

组合傅里叶变换与曲波变换的图像复原

邓承志¹ 汪胜前¹ 曹汉强²

(¹南昌工程学院计算机科学与技术系, 江西 南昌 330099)
(²华中科技大学电子与信息工程系, 湖北 武汉 430074)

摘要 针对图像复原的病态反问题进行研究, 分析了图像复原的数学模型及其病态性, 提出了组合傅里叶变换与曲波变换的图像复原(ForCurIR)算法。算法利用傅里叶变换对色噪声和曲波变换对分片光滑图像的稀疏表示特性, 将图像复原问题转换成傅里叶变换域约束去卷积和曲波变换域约束去噪问题, 最后通过组合傅里叶变换域和曲波变换域收缩法实现去卷积和抑制噪声。实验结果表明: ForCurIR 算法很好地再现了图像的边缘等细节信息, 复原出的图像在信噪比和视觉质量两方面都有显著的提高。

关键词 图像处理; 反问题; 正则化; 曲波变换; 收缩

中图分类号 TP391 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20092908.2134

Fourier-Curvelet Transform Combined Image Restoration

Deng Chengzhi¹ Wang Shengqian¹ Cao Hanqiang²

(¹Department of Computer & Technology Nanchang Institute of Technology, Nanchang, Jiangxi 330099, China)
(²Department of Electronic & Information, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074, China)

Abstract The ill-posed inverse problem of image restoration is studied. Firstly, the mathematical model and ill-posed property of image restoration are analyzed, and a Fourier-curvelet combined image restoration (ForCurIR) algorithm is proposed. ForCurIR algorithm exploits the Fourier transform's sparse representation of the colored noise and curvelet transform's sparse representation piecewise smooth images. The problem of image restoration is turned into constrained deconvolution in Fourier domain and constrained denoising in curvelet domain. Deconvolution and noise suppressing are performed via shrinkage both in the Fourier and curvelet domain. Experimental results demonstrate that ForCurIR algorithm can properly retrieve various kinds of image edges, and the signal-to-noise ratio (SNR) and visual quality of the restored images are improved significantly.

Key words image processing; inverse problem; regularization; curvelet transform; shrinkage

1 引 言

由于受大气干扰、相对运动及聚焦等不良因素的影响, 图像在实际获取的过程中不可避免地引入不同程度的模糊和噪声, 从而引起图像的降质。图像复原的目的就是从降质的图像中恢复出原始图像。图像复原最简单的方法就是直接进行反卷积操作。然而, 降质图像不可避免地会存在噪声, 加之降质系统的低通特性, 使得降质图像的微小变动可能导致复原图像的巨大变化。为了克服这一问题, 得

到唯一并且稳定的复原图像, 通常采用正则化方法^[1]。常用的正则化方法有各向异性法^[2]、半二次型法^[3]、全变差法^[4]等。

自 Donoho 首次提出基于小波阈值的线性反问题求解方法以来, 基于小波的图像复原方法也得到了广泛研究^[5~7]。Daubechies 等^[7]提出的小波域稀疏约束迭代阈值图像复原方法, 获得很好的结果。但是由于小波变换对二维图像的非稀疏表示缺陷, 使得该方法模糊了图像的边缘等特征。近年来, 图

收稿日期: 2008-09-10; **收到修改稿日期**: 2008-11-13

基金项目: 国家自然科学基金(60772091, 60462003)和江西省教育厅科技项目(GJJ09366)资助课题。

作者简介: 邓承志(1980—), 男, 博士研究生, 主要从事图像处理、多尺度几何分析方面的研究。

E-mail: dengchengzhi@126.com

导师简介: 曹汉强(1953—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事图像处理、信息安全方面的研究。

E-mail: caohq@mail.hust.edu.cn

像多尺度几何分析方法和理论得到广泛关注,并成功应用于图像处理的各领域^[8~10]。在图像复原中,Starck 等^[11]利用小波与曲波对不同图像内容的稀疏表示特性,提出的基于小波与曲波变换的图像复原方法,取得了好的效果。但该算法仅考虑了图像的内容,并没有考虑降质系统。

