

文章编号: 0253-2239(2010)01-0070-05

一种基于正态反高斯模型的贝叶斯图像去噪方法

张 鑫 井西利

(燕山大学理学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要 提出一种新的贝叶斯图像去噪方法,该方法以正态反高斯(NIG)模型为先验模型,对图像小波系数的稀疏分布统计建模,并用最大后验概率(MAP)估计法对小波系数进行估计。为了改善贝叶斯图像去噪的效果,还根据尺度间相关性的大小对小波系数分类进行处理。此外,还引入了递归循环平移(Cycle Spinning)算法对小波变换缺乏平移不变性产生的吉布斯现象进行抑制。实验结果表明该去噪算法能有效地去除图像中的高斯白噪声,更好地保留图像细节,提高图像的峰值信噪比值。

关键词 图像处理; 最大后验概率估计; 正态反高斯模型; 相关性; 图像去噪

中图分类号 TN911.73 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20103001.0070

A Method for Image Denoising Based on Normal Inverse Gaussian Model Using Bayesian Estimation

Zhang Xin Jing Xili

(College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

Abstract A new image denoising method based on Bayesian estimation is proposed. Normal inverse Gaussian (NIG) model is used to describe the distributions of the wavelet coefficients of image, and Bayesian maximum a posteriori probability (MAP) estimator is used to estimate the noisy wavelet coefficients. In order to improve the behavior of Bayesian estimation, wavelet coefficients with different correlation are calculated with different ways. What's more, Cycle Spinning algorithm is used to modify the Gibbs phenomenon which is caused by wavelet transform without translation invariance. The experimental results prove that this new method can remove Gaussian white noise effectively, reserve the edges better and improve the peak signal-to-noise ratio of the image.

Key words image processing; maximum a posteriori probability estimation; normal inverse Gaussian (NIG) model; correlation; image denoising

1 引 言

小波域贝叶斯方法能有效地去除图像中的高斯白噪声,其关键是先验模型的选取。大多数自然图像的小波系数在各个子带的分布都表现为在零点出现尖峰且两侧有重拖尾^[1~4]。一般选用独立同分布的广义高斯分布(GGD)作为先验分布^[5],但由该分布求得的贝叶斯风险随着GGD形状参数的增加而增大^[6],只有当形状参数值较小时才能取得较好的去噪效果。随着小波域贝叶斯去噪的进一步发展,人们引入更多的先验模型。文献[7]提出用 α 分布来逼近合成孔径雷达(SAR)图像的小波系数分布;

文献[8,9]分别用有限高斯混合模型和高斯混合尺度模型来逼近小波系数分布等,这些方法在一定程度上改善了去噪效果,但仍存在较大的局限性,如不具备局部自适应性等。

O. E. Barndorff-Nielsen^[10,11]提出的正态反高斯分布曲线模型,理论上能克服传统先验模型不适应实际建模需要的缺陷。该模型参数选取灵活,能够描述任意形状的曲线,因而能对不同程度拖尾的图像小波系数进行准确建模,近年来逐渐被应用于图像去噪领域^[12]。由于图像的小波系数在相邻尺度间具有相关性,所以当选用正态反高斯分布对小波系数进行建模

收稿日期: 2009-01-07; 收到修改稿日期: 2009-04-05

作者简介: 张 鑫(1985—),男,硕士研究生,主要从事图像去噪方面的研究。E-mail: zhangxin-ysu@163.com

导师简介: 井西利(1964—),男,教授,博士生导师,主要从事计算物理方面的研究。

E-mail: sljingxl@ysu.edu.cn(通信联系人)

并做最大后验概率(MAP)估计时,不仅应考虑尺度内的相关性,还应考虑尺度间的内在联系。

基于此,本文以正态反高斯(NIG)分布作为先验分布对小波系数进行估计,并考虑相邻尺度间小波系数相关性的影响,实现含噪图像的自适应去噪。

2 方法和原理

大多数自然图像含有的噪声都可以近似为加性高斯白噪声。一些特殊的光学图像如遥感图像中含有的乘性噪声,也可以通过取对数运算转化为加性高斯白噪声处理。一般的图像含噪模型都可以归结为

