

子孔径拼接精度分析及奇异值分解方法的应用

苏 云 阮宁娟 李 博

(北京空间机电研究所, 北京 100076)

摘要 对影响拼接精度的若干误差源建立了数学模型并进行仿真分析, 得出对精度影响最主要的误差为干涉仪测量误差; 通过分析此误差源对拼接计算精度的影响方式。引入了奇异值分解(SVD)的方法处理计算中的病态方程问题以降低该误差源的影响, 同时为说明该算法的有效性, 与使用正交三角分解(QR)分解方法计算的精度进行对比。结果表明, SVD 方法能够有效地提高子孔径拼接计算精度, 降低了子孔径拼接对高精度检测设备的依赖。

关键词 测量; 子孔径拼接; 奇异值分解; 病态方程

中图分类号 O439 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS200929s1.0247

Accuracy Analyzing of Sub-Apertures Stitching and Application of Matrix Singular Value Decomposition

Su Yun Ruan Ningjuan Li Bo

(Beijing Institute of Space Mechanics & Electricity, Beijing 100076, China)

Abstract Some mathematics models are made to analyze some important errors in this paper firstly, and the result shows that the most important error is the measurement error of interferometer. Then the way in which the error of interferometer influences the accuracy of stitching is studied. The matrix singular value decomposition (SVD) is introduced in this paper to deal with the ill-conditioned equation series to reduce the effect of the most important error, while the contrast data is done with QR arithmetic. The result reveals that the SVD is useful in high accuracy sub-apertures stitching, and can decrease the requirement to high accuracy equipment.

Key words measurement; sub-apertures stitching; singular value decomposition; ill-conditioned equation series

1 引 言

随着科学技术的不断发展, 超大口径光学系统在天文光学、空间光学、地基空间目标探测与识别惯性约束聚变等高技术领域将得到越来越广泛的应用。超大口径成为光学系统发展的一个重要方向。

在大口径光学系统检测中, 常依赖高精度、大口径的自准直镜。在进行超大口径系统的检测时, 相同口径高精度平面镜的制造成本很高。当检测口径大到一定程度时, 用常规方法便无法进行有效检测。在这种情况下, 为节省成本、提高检测精度和效率, 子孔径拼接干涉检测技术应运而生, 将是超大口径检测技术的主要发展方向之一。

2 检测原理

子孔径拼接干涉检测技术的基本原理^[1]为使用小口径的高精度干涉仪和自准直镜, 每次检测光学

系统整个口径的一部分, 即子孔径。各个子孔径有一定量的相互重叠部分, 根据重叠区域的数据特征, 计算得到各个子孔径的相对位置误差, 从而将所有子孔径统一到同一参考面上, 完成拼接, 得到全口径的波面信息。

以两个子孔径为例说明原理。如图 1 所示, W_1 和 W_2 分别为两个子孔径检测到的波前相位数据。每次检测都可得到 1 组唯一的位移及倾斜量参数。于是有

$$W_1(x, y) = T_{x1}x + T_{y1}y + D_1(x^2 + y^2) + P_1 + W_{01}(x, y), \quad (1)$$

$$W_2(x, y) = T_{x2}x + T_{y2}y + D_2(x^2 + y^2) + P_2 + W_{02}(x, y), \quad (2)$$

式中 P 为轴向位移量, T_x 表示 x 方向的倾斜量, T_y 表示 y 方向的倾斜量, $W_{01}(x, y)$ 和 $W_{02}(x, y)$ 为子孔径的理想波面; $W_1(x, y)$ 和 $W_2(x, y)$ 分别表示经

两个子孔径测量得到的实际波面。

在两孔径重叠区域采样,对于采样点 (x_i, y_i) ,计算得

$$\Delta W = W_1 - W_2 = \Delta T_x x_i + \Delta T_y y_i + \Delta D(x_i^2 + y_i^2) + \Delta P, \quad (3)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta T_x &= T_{x1} - T_{x2}, & \Delta T_y &= T_{y1} - T_{y2}, \\ \Delta D &= D_1 - D_2, & \Delta P &= P_1 - P_2. \end{aligned}$$

