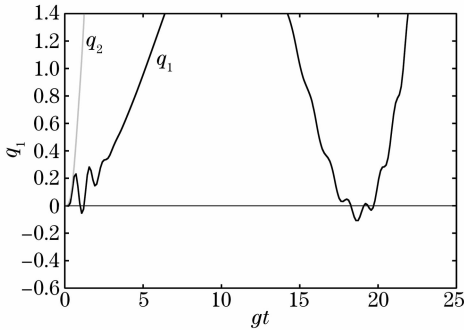


图 2 没有对原子进行态选择测量, 两个腔模平均光子数少 ($\bar{m} = 5, \bar{n} = 8$) 的压缩

Fig. 2 Squeezing of two cavity mode for less average photons ($\bar{m} = 5, \bar{n} = 8$) when no state-selective atomic measurement is made

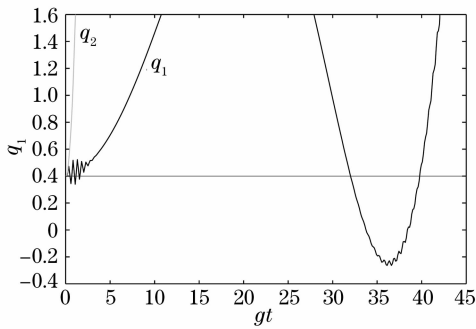


图 3 没有对原子进行态选择测量, 两个腔模平均光子数多 ($\bar{m} = 20, \bar{n} = 23$) 的压缩

Fig. 3 Squeezing of two cavity mode for more average photons ($\bar{m} = 20, \bar{n} = 23$) when no state-selective atomic measurement is made

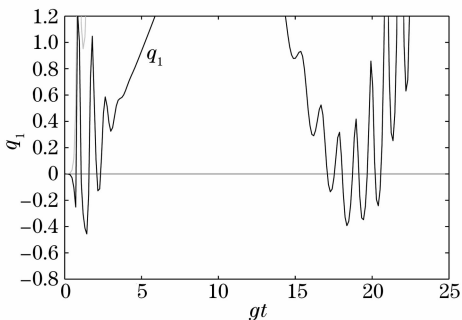


图 4 直接对原子进行态选择测量, 探测到原子处于 $|2\rangle$ 态, 平均光子数少 ($\bar{m} = 5, \bar{n} = 8$) 的压缩

Fig. 4 Squeezing for less average photons ($\bar{m} = 5, \bar{n} = 8$) when direct state-selective atomic measurement is made. The atom is detected in state $|2\rangle$

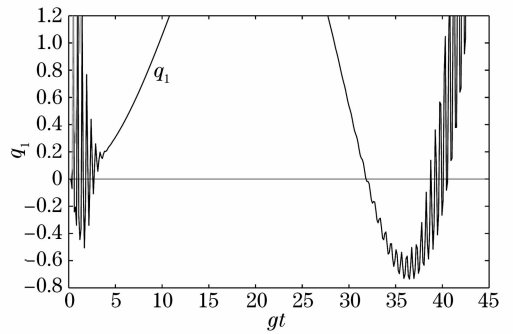


图 5 直接对原子进行态选择测量, 探测到原子处于 $|2\rangle$ 态, 平均光子数多 ($\bar{m} = 20, \bar{n} = 23$) 的压缩

Fig. 5 Squeezing for more average photons ($\bar{m} = 20, \bar{n} = 23$) after direct state-selective atomic measurement. The atom is detected in state $|2\rangle$