$$F(i, j) = G(i, j) + N(i, j), \quad (1)$$

式中 (i, j) 为图像中像素点的位置, $F(i, j)$, $G(i, j)$ 和 $N(i, j)$ 分别为含噪图像、不含噪图像以及噪声图像在该点的像素值。对含噪图像进行正交小波变换后得到

$$y(i, j) = x(i, j) + n(i, j), \quad (2)$$

式中 $y(i, j)$, $x(i, j)$ 和 $n(i, j)$ 是相应的小波系数。小波域贝叶斯去噪的目的是根据 y 得到 x 的估计值 $\hat{x}(y)$, 常用的最大后验概率估计法为

$$\hat{x}(y) = \arg \max_x [f_{x|y}(x|y)], \quad (3)$$

式中 $f_{x|y}$ 为条件概率密度, 由贝叶斯公式得

$$\hat{x}(y) = \arg \max_x [f_{y|x}(y|x) \cdot f_x(x)] = \arg \max_x [f_n(y-x) \cdot f_x(x)], \quad (4)$$

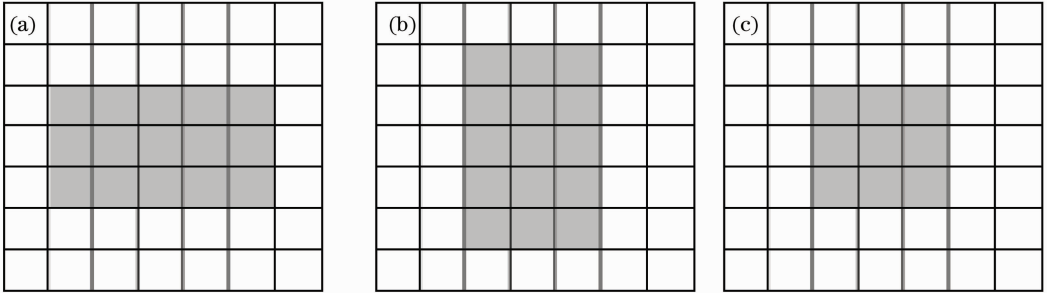


图 1 不同高频子带窗口的选取。(a)水平;(b)垂直;(c)对角

Fig. 1 Different windows in different high-frequency subbands. (a) horizontal; (b) vertical; (c) diagonal

2.2 最大后验概率估计

明确先验模型及模型参数的估计方法以后,便可以对(4)式进一步求解。已知高斯白噪声的概率密度函数为

$$f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad (6)$$

将(6)式代入(4)式并对等式右端取自然对数,则(4)式等价于

式中 $f_n(\cdot)$ 为噪声的概率分布, $f_x(\cdot)$ 为无噪图像的先验分布。

2.1 先验模型

要对(4)式进行求解,应该明确先验模型及模型中各个参数的估计方法。由于无噪图像的小波系数在各个子带的分布都表现为在零点出现尖峰且有重拖尾,而正态反高斯模型参数选取灵活,能够描述任意形状的曲线,能对不同程度拖尾的图像小波系数进行准确建模,故选正态反高斯分布作为小波系数的先验分布。图像正态反高斯模型的四个参数中有两个是固定的^[13],简化后的概率密度函数如下:

$$P_x(x) = \frac{\alpha\delta \exp(\alpha\delta)}{\pi} \frac{K_1(\alpha \sqrt{x^2 + \delta^2})}{\sqrt{x^2 + \delta^2}}, \quad (5)$$

式中 δ 为尺度参数, α 为特征因子,它控制分布衰减的速度, α 越小,分布衰减越慢,拖尾越重。 $K_n(\cdot)$ 表示索引为 n 的第二类贝塞尔函数。恰当地估计参数 δ 和 α 的值,就可以得到小波系数分布比较准确的描述。

通过计算信号的二阶矩和四阶矩得到参数 δ 和 α 的估计值^[13]。由于水平高频子带在水平方向的相关性较强,而垂直高频子带在垂直方向的相关性较强^[14,15],故选图 1(a)和图 1(b)中阴影部分形状的窗口分别对水平高频和垂直高频的模型参数进行估计,以使窗口中心点处参数的估计更加准确。而对角高频子带则选用图 1(c)中阴影部分形状的窗口。

$$\hat{x}(y) = \arg \max_x \left[-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2} + \ln f_x(x) \right], \quad (7)$$