令 $\mathbf{R} = [\Delta T_x \ \Delta T_y \ \Delta D \ \Delta P]^T$, 称之为拼接因子, \mathbf{R} 可以通过以下方程组来进行求解

$$\begin{bmatrix} \sum xx & \sum xy & \sum x(x^2 + y^2) & \sum x \\ \sum yx & \sum yy & \sum y(x^2 + y^2) & \sum y \\ \sum (x^2 + y^2)x & \sum (x^2 + y^2)y & \sum (x^2 + y^2)^2 & \sum (x^2 + y^2) \\ \sum x & \sum y & \sum (x^2 + y^2) & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta T_x \\ \Delta T_y \\ \Delta D \\ \Delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x\Delta w \\ \sum y\Delta w \\ \sum (x^2 + y^2)\Delta w \\ \sum \Delta w \end{bmatrix}, \quad (4)$$

(4)式可表示为 $\mathbf{AR} = \mathbf{b}$ 。

在解得拼接因子 \mathbf{R} 后,对子孔径进行修正,则得到统一到同一参考面上的波面,从而完成拼接。

3 精度分析

建立一个 3 m 口径的 RC 光学仿真系统,用于采集子孔径波面数据。在该仿真系统中,对子孔径的倾斜量可进行调整,用于模拟实际检测中子孔径不共面的误差。为分析各个误差源对拼接精度的影响,利用采集到的子孔径波面数据进行两孔径仿真拼接,并对以下几个主要误差源进行仿真计算:重叠系数^[2]引入的误差、子孔径相对倾斜量引入的误差、自准直镜调整机构误差、干涉仪的测量误差。

3.1 重叠系数引入的误差

重叠系数用于描述两孔径重叠量,定义为两孔径在圆心方向上的重叠长度,用 $L = d/r$ 表示,其中 d 为两孔径重叠部分在两圆心连线上的长度, r 为子

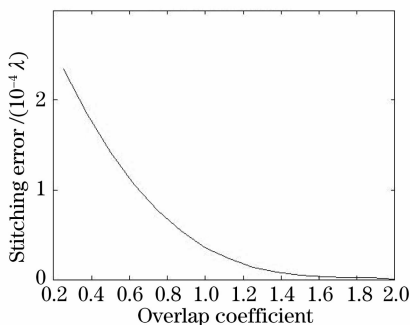


图 2 重叠系数对拼接精度的影响

Fig. 2 Influence of overlap coefficient to stitching accuracy

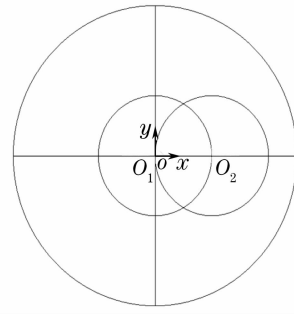


图 1 两子孔径拼接示意图

Fig. 1 Illustration of two sub-apertures stitching

孔径半径。

通过设置不同的重叠系数,得到计算精度如图 2 所示。

重叠系数决定采样点的数量及分布方式,由图 2 可知,拼接计算精度将随重叠系数的增加而提高。在实际拼接检测中,重叠系数还将影响子孔径布局。

3.2 子孔径相对倾斜引入的误差

对仿真系统中的自准直镜进行垂直于光轴的旋转,在不同相对倾斜情况下计算拼接精度,如表 1 所示。

表 1 子孔径相对倾斜对计算精度的影响

Table 1 Influence of relative tilt to stitching accuracy

x-tilt / [rad/($''$)]	Y-tilt / [rad/($''$)]	Stitching accuracy / λ
0.0002424/50	-0.0002424/-50	0.0020
0.0004848/100	-0.0004848/-100	0.0039
0.0009696/200	-0.0009696/-200	0.0074
0.001939/400	-0.001939/-400	0.0107

