

# 基于 Curvelet 变换和全变差的图像去噪方法

倪 雪 李庆武 孟 凡 石 丹 范新南

(*河海大学计算机及信息工程学院, 江苏 常州 213022*)

**摘要** Curvelet 变换用于图像去噪可以较好地保留图像的细节信息,但在边缘处会产生“划痕”现象。采用全变差法进行去噪能保持边缘形状不变,但也会丢失图像的纹理等细节信息。为了充分利用两种方法的优点,将 Curvelet 变换和全变差相结合提出了一种有效的图像去噪方法。首先,对含噪图像分别进行 Curvelet 阈值去噪和全变差去噪。然后,将两幅去噪图像进行 Curvelet 融合,对于低频系数和高频系数分别采用加权平均和绝对值取大的融合算法。最后,将融合后的低频系数和各尺度高频系数进行 Curvelet 反变换得到融合后的去噪图像。实验表明,该方法能有效地降低图像噪声,又尽可能地保留图像的细节,其去噪效果明显优于单一 Curvelet 阈值法和全变差法。

**关键词** 图像处理; Curvelet 变换; 全变差; 图像去噪; 图像融合

中图分类号 TN911.73

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS20092909.2390

## Image Denoising Method Based on Curvelet Transform and Total Variation

Ni Xue Li Qingwu Meng Fan Shi Dan Fan Xinnan

(*College of Computer and Information Engineering, Hohai University,  
Changzhou, Jiangsu 213022, China*)

**Abstract** Curvelet transform can preserve more details for image denoising, but it always has the ‘warp-around’ artifacts in image edges. Total variation, another effective image denoising method, can preserve edges better, but image texture information will be also smoothed. An efficient image denoising method based on combination of curvelet transform and total variation is proposed. Firstly, the image is denoised by curvelet thresholding method and total variation method. Then, the two denoised images are fused using curvelet transform. Here the weighted average algorithm and maximizing absolute value algorithm are used respectively to process the low-frequency coefficients and the high-frequency coefficients. Finally, the denoised image is reconstructed by the inverse curvelet transform. Experimental results show that the new method is effective in removing white noise, and the detail of the image is kept well. It has better denoising effect than single curvelet thresholding method and total variation method.

**Key words** image processing; curvelet transform; total variation; image denoising; image fusion

## 1 引 言

近年来,一种新的多尺度变换—Curvelet 变换<sup>[1]</sup>在图像处理中得到了广泛的应用。该理论是 1999 年 Cande E. J. 和 Donoho D. L. 提出的,它保留了小波变换多尺度的特点,但与小波变换不同的

是,除了尺度和位移参量,Curvelet 还增加了一个方向参量,具有更好的方向辨识能力。2005 年 Candes E. J. 等<sup>[2,3]</sup>又将 Curvelet 变换算法进行改进(即第二代 Curvelet 变换),大大降低了数据的冗余度,提高了运算速度。目前,Curvelet 变换在图像

收稿日期: 2008-10-27; 收到修改稿日期: 2009-01-07

基金项目: 国家 863 计划(2007AA11Z227)和江苏省社会发展科技项目(BS2007058)资助课题。

作者简介: 倪 雪(1984—),女,硕士研究生,主要从事小波分析和数字图像处理方面的研究。

E-mail: nixue1213@126.com

导师简介: 李庆武(1964—),男,教授,主要从事信息获取与处理和数字图像处理等方面的研究。

E-mail: li\_qingwu@163.com

去噪方面的研究较多,应用比较广泛。由于 Curvelet 变换能充分描述二维图像中的曲线或直线状边缘特征,因此 Curvelet 变换不仅具有良好的去噪能力,而且去噪后的图像能尽可能地保留图像的边缘及细节信息<sup>[4]</sup>,视觉效果较好。但是 Curvelet 变换去噪方法也存在固有缺陷,主要表现在会产生原图像中并不存在的划痕。为此人们提出了许多改进算法:Cycle Spinning 法<sup>[5]</sup>、WindowShrink 法<sup>[6]</sup>、加强边缘保护法等<sup>[7]</sup>,这些方法去除划痕的效果并不很明显。

偏微分方程(PDE)<sup>[8]</sup>也是近十几年来兴起的一种图像处理方法,利用偏微分方程抑制图像噪声已经被认为是具有良好效果的图像去噪技术。其中,基于全变差(total variation, TV)模型<sup>[9,10]</sup>表现最为出色。与 Curvelet 变换不同,该方法是建立在泛函分析和微分几何的数学模型基础上,通过对图像反复迭代求解方程的最优解从而达到比较好的去噪目的,且不会扭曲图像边缘。但由于全变差不具备后向扩散的能力,所以处理的图像无边缘锐化、会产生“阶梯”效应。