令 $-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2} + \ln f_x(x)$ 的一阶导数等于零即可求出使后验概率最大的 $\hat{x}(y)$, 即

$$\frac{y-\hat{x}}{\sigma_n^2} + [\ln f_x(x)]' = 0, \quad (8)$$

根据文献[13]得(8)式的估计解:

$$\hat{x}(y) = \operatorname{sgn} y \max(|y| - \sigma_n^2 B, 0), \quad (9)$$

式中

$$B = \left| \frac{2y}{\delta^2 + y^2} - \frac{\alpha y}{\sqrt{\delta^2 + y^2}} \frac{K_0(\alpha \sqrt{\delta^2 + y^2})}{K_1(\alpha \sqrt{\delta^2 + y^2})} \right|.$$

考虑各个尺度间图像小波系数方差按 $k(s) = C2^s$ 规律变化^[16], 故引入调节因子:

$$\beta = \frac{1}{2^{(A-1)j}}, \quad (10)$$

式中 $A = \sigma_x / \sigma_n$, σ_x 表示当前子带中不含噪声的小波系数的标准差, 而 σ_n 表示噪声的标准差, j 表示当前分解层数, 修正后的小波系数收缩公式为

$$\hat{x}(y) = \text{sgny} \max(|y| - \beta \sigma_n^2 B, 0). \quad (11)$$

由于(11)式中参数 α, δ 和 β 是根据不同子带中的小波系数估计出来的, 故它对各个子带的小波系数都具有自适应性, 能实现对含噪程度不同的小波系数进行不同程度的收缩。

2.3 尺度相关处理

虽然最大后验估计法得到的(11)式能对小波系数进行自适应收缩, 但某些小波系数只包含噪声信息, 用(11)式收缩后, 会出现去噪不彻底的现象; 而某些小波系数只包含信号信息, 用(11)式收缩, 会造成图像信息的丢失。由于含噪图像经过小波变换后, 信号和噪声表现出不同的相关特性, 即信号在尺度间相应位置上的小波系数具有很强的相关性, 而噪声的小波系数则具有弱相关性或不相关^[17,18]。故计算相邻尺度间小波系数的相关系数, 并与小波系数进行比较, 将小波系数分类, 不同类的小波系数采用不同的处理方法。

根据 Y. Xu^[19] 提出的计算相关系数的方法, 尺度为 j 的第 L 个子带上位置 (m, n) 处的小波系数 $C^{(j)}$, 与相邻尺度小波系数间的相关系数为

$$N_{\text{corr}}^L(j, m, n) = C^{(j)}(m, n) \cdot C^{(j+1)}(m, n). \quad (12)$$

为了便于比较相关系数和小波系数的大小, 需要对相关系数进行归一化:

$$\bar{N}_{\text{corr}}^L(j, m, n) = N_{\text{corr}}^L(j, m, n) \sqrt{\frac{E_C(j)}{E_{\text{corr}}(j)}}, \quad (13)$$

式中 $E_C(j)$ 和 $E_{\text{corr}}(j)$ 分别是第 j 层小波系数和相关系数的能量:

$$E_C(j) = \sum_m \sum_n C^{(j)}(m, n)^2, \quad (14)$$

$$E_{\text{corr}}(j) = \sum_m \sum_n N_{\text{corr}}^L(j, m, n)^2. \quad (15)$$

由于正交小波变换后, 相邻尺度间小波系数个数比为 4:1, 故计算相关系数时, 将低尺度小波系数分为 2×2 的子块, 然后将每一子块的 4 个小波系数与相邻高尺度相应位置处的小波系数对应, 计

算相关系数, 并进行以下比较(λ 为可调参数):

$$|C^{(j)}(m, n)| = \min\{|N_{\text{corr}}^L(j, m, n)|\}, \quad (16)$$

$$|N_{\text{corr}}^L(j, m, n)| > \lambda |C^{(j)}(m, n)|. \quad (17)$$

如果(16)式成立, 则表明该小波系数只包含噪声信息, 直接置零; 如果(17)式成立, 则表明该小波系数只包含信号信息, 直接保留; 否则, 表明该小波系数既包含噪声信息, 又包含信号信息, 用(11)式对其进行自适应收缩处理。