从表 1 可以看出,拼接计算精度随子孔径相对倾斜量的增大而明显降低,因此在检测中需要保证各个子孔径的相对倾斜量始终保持在一个小范围内,即需要调整机构保证各个子孔径有较好的共面性。

3.3 测量误差对拼接精度的影响

对于多孔径同时拼接的目标函数 $\mathbf{AR} = \mathbf{b}$ ^[3],经计算分析可知,矩阵 \mathbf{A} 常处于病态,即使在求解过程中保证了精确求解,也无法消除 \mathbf{A} , \mathbf{b} 本身的微小扰动给方程的解带来的影响。而 \mathbf{A} 矩阵和 \mathbf{b} 向量由测量得到,在测量过程中,误差是不可避免的。下

面分析 \mathbf{A}, \mathbf{b} 的误差对方程求解的影响。

\mathbf{A}, \mathbf{b} 的误差主要由自准直镜调整机构的定位误差和干涉仪的测量误差引起。其中调整机构定位误差,是由调整机构在 xoy 平面内定位不精确引起的,同时影响 \mathbf{A}, \mathbf{b} 二者的值。给采样点 (x, y) 加入一个微小的扰动量 (x', y') 来模拟此定位误差。该误差可用 $x' = l \times \text{randn}[\text{size}(x)], y' = l \times \text{randn}[\text{size}(y)]$ 来表示,其中 l 称为调整机构定位误差水平。

表 2 定位误差对拼接精度的影响

Table 2 Influence of position error to stitching accuracy

Position error $l / (10^6 \text{ m})$	x -tilt of $\text{O}_2 / [\text{rad}/(^{\circ})]$	y -tilt of $\text{O}_2 / [\text{rad}/(^{\circ})]$	Average accuracy $/(10^{-4} \lambda)$	P - V accuracy $/(10^{-8} \lambda)$	Accuracy with no disturbance $/(10^{-4} \lambda)$
1	0.00001939/4	-0.00001939/-4	1.3640	0.04532	1.3640
2	0.5	0.0002424/50	17.0000	0.5945	17.0000
3	0.0004848/100	-0.0004848/-100	34.0000	1.0314	34.0000
4	0.00001939/4	-0.00001939/-4	1.3640	0.091582	1.3640
5	1	0.0002424/50	17.0000	0.13016	17.0000
6	0.0004848/100	-0.0004848/-100	34.0000	2.1680	34.0000
7	0.00001939/4	-0.00001939/-4	1.3640	1.2093	1.3640
8	10	0.0002424/50	17.0000	12.635	17.0000
9	0.0004848/100	-0.0004848/-100	34.0000	16.660	34.0000

表 3 干涉仪误差对拼接精度的影响

Table 3 Influence of interferometer error to stitching accuracy

Position error r/λ	x -tilt of $\text{O}_2 / [\text{rad}/(^{\circ})]$	y -tilt of $\text{O}_2 / [\text{rad}/(^{\circ})]$	Average accuracy $/(10^{-4} \lambda)$	P - V accuracy $/\lambda$	Accuracy with no disturbance $/(10^{-4} \lambda)$
1	0.00001939/10	-0.00001939/-10	4.0799	0.0012	3.4323
2	0.001	0.0002424/50	17.0000	0.0018	17.0000
3	0.0004848/100	-0.0004848/-100	33.0000	0.0016	34.0000
4	0.00001939/10	-0.00001939/-10	6.8877	0.0023	3.4323
5	0.002	0.0002424/50	17.0000	0.0038	17.0000
6	0.0004848/100	-0.0004848/-100	35.0000	0.0029	34.0000
7	0.00001939/10	-0.00001939/-10	16.0000	0.0052	3.4323
8	0.005	0.0002424/50	20.0000	0.0059	17.0000
9	0.0004848/100	-0.0004848/-100	36.0000	0.0081	34.0000
10	0.00001939/10	-0.00001939/-10	31.0000	0.0099	3.4323
11	0.010	0.0002424/50	30.0000	0.0125	17.0000
12	0.0004848/100	-0.0004848/-100	41.0000	0.0113	34.0000