针对文献[7]和[11]存在的缺陷,本文提出了组合傅里叶变换和曲波变换的稀疏约束的图像复原算法。该算法利用傅里叶变换对色噪声和曲波变换对分片光滑图像的稀疏表示特性,将图像复原问题转化为两个约束问题,最后通过简单的收缩操作实现图像复原的去卷积和去噪。

2 组合傅里叶变换与曲波变换的图像复原

假定图像降质模型为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (1)$$

其中 \mathbf{y} 为降质图像; \mathbf{x} 为理想图像; \mathbf{H} 为分块循环的托普里兹矩阵,在物理上表达为降质的点扩展函数; \mathbf{n} 为噪声。图像复原实质上包含两个主要步骤,即反卷积和去噪。由于实际降质图像中存在噪声,因此反卷积操作使得去卷积后的图像中残留色噪声 $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{n}$ 。傅里叶变换域卷积和乘积的内在联系,和傅里叶变换对色噪声的稀疏表示特性,有利于反卷积操作的进行。而曲波变换对分片光滑图像的稀疏表示特性,有利于保留复原图像细节特征的同时,有效去除残留噪声。

2.1 傅里叶域收缩去卷积

假定傅里叶变换矩阵为 Φ_f ,对(1)式左右两边进行傅里叶变换得

$$\alpha_y^f = \alpha_H^f \alpha_x^f + \alpha_n^f, \quad (2)$$

其中 $\alpha_x^f = \Phi_f \mathbf{x}$, $\alpha_y^f = \Phi_f \mathbf{y}$, $\alpha_H^f = \Phi_f \mathbf{H}$ 分别为 \mathbf{x} , \mathbf{y} 和 \mathbf{H} 的傅里叶系数。在傅里叶变换域进行反卷积运算得到

$$\tilde{\alpha}_x^f = \alpha_x^f + \alpha_n^f / \alpha_H^f, \quad (3)$$

α_n^f / α_H^f 为去卷积引入的色噪声的傅里叶系数,除号“/”为矩阵的点除。

为了去卷积的同时,减少色噪声的引入,提出了新的去卷积模型,将去卷积问题转化了以下约束问题:

$$\hat{\alpha}_x^f = \arg \min_{\alpha_x^f} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + l_f \|\alpha_x^f\|_2^2. \quad (4)$$

其中 l_f 为正则化参数。

设傅里叶反变换矩阵 Φ_f^T ,由(4)式得

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_x^f &= \arg \min_{\alpha_x^f} \|\Phi_f^T \alpha_y^f - \Phi_f^T \alpha_H^f \alpha_x^f\|_2^2 + l_f \|\alpha_x^f\|_2^2 = \\ &= \arg \min_{\alpha_x^f} \|\Phi_f^T (\alpha_y^f - \alpha_H^f \alpha_x^f)\|_2^2 + l_f \|\alpha_x^f\|_2^2, \end{aligned} \quad (5)$$

由于 $\|\Phi_f^T\|_2 = 1$, (5)式等价于

$$\hat{\alpha}_x^f = \arg \min_{\alpha_x^f} \|\alpha_y^f - \alpha_H^f \alpha_x^f\|_2^2 + l_f \|\alpha_x^f\|_2^2, \quad (6)$$

组合(2)式和(3)式,求解最优化问题(6)式得到

$$\hat{\alpha}_x^f = S_{l_f}^f \cdot \alpha_x^f + S_{l_f}^f \alpha_n^f / \alpha_H^f = \beta_x^f + \beta_n^f / \alpha_H^f, \quad (7)$$

其中 $S_{l_f}^f = |\alpha_H^f|^2 / (|\alpha_H^f|^2 + l_f)$ 为傅里叶域收缩因子, β_x^f 和 β_n^f / α_H^f 分别是收缩后保留的信号和残留的噪声。由(7)式可以看出,傅里叶域收缩法克服了去卷积的病态性,同时去除了卷积、减少了色噪声。将(7)式两边进行傅里叶反变换,可以得到傅里叶域收缩去卷积后的复原图像 $\hat{\mathbf{x}}_{l_f} = \tilde{\mathbf{x}}_{l_f} + \tilde{\mathbf{n}}$ 。