为了充分利用 Curvelet 变换及全变差两种去噪方法的优势,克服各自的缺点。本文提出了一种基于 Curvelet 变换和全变差相融合的图像去噪方法。实验表明,该方法不仅很好地抑制噪声,而且能保留尽可能多的图像细节,去噪后的峰值信噪比(PSNR)得到显著提高,具有良好的视觉效果,是一种较为有效的去噪方法。

## 2 Curvelet 变换去噪

在实际应用中,图像的噪声源一般为加性的高斯白噪声,本文建立如下的含噪图像模型:

$$u_0(x, y) = u(x, y) + N(x, y), \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = 0, 1, \dots, m-1 \\ y = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

式中  $u_0$  是观察图像,  $u$  为从  $u_0$  中恢复出的原始图像,  $N$  是均值为 0, 标准差  $\sigma$  的高斯白噪声, 高斯白噪声服从  $N(0, \sigma^2)$ 。

对含噪图像进行 Curvelet 分解, 得到对应的 Curvelet 变换系数, 根据 Curvelet 变换原理, 当 Curvelet 基方向与图像的边缘轮廓方向一致时, 才会产生较大的系数, 比目标物小的噪声则对应较小的系数, 因此, 为了去除图像噪声, 可以采用阈值法保留较大的系数, 舍弃较小的系数, 而且不损失边缘细节。目前, 对 Curvelet 系数采用阈值处理通常有

硬阈值法和软阈值法, 另外也有利用系数相关性去噪、以及 BayesShrink 阈值估计等改进方法, 都取得了较好的去噪效果。这里为了说明本文算法的有效性, 采用广泛使用的硬阈值法, 即

$$\hat{C}^D(j, l) = \begin{cases} C^D(j, l), & |C^D(j, l)| \geq t \\ 0, & |C^D(j, l)| < t \end{cases} \quad (2)$$

式中  $C^D(j, l)$  为尺度  $j$  和方向  $l$  上的 Curvelet 系数,  $t$  为阈值,  $\hat{C}^D(j, l)$  为去噪后的 Curvelet 系数。阈值的选取方法为:  $t = k \cdot \sigma \cdot \bar{\sigma}_\lambda$ , 其中,  $k$  为尺度相关的系数, 对于最大尺度取  $k = 4$ , 其他尺度  $k = 3$ 。 $\bar{\sigma}_\lambda$  为噪声经过 Curvelet 变换后的方差, 可采用 Monte-Carlo 算法<sup>[4]</sup>进行估计。

实验表明, 采用基于 Curvelet 变换的阈值去噪法能有效地去除噪声, 有效地保留了图像的边缘及纹理部分, 视觉效果较好。但是由于采用阈值去噪不可避免地会“过扼杀” Curvelet 系数, 导致去噪后图像出现轻微的“划痕”<sup>[4]</sup>。

## 3 全变差去噪

全变差去噪的基本思想是将图像去噪问题转化为一个泛函求极值问题, 然后应用变分方法导出一组具有初始条件和边界条件的偏微分方程, 根据数值计算方法求解方程的最优解获得降噪图像。通常有噪声图像的全变差比无噪声图像的全变差明显大, 采用最小化全变差<sup>[9]</sup>可以消除噪声, 因此基于全变差的图像去噪可以归结为如下最小化问题:

$$\min \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2} dx dy, \quad (3)$$

式中  $\Omega$  为图像面积,  $\nabla u$  为图像  $u$  的梯度。由噪声特性得到 TV 范数最小化满足两种约束条件:

$$\int_{\Omega} u dx dy = \int_{\Omega} u_0 dx dy, \quad (4)$$

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy = \sigma^2.$$

通过引入拉格朗日乘子  $\lambda$ , 可以将上述有约束极值问题转化为无约束极值问题, 即

$$\min \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2} dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy. \quad (5)$$

其中第一项称为  $u$  的全变差范数(TV 范数), 它依赖于图像的变差幅度; 第二项为逼近项, 它控制着图像  $u$  和噪声图像  $u_0$  的差异。 $\lambda$  为规整化参数, 在 TV 范数项和逼近项之间起着重要的平衡作用。

这样, 就建立了图像去噪的 TV 模型。它是一个泛函求极值问题, 对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$u_t = -\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda(u - u_0), \quad (6)$$