结果表明,定位误差和干涉仪的测量误差使病态方程组的解产生了较大的波动,从而影响计算精度。由于目前定位机构能够达到较高的精度,表 2 主要分析了 $0.5 \mu\text{m}, 1 \mu\text{m}, 10 \mu\text{m}$ 3 个误差水平下的情况,计算结果表明在高精度定位条件下,该误差对拼接计算精度影响很小,可以忽略。表 3 中,干涉仪测量误差水平分别设置为 $0.001\lambda, 0.002\lambda, 0.005\lambda, 0.01\lambda$, 计算结果表明,在目前干涉仪精度条件下,该误差对计算精度的影响较大,是计算中必须要重点考虑的因素。

3.4 小结

对 4 个主要误差源进行了建模分析,说明影响

干涉仪的测量误差是由干涉仪分辨能力决定的,从而导致波面测量不精确,主要影响 \mathbf{b} 的值,可给 Δw 加上一个扰动量 $\Delta w' = r \times \text{randn}[\text{size}(\Delta w)]$ 用于模拟干涉仪的测量误差,其中 r 称为干涉仪测量误差水平。

下面计算不同倾斜量时,在不同定位误差水平和测量误差水平条件下的拼接精度。各进行了 100 次拼接计算,结果如表 2 和表 3 所示。

计算精度的误差源依次为干涉仪测量误差、重叠系数、子孔径相对倾斜量、定位误差及其他。在实际检测中,当子孔径布局确定后,重叠系数也因此确定,干涉仪的测量误差将是对拼接计算精度影响最明显的误差源。在高精度拼接检测中,需要对此误差进行重点处理。

4 SVD 分解法用于拼接计算

4.1 SVD 分解法

对于病态或超病态线性方程组 $Ax = b$, 当 A 发生列亏损的时候,最多能够得到方程组最小二乘意义下的最优解或最小范数解。处理这种方程组目前

最好的方法就是 SVD 方法^[4~6]。

矩阵的奇异值就是如下定理所指的事实：

定理 若矩阵 $A \in R^{m \times n}$ ，则存在列正交矩阵 $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \in R^{m \times n}$ 及 $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \in R^{m \times n}$ ，使得

$$U^T A V = \text{diag}(\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_m) \equiv S, \quad (5)$$

即 $A = U S V^T, \quad (6)$

其中 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p (p = \min\{m, n\})$ 。 σ_i 称为矩阵 A 的奇异值， u_i, v_i 依次称为相应于奇异值 σ_i 的左右奇异向量，且满足 $A v_i = \sigma_i u_i, A^T u_i = \sigma_i v_i (i = 1, 2, \dots, p)$ ，表达式 $A = U S V^T$ 便称为 A 的奇异值分解式。

SVD 方法最有价值的地方在于其能够在接近秩亏损的情况下，舍入误差和模糊数据使秩的确定成为一个困难的问题时，允许考虑近似秩亏损的概念。

4.2 广义逆及广义最小二乘解

矩阵 $A \in R^{m \times n}$ ，则 A 可以进行奇异值分解为 $A = U S V^T$ 。 A 的广义逆可表示为

$$A^+ = V_r S_r^{-1} U_r^T, \quad (7)$$

式中 $S_r^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1} \ \sigma_2^{-1} \ \dots \ \sigma_r^{-1})$ ， r 为 A 的秩。

σ_i 过小时， σ_i^{-1} 会远远大于其他一些奇异值的倒数，使其他奇异值被掩盖，从而放大了 A 或 b 阵中的测量误差。因此在对 A 进行 SVD 分解后，需要根据实际情况，选取合适的阈值(tol)，对 σ_i 过小的奇异值进行舍弃。然后使用广义逆求解拼接因子 R ，即 $R = A^+ b$ 。