2.2 曲波域收缩去噪

由于正则化参数 l_f 的影响,使得傅里叶域收缩法去卷积后,复原图像 $\hat{\mathbf{x}}_{l_f}$ 中仍残留相当的噪声。为了进一步去除复原图像中残留的噪声,提出了曲波变换域加权稀疏约束的能量模型,将去噪问题转化为以下约束问题。

$$\hat{\alpha}_x^c = \arg \min_{\alpha_x^c} \|\hat{\mathbf{x}}_{l_f} - \mathbf{x}\|_2^2 + l_c \|\omega \alpha_x^c\|_1, \quad (8)$$

其中 α_x^c 为理想图像 \mathbf{x} 的曲线波系数, ω 为加权系数。设曲波逆变换矩阵为 Φ_c^T ,则(8)式为

$$\hat{\alpha}_x^c = \arg \min_{\alpha_x^c} \|\hat{\mathbf{x}}_{l_f} - \Phi_c^T \alpha_x^c\|_2^2 + l_c \|\omega \alpha_x^c\|_1, \quad (9)$$

(9)式约束去噪问题致力于最小化图像重建误差,同时使得图像的表达最稀疏。特殊地,当 $\omega = \mathbf{I}$ 时, (9)式为基追踪去噪问题^[12~14]。

对最优化问题(9)式进行求解,可以得到

$$\hat{\alpha}_x^c = \text{sign}(\hat{\alpha}_x^c) \cdot \max\{0, |\hat{\alpha}_x^c| - l_c \omega\}, \quad (10)$$

式中 $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数, $\max(\cdot)$ 为最大值函数。(10)式为软阈值收缩函数, $l_c \omega$ 为收缩阈值。正则化参数 l_c 选定为 Donoho 提出的小波域收缩去噪的收缩函数^[15],即 $l_c = \sigma \sqrt{2 \lg N}$ 。由于曲波变换不是保范的,因此直接利用该阈值函数并不合理。考虑到曲波的范数依赖于曲波变换中的参数本身,加权系数 ω 可由波系数的范数决定。设 \mathbf{F} 表示离散曲波变换矩阵,则加权系数 ω 选定为 $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$ 的对角元素。由于曲波变换缺乏平移不变性,因此采用收缩法会引入 Gibbs 噪声,为了有效去除复原图像中的 Gibbs 噪声,提高视觉质量,文中采用 Cycle spinning 方法^[16]。

2.3 最优正则化参数的选取

正则化参数 l_f 影响最优化问题(6)式的目标函

数; l_f 太小, 去卷积后复原图像中存在大量的噪声; l_f 过大, 复原图像被过度平滑, 造成细节丢失。由于采用傅里叶域收缩法去卷积和曲波域收缩法去噪相结合的方式实现图像的复原, 因此 l_f 的选取并不能仅考虑目标函数(6)式。采用最小均方误差的准则来确定最优正则化参数 l_f^{opt} , 即

$$l_f^{\text{opt}} = \arg \min_{l_f} \| \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \|_2^2, \quad (11)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}$ 为复原图像。

由于理想图像 \mathbf{x} 未知, 可通过求解以下最优化问题的解来得到 l_f^{opt} :

$$l_f^{\text{opt}} = \arg \min_{l_f} \frac{|\hat{\alpha}_H^f|^2}{|\alpha_H^f|^2 + l_f} \frac{1}{|\alpha_H^f|} \| \alpha_H^f \hat{\alpha} - \alpha_y^f \|_2^2, \quad (12)$$

其中 $\hat{\alpha}$ 为复原图像 $\hat{\mathbf{x}}$ 的傅里叶系数。

3 实验结果

为了检验算法的有效性, 从仿真实验和真实 SAR 图像实验两个方面进行图像复原。实验从客

观保真度和视觉质量两方面, 与 Daubechies 算法^[7]进行比较。分别采用信噪比(k_{SNR})和模糊信噪比(k_{BSNR})来度量复原图像和降质图像的客观保真度, 两者定义如下。

$$k_{\text{SNR}} = 10 \times \lg(\| \mathbf{x} \|^2 / \| \mathbf{n} \|^2), \quad (13)$$

$$k_{\text{BSNR}} = 10 \times \lg(\| \mathbf{H}\mathbf{x} \|^2 / \| \mathbf{n} \|^2), \quad (14)$$