2.4 递归循环平移(Cycle Spinning)算法

尽管基于正态反高斯模型的贝叶斯去噪方法和尺度相关处理的结合, 能有效地去除图像中的高斯白噪声, 减少图像细节信息的丢失, 但由于小波变换不具有平移不变性, 去噪后的信号在不连续点的邻域内会产生伪吉布斯现象, 影响去噪图像的视觉效果。采用 Coifman 和 Donoho^[20] 提出的递归 Cycle Spinning 算法来抑制这种失真现象。

设信号 $F(i, j)$ 在行和列方向的最大平移量分别为 K_1, K_2 , 平移运算为 T , 平移逆运算为 T^{-1} , 去噪过程用 Q 表示, 则与递归 Cycle Spinning 算法结合得到的去噪结果 S 表示为

$$S = \frac{1}{K_1 K_2} \sum_{i=1, j=1}^{K_1, K_2} T^{-1}\{Q\{T[F(i, j)]\}\}. \quad (18)$$

3 实现步骤

将小波系数尺度相关处理与正态反高斯先验去噪结合, 并引入改善正交小波变换缺乏平移不变性的递归平移算法, 提出一种新的基于正态反高斯模型的贝叶斯去噪算法, 具体步骤如下:

- 1) 设定平移次数 L 和平移量 $\Delta i, \Delta j$, 将信号 $F(i, j)$ 在空间域平移;
- 2) 选择合适的小波基和小波分解层次对平移后的信号小波变换, 得到一组小波系数 $y(i, j)$;
- 3) 计算归一化相关系数, 对小波系数进行相应的尺度相关处理;
- 4) 计算各高频子带对应的正态反高斯模型参数 α 和 δ 以及调节因子 β ;
- 5) 对未能确定是噪声还是信号的小波系数进行自适应收缩处理;
- 6) 进行小波逆变换得到去噪后的图像;
- 7) 对重构图像进行逆平移, 若平移次数小于 L , 改变 $\Delta i, \Delta j$ 返回步骤(1)。

重复 1)~7), 并将 L 次计算结果取平均值, 得到最终去噪结果。

4 实验结果及分析

为说明去噪方法的有效性,对传统阈值去噪方法,普通正态反高斯贝叶斯去噪方法(未进行尺度相关处理和递归平移)及去噪方法进行对比实验。实验中采用的测试图像大小为 $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$ 的 Lena. bmp 标准测试图像,加入高斯白噪声的级数分别为 10, 15, 20, 25 和 30。小波分解时采用 Haar 小波基对信号分解 2 层,在估计正态反高斯模型参数时,水平、垂直和对角高频分别选 $33 \text{ pixel} \times 29 \text{ pixel}$, $29 \text{ pixel} \times 33 \text{ pixel}$, $33 \text{ pixel} \times 33 \text{ pixel}$ 的移

动窗口,尺度相关处理时参数 λ 取 3.3。采用峰值信噪比作为评价图像质量的标准:

$$n_{\text{PSNR}} = 10 \lg \left\{ \frac{255^2}{(M \times N)^{-1} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [F(i, j) - f(i, j)]^2} \right\}, \quad (19)$$

式中 M 和 N 为图像尺寸的大小。

实验得到的测试数据如表 1 所示, Lena 图像的去噪对比结果如图 2 所示。

表 1 不同去噪方法图像的 PSNR(单位: dB)

Table 1 PSNR of denoising image with different methods (Unit: dB)

Noise variance	Noisy image	Hard thresholding	Soft thresholding	NIG Bayesian	New method
10	28.1333	30.8051	29.4555	31.9738	33.9690
15	24.6115	28.9657	28.1558	29.7780	32.0567
20	22.1127	27.6736	27.2461	28.1495	30.8537
25	20.1745	26.6749	26.5116	26.8784	29.9069
30	18.5905	25.8355	25.8742	25.8001	29.0919