4.3 仿真拼接计算

为验证 SVD 算法在提高拼接精度方面的有效性，利用仿真系统进行多子孔径同时拼接。在保证

重叠系数 $L \geq 0.625$ ^[1] 条件下，计算得到共需使用 49 个子孔径，其布局如图 3 所示。同时对全口径进行波面采样作为参考数据，拼接计算得到的波面与全口径采样得到的波面均方根(RMS)之差定义为全口径拼接计算精度。

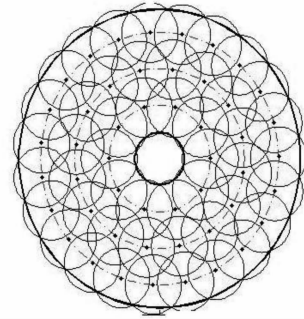


图 3 仿真拼接计算中子孔径布局图

Fig. 3 Distribution of sub-apertures in simulated stitching

对全口径拼接目标函数进行分析得到 $\text{cond}(A) = 4.7755 \times 10^5$ ， A 阵严重病态，共有 192 个奇异值，最大为 5794.1，最小为 0.012133。由于 SVD 算法需要选取合适的奇异值阈值，下面就不同阈值时的拼接精度进行计算分析。

同时为了对比该算法的有效性，也使用正交三角(QR)分解算法进行计算作为参照。结果如表 4~表 9 所示(各自进行了 100 次计算，完成对 100 次计算结果的统计)。

各表中为模拟各子孔径的随机相对倾斜误差，生成了若干组相对倾斜量。这些倾斜量服从 $N \sim (0, q)$ ，其中 q 称为倾斜噪声，水平分别设置 5'', 10'', 50'', 100'' 4 组。表中倾斜量的量纲为角秒； r 量纲为波长。

1) SVD 算法

表 4 精度均值(阈值 $n_{\text{tol}} = 0.5$ ，舍去 50 个奇异值)

Table 4 Average accuracy ($n_{\text{tol}} = 0.5$, and 50 singular value numbers are abandoned)

$r \backslash q$	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
5	0.000656	0.000697	0.001362	0.002743	0.005156	0.011597
10	0.000597	0.000627	0.001426	0.002594	0.004221	0.012005
50	0.001579	0.001563	0.001744	0.002906	0.005592	0.013267
100	0.005785	0.005771	0.005686	0.006110	0.007314	0.011164

表 5 精度 PV 值(阈值 $n_{\text{tol}} = 0.5$ ，舍去 50 个奇异值)

Table 5 P-V value of accuracy ($n_{\text{tol}} = 0.5$, and 50 singular value numbers are abandoned)

$r \backslash q$	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
5	0.001368	0.001636	0.003780	0.008833	0.017879	0.035403
10	0.001183	0.001712	0.004045	0.008492	0.014735	0.044889
50	0.005559	0.005053	0.006524	0.009729	0.020069	0.053793
100	0.015824	0.016354	0.019303	0.025166	0.028515	0.039768

表 6 精度均值(阈值 $n_{tol}=5$, 舍去 84 个奇异值)

Table 6 Average accuracy ($n_{tol}=0.5$, and 84 singular value numbers are abandoned)

$r \backslash q$	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
5	0.000578	0.000579	0.000540	0.000583	0.000695	0.001702
10	0.000571	0.000561	0.000529	0.000616	0.000771	0.001778
50	0.000694	0.000677	0.000650	0.000648	0.000866	0.001493
100	0.007823	0.007838	0.007829	0.007855	0.007842	0.007672

表 7 精度 $P-V$ 值(阈值 $n_{tol}=5$, 舍去 84 个奇异值)

Table 7 $P-V$ value of accuracy ($n_{tol}=5$, and 84 singular value numbers are abandoned)

$r \backslash q$	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
5	0.000783	0.000841	0.001145	0.001504	0.003021	0.006955
10	0.000199	0.000330	0.000960	0.001395	0.002476	0.005019
50	0.007169	0.007278	0.007840	0.007443	0.007534	0.010296
100	0.006518	0.006783	0.006930	0.007083	0.007770	0.009660