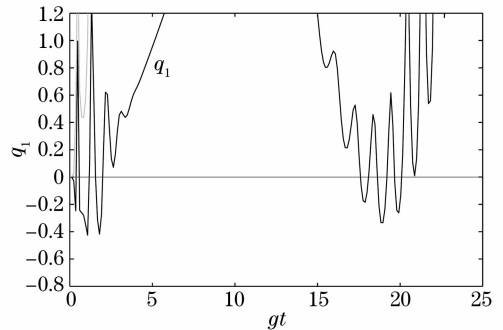


图 6 直接对原子进行态选择测量, 探测到原子处于 $|3\rangle$ 态, 平均光子数少 ($\bar{m} = 5, \bar{n} = 8$) 的压缩

Fig. 6 Squeezing for less average photons ($\bar{m} = 5, \bar{n} = 8$) after direct state-selective atomic measurement. The atom is detected in state $|3\rangle$

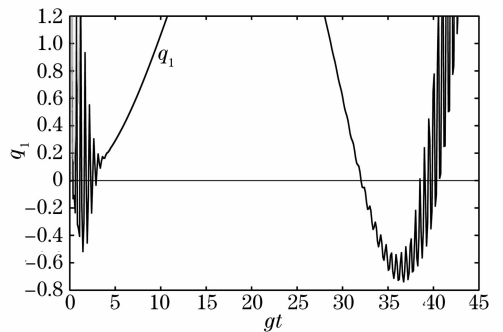


图 7 直接对原子进行态选择测量, 探测到原子处于 $|3\rangle$ 态, 平均光子数多 ($\bar{m} = 20, \bar{n} = 23$) 的压缩

Fig. 7 Squeezing for more average photons ($\bar{m} = 20, \bar{n} = 23$) after direct state-selective atomic measurement. The atom is detected in state $|3\rangle$

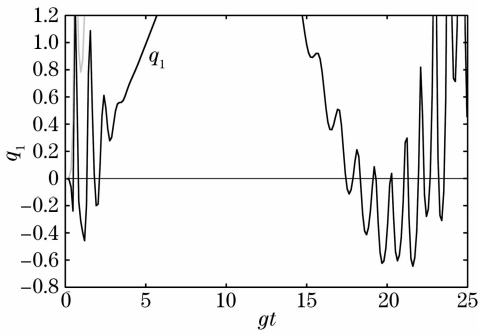


图 8 应用参数 $\varphi = \pi/4, \phi = \pi$ 的经典微波场并探测到原子处于 $|2\rangle$ 态, 平均光子数少 ($\bar{m} = 5, \bar{n} = 8$) 的压缩

Fig. 8 Squeezing for less average photons ($\bar{m} = 5, \bar{n} = 8$) with classical field is applied with parameters $\varphi = \pi/4, \phi = \pi$. The atom is detected in state $|2\rangle$

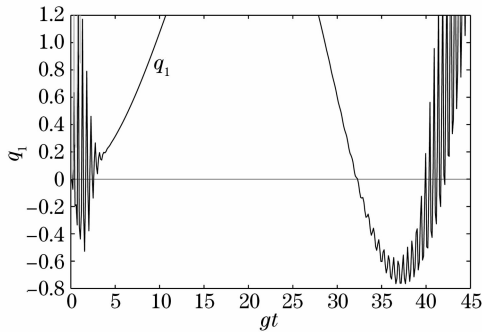


图 9 应用参数 $\varphi = \pi/4, \phi = \pi$ 的经典微波场并探测到原子处于 $|2\rangle$ 态, 平均光子数多 ($\bar{m} = 20, \bar{n} = 23$) 的压缩

Fig. 9 Squeezing for more average photons ($\bar{m} = 20, \bar{n} = 23$) with classical field is applied with parameters $\varphi = \pi/4, \phi = \pi$. The atom is detected in state $|2\rangle$

4 结 论

本文研究了双模相干光场与一个 V 型三能级原子共振相互作用的压缩特性, 为了获得有效的压缩要求比较多的平均光子数和长的相互作用时间。在对原子直接进行态选择性测量或应用经典微波场并对原子进行态选择性测量的两种情况下, 压缩大大地增强, 即使平均光子数少的情况也一样。