式中 \mathbf{x} 为理想图像, \mathbf{n} 为噪声, $\mathbf{H}\mathbf{x}$ 模糊图像。

3.1 仿真实验

本实验选取大小为 512×512 的 Lena 图像进行实验。实验中取方差为 1 的 7×7 高斯卷积核对图像进行卷积, 并加入均值为零方差为 σ_n^2 的高斯白噪声, 使得降质图像 $k_{\text{BSNR}} = 20$ dB。图 1 为两种算法 Lena 复原图像的比较, 其中 (a)~(d) 分别对应原图、降质图、Daubechies 复原图像和 ForCurIR 复原图像。比较可知, Daubechies 算法模糊了图像的边缘细节, 复原图像[图 1(c)]视觉质量较差。而 ForCurIR 算法很好地保留了复原图像中的边缘细节, 复原图像具有更高的[图 1(d)]视觉质量。

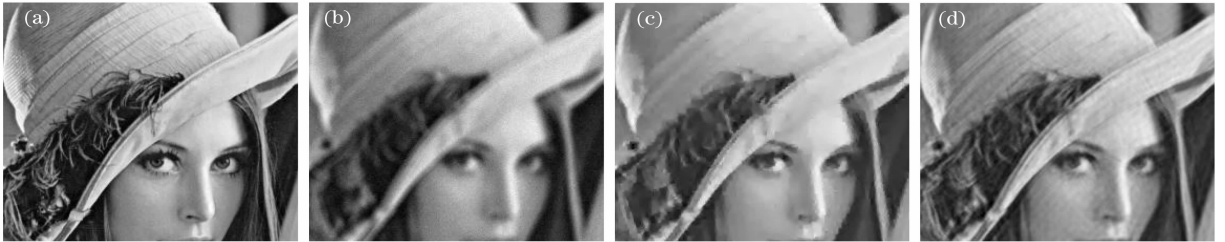


图 1 Lena 复原图像视觉质量比较。(a) 原图; (b) 降质图($k_{\text{BSNR}} = 20$ dB); (c) Daubechies 算法($k_{\text{SNR}} = 23.6$ dB); (d) ForCurIR ($k_{\text{SNR}} = 24.7$ dB)

Fig. 1 Visual quality comparisons of restored Lena images. (a) Original image; (b) Degraded image ($k_{\text{BSNR}} = 20$ dB), (c) Daubechies algorithm ($k_{\text{SNR}} = 23.6$ dB), (d) ForCurIR ($k_{\text{SNR}} = 24.7$ dB)

3.2 真实 SAR 图像实验

本实验为未知降质系统的合成孔径雷达(SAR)图像复原实验。实验中, 点扩展函数 H 采用文献[17]中的方法进行估计。图 2 为 Daubechies 算法与 ForCurIR 算法复原图像的视觉质量比较, 图 2(a)~

(d)分别对应原图、降质图、Daubechies 复原图像和 ForCurIR 复原图像。其中 Daubechies 复原图像的 SNR 为 21.75 dB, 而 ForCurIR 复原图像的 SNR 为 23.91 dB, ForCurIR 算法获得更高的 SNR。从图可以看出, ForCurIR 复原图像具有更好的视觉质量。

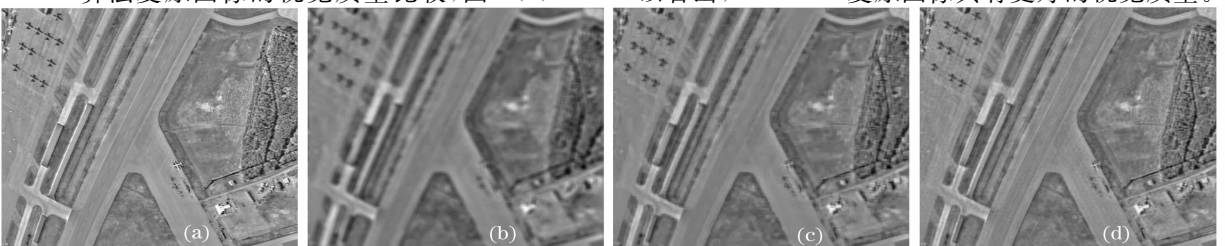


图 2 SAR 复原图像视觉质量比较。(a) 原图; (b) 降质图; (c) Daubechies 算法($k_{\text{SNR}} = 21.75$ dB); (d) ForCurIR ($k_{\text{SNR}} = 23.91$ dB)