其初始条件满足  $u = u_0$ 。通过梯度下降法对图像进行反复迭代直到得到一个稳定解,从而得到去噪后的图像  $u$ 。从(6)式可看出,扩散系数为  $1/|\nabla u|$ 。在边缘处,  $|\nabla u|$  较大,扩散系数较小,因此沿边缘方向的扩散较弱,从而保留了边缘;在平滑区,  $|\nabla u|$  较小,扩散系数较大,因此在平滑区的扩散能力较强,从而去除了噪声。但该模型有可能将噪声当成边缘,使其在平滑区产生阶梯效应<sup>[11]</sup>。

## 4 Curvelet 变换和全变差相融合的去噪

### 4.1 图像融合

图像融合是对同一目标的多个图像进行配准、合成,以克服单一图像的局限性,使目标图像更趋完备,从而提高图像的可靠性和清晰度。目前,基于小波变换的图像融合技术是近十年来发展比较快的一类图像融合算法<sup>[12~15]</sup>,并取得了良好的效果。Curvelet 作为一种新的多尺度分析方法比小波更加适合分析二维图像中的曲线或直线状边缘特征,而且具有更高的逼近精度和更好的稀疏表达能力。将 Curvelet 变换用于图像融合<sup>[16]</sup>,能够更好地提取原始图像的特征,为融合图像提供更多的信息。

利用 Curvelet 变换进行图像融合,主要是通过对含有不同信息的两幅原始图像  $X$  和  $Y$  分别进行 Curvelet 变换,得到各自的低频系数和各个方向的高频系数。低频系数反映的是图像的基本信息,而高频系数反映的是图像的边缘及细节,根据各自的特点选用不同的融合算法得到融合后的 Curvelet 系数,最后再进行 Curvelet 逆变换得到融合图像  $Z$ 。

在融合过程中,融合规则选取非常重要,这直接影响到图像质量的好坏。现有的 Curvelet 变换融合规则主要有:基于单个像素的取大法、取小法、加权平均法、基于区域的能量法、方差法等。由于低频系数和高频系数反映了图像不同的信息,因此需选用不同的融合规则。本文中,对于低频系数采用基于加权平均的融合算法,既利用两幅去噪图像各自的优点,同时又能消除一定的划痕。对于高频系数,采用了绝对值取大的融合算法,可以充分地提取 Curvelet 去噪后图像丰富的边缘信息,克服了全变差去噪后细节模糊的缺点。

加权平均法

$$\hat{C}^D(Z, p) = k \cdot \hat{C}^D(X, p) + (1 - k) \cdot \hat{C}^D(Y, p), \quad (7)$$

其中  $k$  为加权系数,  $p = (x, y)$  表示 Curvelet 系数的空间位置。

绝对值取大

$$\hat{C}^D(Z, p) = \begin{cases} \hat{C}^D(X, p), & |\hat{C}^D(X, p)| \geq |\hat{C}^D(Y, p)| \\ \hat{C}^D(Y, p), & |\hat{C}^D(X, p)| < |\hat{C}^D(Y, p)| \end{cases} \quad (8)$$

### 4.2 Curvelet 变换和全变差相融合的去噪算法

一个好的抑制噪声的方法应该是既能抑制噪声又不使图像的边缘轮廓变模糊,即在抑制噪声的同时有效地保持空间分辨率,但是往往一种去噪方法很难两者兼顾。在上文可以看出, Curvelet 变换和全变差用于图像去噪是较为有效的两种方法,但是两者也有不可避免的缺点。本文采用图像融合的方法,充分利用 Curvelet 变换去噪后能保留图像的纹理、边缘等细节信息的特点,又兼顾了全变差去噪后图像边缘保持形状不变的特性,克服了两种方法的缺点。具体算法步骤如下:

- 1) 对含噪图像  $u_0$  进行 Curvelet 分解,采用硬阈值去噪,得到 Curvelet 去噪后的系数  $\hat{C}^D(X, p)$ ;
- 2) 对含噪图像  $u_0$  进行全变差去噪,通过不断求解方程的最优解,得到去噪后的图像  $u_1$ ;
- 3) 对图像  $u_1$  进行 Curvelet 分解,得到 Curvelet 系数  $\hat{C}^D(Y, p)$ ;
- 4) 对于上述步骤得到的两种方法去噪后的 Curvelet 系数  $\hat{C}^D(X, p)$  和  $\hat{C}^D(Y, p)$ , 分别采用加权平均和绝对值取大的融合算法,得到融合后的 Curvelet 系数  $\hat{C}^D(Z, p)$ ;
- 5) 将 Curvelet 系数  $\hat{C}^D(Z, p)$  进行逆变换,得到去噪图像  $u$ 。