2) QR 算法

表 8 精度均值

Table 8 Average accuracy

$r \backslash q$	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
5	0.002086	0.004567	0.009520	0.020078	0.035791	0.059578
10	0.002034	0.003888	0.009493	0.016513	0.031543	0.071960
50	0.026803	0.027348	0.025903	0.030562	0.031677	0.056904
100	0.026111	0.026122	0.029755	0.029181	0.044452	0.084643

表 9 精度 $P-V$ 值

Table 9 $P-V$ value of accuracy

$r \backslash q$	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
5	0.007220	0.014655	0.029068	0.057044	0.102850	0.26236
10	0.005729	0.012110	0.033066	0.068491	0.101380	0.30129
50	0.015412	0.021972	0.048288	0.081929	0.093442	0.2620
100	0.015706	0.031163	0.060418	0.087695	0.146120	0.33422

通过仿真计算可以说明, SVD 法求解得到的精度均值要高于 QR 法, 同时 SVD 分解法还能有效地减小方程的扰动量给拼接计算带来的波动; SVD 法的作用受阈值影响明显, 实际检测中, 当子孔径布局、采样点方式及数目一定后, 方程组 $PL=Q$ 中的 P 阵便已确定, 其条件数及各个奇异值也确定, 其适用的阈值可以通过仿真分析确定。在确定子孔径布局条件下, 阈值宜确定为 $n_{tol}=5$ 。通过确定合适的阈值, 能够有效地控制计算精度的变化范围。

差源之一。通过理论分析, 干涉仪误差对计算精度的影响主要是由于求解病态方程组时的扰动量引起的, 因此采用了可以有效降低病态方程组解的不稳定性的 SVD 分解方法, 利用广义逆求解病态方程组。同时也使用 QR 分解法来进行求解作为对比数据, 通过对比说明了 SVD 方法的有效性及其在高精度子孔径拼接计算中的优势。这种优势当相对倾斜误差水平和干涉仪测量误差水平较大时, 显现得更为明显, 说明在满足相同计算精度要求时, 采用 SVD 方法可以有效地降低对高精度干涉仪的依赖。

计算数据是通过仿真得到, 在检测实验中, 由于其他误差源的共同影响, 检测精度将会略低于仿真结果。

5 结 论

通过对子孔径拼接计算进行精度分析, 总结得到干涉仪测量误差是对计算精度影响最为明显的误

参 考 文 献

- 1 Zhang Rongzhu, Shi Qikai, Cai Bangwei *et al.*. Study on the experiments of the stitching interferometer [J]. *Optical Technique*, 2004, **30**(2): 173~175
张蓉竹, 石琪凯, 蔡邦维 等. 子孔径拼接干涉检测实验研究[J]. 光学技术, 2004, **30**(2): 173~175
- 2 Weiming Cheng, Youlue Lin, Mingyi Chen. Accuracy analysis of multi-aperture overlao-scanning technique (MAOST) [C]. *SPIE*, 1993, **2003**: 283~288
- 3 Bai Jian, Cheng Shangyi. Object function analysis for subaperture testing and connection[J]. *Optical Instruments*, 1997, **19**(4~5): 36~39
白 剑, 程上彝. 子孔径检测及拼接的目标函数分析法[J]. 光学仪器, 1997, **19**(4~5): 36~39
- 4 Yan Gongtian. Matrix Theory[M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 1993. 297~302
严拱添. 矩阵论[M]. 北京: 宇航出版社, 1993. 297~302
- 5 Shen Maoxing, Zheng Wutuan. An application of singular value decomposition of matrix[J]. *J. Mathematics for Technology*, 1996, **12**(3): 56~61
申卯兴, 郑武团. 矩阵的奇异值分解的应用[J]. 工科数学, 1996, **12**(3): 56~61
- 6 Ye Songlin. Study of singular value decomposition of matrix and its application[J]. *J. Mathematic for Technology*, 1996, **12**(5): 41~44
叶松林. 矩阵奇异值分解及其应用研究[J]. 工科数学, 1996, **12**(5): 41~44