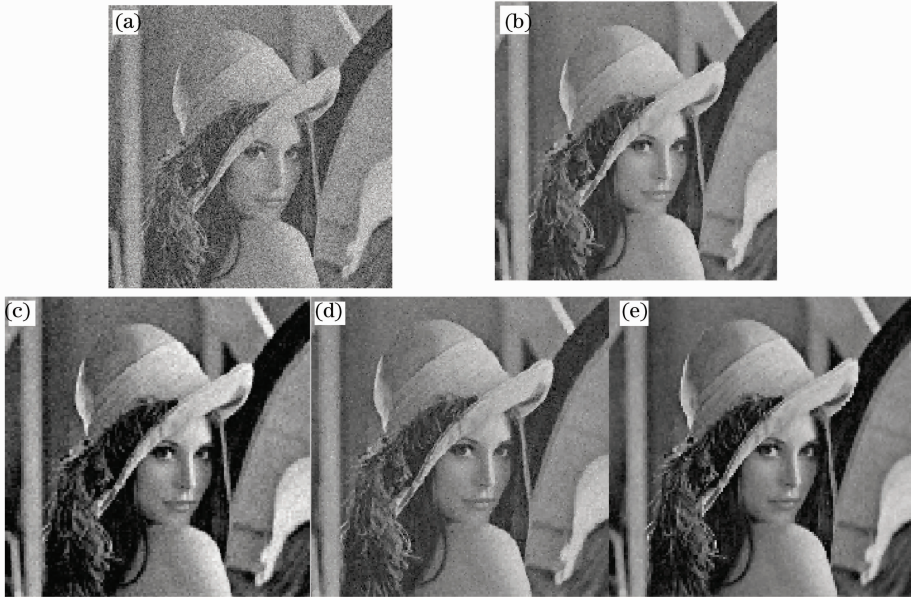


图 2 不同方法的图像去噪结果。(a)含噪图像($\sigma=30$);(b)硬阈值去噪;(c)软阈值去噪;(d)正态反高斯贝叶斯去噪;(e)改进算法

Fig. 2 Denoising results with different methods. (a) noisy image ($\sigma=30$); (b) denoising of hard thresholding; (c) denoising of soft thresholding; (d) denoising of NIG Bayesian; (e) new method

由测试结果可见,改进的去噪方法用于 Lena 图像去噪时,无论在峰值信噪比(PSNR)上,还是在视觉效果上,都明显优于传统的阈值萎缩方法。由表 1 可见,算法可使去噪图像的 PSNR 比传统阈值方法提高 3~4 dB;与不进行尺度间相关处理和递归平移的正态反高斯贝叶斯去噪方法相比,本方法得到去噪图像的 PSNR 也提高 2~3 dB。虽然各种

去噪方法在噪声方差增加的情况下,得到图像的 PSNR 值都会呈减小趋势,但本文算法得到的 PSNR 均大于其它方法得到的 PSNR。由图 2 也可以看出,原始的含噪图像被噪声污染严重,轮廓细节被噪声掩盖,整体视觉效果比较差[图 2(a)];经传统的硬阈值去噪后,噪声得到抑制,但图像的边缘如帽檐和眉毛等处出现了吉布斯现象[图 2(b)];经软

阈值去噪后,虽然图像整体上比较平滑,但仍有轻微的吉布斯现象,且细节边缘被平滑掉,出现了图像失真[图 2(c)];经普通的正态反高斯贝叶斯方法去噪后,噪声得到了抑制,图像整体平滑程度得到改善[图 2(d)];经本文算法去噪后,图像中绝大部分噪声被去除,图像边缘如帽檐和眉毛等细节特征保持较好,且图像中的伪吉布斯现象也得到很好地抑制,图像整体比较平滑,视觉效果更好[图 2(e)]。

5 结 论

选用的正态反高斯先验模型,参数选取灵活且能自适应变化,比较准确地描述小波系数的特点,能改善贝叶斯去噪的效果。在贝叶斯估计前,先对小波系数进行尺度相关处理,弥补了传统贝叶斯去噪方法中忽略尺度间相关性的缺陷。将尺度相关处理和基于正态反高斯先验模型的贝叶斯估计方法结合起来用于图像去噪,能有效去除图像中的高斯白噪声,而且无论是在视觉效果上,还是在去噪图像的 PSNR 上,都明显优于传统去噪算法。