其算法流程框图如图 1 所示。

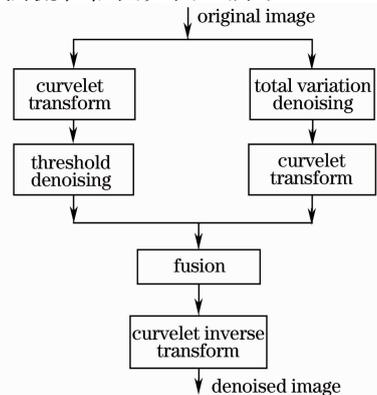


图 1 算法流程图

Fig. 1 Flow chart of algorithm

### 5 实验结果与分析

为了检验本文方法的有效性,将本文方法与单一 Curvelet 去噪<sup>[4]</sup>、全变差去噪<sup>[10]</sup>和多个小波基融合去噪<sup>[15]</sup>三种算法进行对比实验,以峰值信噪比 (PSNR)作为去噪效果测度指标。

实验中选择的图像是常用的标准测试图像 Lena,图像大小为 512 pixel×512 pixel。对图像分

别增加标准差  $\sigma$  为 10,15,20,25,30 的高斯白噪声。图 2 (a)为加入标准差为 20 的噪声图像;图 2 (b)为 Curvelet 去噪的图像;图 2 (c)是全变差去噪的图像;图 2 (d)为多小波基融合去噪的图像;图 2 (e)为本文融合去噪的图像。为了更好的比较三种去噪算法的效果,图 3 给出了对应的局部放大效果图,并且每种方法去噪后的 PSNR 值可见表 1。



图 2 几种方法 Lena 图像去噪对比。(a) 加噪图( $\sigma=20$ );(b) Curvelet 去噪;  
(c) TV 去噪;(d) 多小波基融合去噪;(e)本文方法去噪

Fig. 2 Comparison of denoising via different approaches. (a) Noisy image( $\sigma=20$ ); (b) curvelet denoising;  
(c) TV denoising; (d) multiple wavelet bases fusion denoising; (e) proposed method denoising

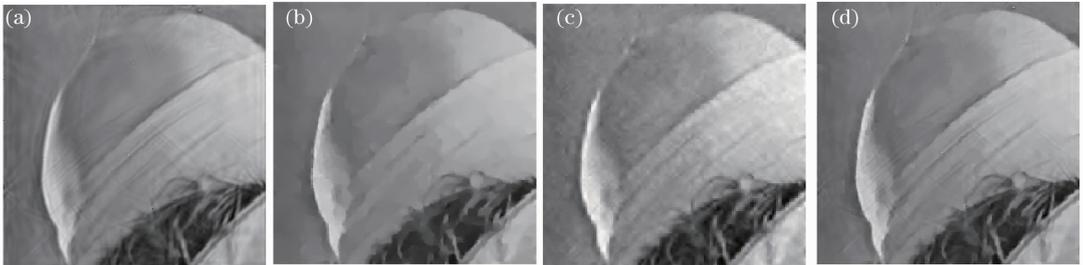


图 3 Lena 局部图像去噪结果对比。(a) Curvelet 去噪;(b) TV 去噪;  
(c) 多小波基融合去噪;(d) 本文方法去噪

Fig. 3 Denoising result of local Lena image. (a) Curvelet denoising; (b) TV denoising;  
(c) multiple wavelet bases fusion denoising; (d) proposed method denoising

从实验结果可以看出,四种算法都能够有效地去除噪声。但每种方法去噪的效果也不尽相同。从图 3(a)Curvelet 去噪的局部效果图可以看出,该方法去噪后能够较好地保留图像的边缘和纹理等细节特征,但是“划痕”现象比较明显,导致边缘处产生震荡。图 3(b)是采用全变差去噪的局部效果图,图像的平滑效果很好,缺点是帽沿上的纹理很模糊,并且

图像有块状现象。图 3(c)是文献[11]的实验结果图,平滑效果欠缺。相比而言,采用本文提出的融合算法[见图 3(d)]不仅去除噪声好,而且保留了图像的边缘纹理,克服了边缘震荡,视觉效果较好。另外,从表 1 中的数据可以明显看出,Curvelet 去噪、全变差去噪两种方法的 PSNR 值相当,采用融合去噪算法 PSNR 值有较大提高,大约提高了 1 dB。

表 1 各种去噪方法 PSNR 比较(单位: dB)