参 考 文 献

1 A. C. Ji, X. C. Xie, W. M. Liu. Quantum magnetic dynamics light in arrays of microcavities [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **99**: 183602

2 J. M. Zhang, W. M. Liu, D. L. Zhou. Cavity QED with cold atoms trapped in a double-well potential [J]. *Phys. Rev. A*, 2008, **77**: 033620

3 J. M. Zhang, W. M. Liu, D. L. Zhou. Mean-field dynamics of a Bose Josephson in an optical cavity [J]. *Phys. Rev. A*, 2008, **78**: 043618

4 J. M. Zhang, F. C. Cui, D. L. Zhou *et al.*. Nonlinear dynamics of a cigar-shaped Bose-Einstein condensate in an optical cavity [J]. *Phys. Rev. A*, 2009, **79**: 033401

5 A. C. Ji, Q. Sun, X. C. Xie *et al.*. Josephson effect for photons in two weakly linked microcavities [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, **102**: 023602

6 Fang Jiayuan, Li Jiangfan, Huang Chunjia *et al.*. Light squeezing in the system of squeezed vacuum field interacting with two coupling atoms via intensity-dependent coupling in Kerr medium [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(6): 921~927

方家元, 厉江帆, 黄春佳等. 克尔介质中压缩真空场与耦合双原子依赖强度耦合系统光场的压缩特性 [J]. *光学学报*, 2006, **26**(6): 921~927

7 Lin Jicheng, Cao Zhuoliang, He Longqing. Statistic properties of photon in the system of the two-mode entangled coherent field interacting with atoms in Bell States in Kerr medium [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(4): 727~734

林继成, 曹卓良, 何龙庆. 克尔介质中双模纠缠相干光与贝尔态原子相互作用系统的光子统计特性 [J]. *光学学报*, 2007, **27**(4): 727~734

8 Zhou Ming, Fang Jiayuan, Kong Fanzhi *et al.*. Influence of entangled-atoms pair on squeezing of field entropy [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(2): 340~343

周明, 方家元, 孔凡志等. 纠缠双原子对场熵压缩特性的影响 [J]. *光学学报*, 2007, **27**(2): 340~343

9 B. W. Shore, P. L. Knight. The Jaynes-Cummings mode [J]. *J. Mod. Opt.*, 1993, **40**(7): 1195~1238

10 D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano. Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy [J]. *Phys. Rev. A*, 1994, **50**: 67~88

11 Wu Ling-an, H. J. Kimble, J. M. Hail *et al.*. Generation of squeezed states by parametric down conversion [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **57**(20): 2520~2523

12 P. Meystre, M. S. Zubairy. Squeezed states in the Jaynes-Cummings model [J]. *Phys. Lett. A*, 1982, **89**(8): 390~392

13 Mark Hillery. Squeezing and photon number in the Jaynes-Cummings model [J]. *Phys. Rev. A*, 1989, **39**: 1556~1557

14 C. Christopher. Gerry, Himel Ghosh. Squeezing enhancement in the Jaynes-Cummings model via selective atomic Measurements [J]. *Phys. Lett. A*, 1997, **229**: 17~22

15 Wu Huaizhi, Su Wanjun. Nonclassical properties in the resonant interaction of a three level Λ -type atom with two-mode field in coherent states [J]. *Chin. Phys.*, 2007, **16**(1): 106~110

16 Su Wanjun, Zeng Xiaomeng, Zhong Zhirong. Nonclassical properties in two-mode fields resonantly interacting with a three-level Ξ -type atom [J]. *Commun. Theory. Phys.* 2007, **48**(4): 721~724

17 Guo Guangcan, Zheng Shibiao. Generation of Schrödinger cat states via the Jaynes-Cummings model with large detuning [J]. *Phys. Lett. A*, 1996, **223**: 332~336

18 R. Loudon, P. L. Knight. Squeezed light [J]. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(6/7): 709~759