参 考 文 献

- 1 S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition; the wavelet representation[J]. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 1989, **11**(7): 674~693
- 2 C. Bouman, K. Sauer. A generalized Gaussian image model for edge-preserving MAP estimation [J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 1993, **2**(3): 296~310
- 3 M. S. Crouse, R. D. Nowak, R. G. Baraniuk. Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov models [J]. *IEEE Trans. Signal Process.*, 1998, **46**(4): 886~902
- 4 J. Portilla, V. Strela, M. Wainwright *et al.*. Image denoising using scale mixture of Gaussians in the wavelet domain [J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 2001, **12**(11): 1338~1351
- 5 Zhang Jingjing, Fang Yonghua. Novel denoising method for remote sensing image based on contourlet transform[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(3): 462~466
张晶晶, 方勇华. 基于 Contourlet 变换的遥感图像去噪新算法[J]. *光学学报*, 2008, **28**(3): 462~466
- 6 S. G. Chang, B. Yu, M. Vetterli. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression [J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 2000, **9**(9): 1532~1546
- 7 A. Achim, P. Tsakalides, A. Beserianos. SAR Image denoising

- via Bayesian wavelet shrinkage based on heavy tailed modeling [J]. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 2003, **41**(8): 1773~1784
- 8 Xie Hua, L. E. Pierce, F. T. Ulaby. SAR speckle reduction using wavelet denoising and Markov random field modeling[J]. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 2002, **40**(10): 2196~2212
- 9 Portilla Javier, Strela Vasily, Wainwright Martin J *et al.*. Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain [J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 2003, **12**(11): 1338~1351
- 10 O. E. Barndorff-nielsen. Normal inverse Gaussian distribution and stochastic volatility modeling[J]. *Scand. J. Statistics*, 1997, **24**(1): 1~13
- 11 O. E. Barndorff-nielsen, K. Prause. Apparent scaling [J]. *Finance and Stochastics*, 2001, **5**(1): 103~113
- 12 R. Jenssen, T. A. Oigard, T. Eltoft *et al.*. Sparse code shrinkage based on the normal inverse Gaussian density model [C]. Proc Int Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation, San Diego, 2001. 212~217
- 13 M. I. Bhuiyan, M. O. Ahmad, M. N. Swamy. Wavelet-based despeckling of medical ultrasound images with the symmetric normal inverse Gaussian prior[J]. *Speech and Signal Process.*, 2007, 721~724
- 14 Zhang Haijian, Chen Xiangdong, Wang Shihai. Adaptive wavelet denoising algorithm for pseudo-color infrared images [J]. *Semiconductor Optoelectronics*, 2008, **29**(2): 282~285
张海建, 陈向东, 王世海. 伪彩色红外图像的小波自适应去噪算法[J]. *半导体光电*, 2008, **29**(2): 282~285
- 15 Wang Haihong, Zeng Ni, Lu Wei *et al.*. Edge detection of laser imaging radar based on wavelet transform and mathematical morphology[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(6): 903~906
王海虹, 曾妮, 陆威等. 基于小波变换和数学形态学的激光成像雷达图像边缘检测[J]. *中国激光*, 2008, **35**(6): 903~906
- 16 S. M. Rahman, M. K. Hasan. Wavelet domain iterative center weighted median filter for image denoising[J]. *Signal Process.*, 2003, **83**(5): 1001~1012
- 17 Zhang Le, Jiang Wei. Application of multi-resolution analysis in anti-noise capability of auto-focusing algorithm[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(12): 2150~2154
张乐, 姜威. 多分辨力分析在自动聚焦算法抗噪声性能中的应用[J]. *光学学报*, 2007, **27**(12): 2150~2154
- 18 Bai Junqi, Chen Qian. Algorithm for infrared image noise filtering based on anisotropic diffusion[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(5): 866~869
白俊奇, 陈钱. 基于各向异性扩散的红外图像噪声滤波算法[J]. *光学学报*, 2008, **28**(5): 866~869
- 19 Y. Xu, B. Weaver, D. Healy. Wavelet transform domain filters: a spatially selective noise filtration technique[J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 1994, **3**(6): 747~758
- 20 R. R. Coifman, D. L. Donoho. Translation-invariant denoising [C]. *Wavelets and Statistics*, Springer Lecture Notes in Statistics 103, New York: Springer, 1995, 125~150