Table 1 PSNR of noise image after filtering /dB

| Lena noise standard deviation ( $\sigma$ ) | 10    | 15    | 20    | 25    | 30    |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|
| Noisy image                                | 28.13 | 24.61 | 22.11 | 20.17 | 18.59 |
| Curvelet method                            | 33.83 | 32.32 | 31.18 | 30.26 | 29.48 |
| TV method                                  | 34.12 | 32.36 | 31.17 | 30.26 | 29.54 |
| Wavelet method                             | 34.05 | 32.41 | 31.20 | 30.22 | 29.38 |
| Proposed method                            | 35.21 | 33.46 | 32.18 | 31.18 | 30.35 |

## 6 结 论

Curvelet 变换和全变差是近年来研究较热门的两去噪方法,本文通过分析二者各自的特点,提出了一种 Curvelet 变换和全变差相融合的图像去噪方法。实验结果表明,该算法克服了单一去噪方法的不足,有效地抑制图像噪声,并且较好地保留图像的边缘、纹理等细节信息,视觉效果较好。

### 参 考 文 献

- 1 Candes E J, Donoho D L. Curvelets-A surprisingly effective non-adaptive representation for objects with edges[C]. *Nashville, TN: Vanderbilt University Press*, 2000: 105~120
- 2 Candes E J, Donoho D L. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with C2 singularities [J]. *Commun Pure Appl. Math.*, 2004, **57**(2): 219~266
- 3 Candes E J, Demanet L, Donoho D L. Fast discrete curvelet transforms [R]. *Applied and Computational Mathematics, California Institute of Technology*, 2005: 1~43
- 4 Starck J L, Candes E J, Donoho D L. The curvelet transform for image denoising [J]. *IEEE Trans. Image Processing*, 2002, **11**(6): 670~684
- 5 Yang Jiahong, Xu Canhui, Wang Yaonan. Image de-noising algorithm based on fast curvelet transform [J]. *Comput. Engin. Appl.*, 2007, **43**(6): 31~33  
杨家红,许灿辉,王耀南. 基于快速曲波变换的图像去噪算法 [J]. *计算机工程与应用*, 2007, **43**(6): 31~33
- 6 Feng Peng, Mi Deling, Pan Yingjun *et al.*. Noise removal approach using Curvelet transform [J]. *Opt. Electron. Eng.*, 2005, **32**(9): 67~70  
冯 鹏,米德伶,潘英俊 等. 改进的 Curvelet 变换图像降噪方法 [J]. *光电工程*, 2005, **32**(9): 67~70
- 7 Xiao Xiaokui, Li Shaofa. Edge-preserving image denoising method using Curvelet transform [J]. *J. China Inst. Commun.*, 2004, **25**(2): 9~15  
肖小奎,黎绍发. 加强边缘保护的 Curvelet 图像去噪方法 [J]. *通信学报*, 2004, **25**(2): 9~15
- 8 Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1990, **12**(7): 629~639
- 9 Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. *Physica D*, 1992, **60** (1/4): 259~268
- 10 Rudin L, Osher S. Total variation based image restoration with free local constraints [C]. *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, 1994: 31~35
- 11 Chan T F, Osher S, Shen J. The digital TV filter and nonlinear denoising [J]. *IEEE Trans Imag. Proc.* 2001, **10**(2): 231~241
- 12 Maio Qiguang, Wang Baoshu. Multi-sensor image fusion based on improved laplacian pyramid transform [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(9): 1605~1610  
苗启广,王宝树. 基于改进的拉普拉斯金字塔变换的图像融合方法 [J]. *光学学报*, 2007, **27**(9): 1605~1610
- 13 Liu Kun, Guo Lei, Chang Weiwei. Regional feature self-adaptive image fusion algorithm based on contourlet transform [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(4): 681~686  
刘 坤,郭 雷,常威威. 基于 Contourlet 变换的区域特征自适应图像融合算法 [J]. *光学学报*, 2008, **28**(4): 681~686
- 14 Liu Bin, Peng Jiaxiong. Multi-spectral image fusion based on two-channel non-separable additive wavelets [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(8): 1419~1424  
刘 斌,彭嘉雄. 基于二通道不可分加性小波的多光谱图像融合 [J]. *光学学报*, 2007, **27**(8): 1419~1424
- 15 Li Qingwu, Ni Xue, Shi Dan. Image denoising method using multiple wavelet bases and fusion technology [J]. *Opt. Electron. Eng.*, 2007, **34**(11): 103~107  
李庆武,倪 雪,石 丹. 一种采用多个小波基的图像融合去噪方法 [J]. *光电工程*, 2007, **34**(11): 103~107
- 16 Li Huihui, Guo Lei, Liu Hang. Research on image fusion based on the second generation curvelet transform [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(5): 657~662  
李晖晖,郭 雷,刘 航. 基于二代 curvelet 变换的图像融合研究 [J]. *光学学报*, 2006, **26**(5): 657~662