Fig. 2 Visual quality comparisons of restored Lena images. (a) Original image; (b) Degraded image, (c) Daubechies algorithm ($k_{\text{SNR}} = 21.75$ dB), (d) ForCurIR ($k_{\text{SNR}} = 23.91$ dB)

4 结 论

提出了一种组合傅里叶变换与曲波变换的图像复原算法。算法首先利用傅里叶域收缩法对降质图像进行去卷积,然后利用曲波域收缩法进行去噪。算法克服了单一变换域正则化算法中去卷积和去噪间的矛盾;在去卷积的同时去除了噪声,并且最大限度地保留了图像的边缘信息。实验结果表明,新的算法在客观保真度和视觉质量两方面获得更好的结果。

参 考 文 献

- 1 Aubert G., Kornprobst P.. *Mathematical Problems in Image processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations* [M]. New York: Springer, 2001, 59~127
- 2 You Y. L., Kaveh M.. Blind image restoration by anisotropic regularization [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1999, **8**(3): 396~407
- 3 Geman D., Yang C.. Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1995, **4**(7): 932~946
- 4 Seongjai K.. PDE-based image restoration: a hybrid model and color image denoising [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2006, **15**(5): 1163~1170
- 5 Neelamani R., Choi H., Baraniuk. FowWard: fourier-wavelet regularized deconvolution for ill-conditioned system [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2004, **52**(2): 418~433
- 6 Bioucas-Dias J. M.. Bayesian wavelet-based image deconvolution: a GEM algorithm exploiting a class of heavy-tailed priors [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2006, **15**(4): 937~951
- 7 Daubechies I., Defrise M., Mol C. D.. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint [J]. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2004, **57**(11): 1413~1457
- 8 Zhang Jingjing, Fang Yonghua. Novel denoising method for remote sensing image based on contourlet transform [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(3): 462~466
张晶晶, 方勇华. 基于 Contourlet 变换的遥感图像去噪新算法 [J]. *光学学报*, 2008, **28**(3): 462~466
- 9 Guo B. L., Zhang Q., Hou Y.. Region-based fusion of infrared and visible images using nonsubsampling contourlet transform [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2008, **6**(5): 338~341
- 10 Wang Haihong, Zeng Ni, Lu Wei *et al.*. Edge detection of laser imaging radar based on wavelet transform and mathematical morphology [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(6): 903~906
王海虹, 曾妮, 陆威等. 基于小波变换和数学形态学的激光成像雷达图像边缘检测 [J]. *中国激光*, 2008, **35**(6): 903~906
- 11 Starck J. L., Nguyen M. K., Murtagh F.. Wavelets and curvelets for image deconvolution: a combined approach [J]. *Signal Processing*, 2003, **83**(10): 2279~2283
- 12 Chen S. S., Donoho D. L., Saunders M. A.. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1999, **20**(1): 33~61
- 13 Elad M.. Why simple shrinkage is still relevant for redundant represents? [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2006, **52**(2): 5559~5569
- 14 Guleryuz O. G.. nonlinear approximation based image recovery using adaptive sparse reconstructions and iterated denoising-part I: theory [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2006, **15**(3): 539~554
- 15 Donoho D. L.. De-noising by soft-thresholding [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1995, **41**(3): 613~627
- 16 Coifman R. R., Donoho D. L.. Translation-invariant denoising [C]. In: Antoniadis A., Oppenheim G., Eds. *Wavelets and Statistics*. Berlin: Springer-Verlag, 1995
- 17 Rooms F., Philips W., Portilla J.. Parametric PSF estimation via sparseness maximization in the wavelet domain [C]. *SPIE*, 2004, **5607**: 26~33