文章编号：0253-2239(2009)07-2006-05

双模SU(1,1)相干态光场与V-型三能级原子玻色-爱因斯坦凝聚体相互作用系统中光场的压缩特性

赵建刚 孙长勇 闫丽华

（聊城大学物理科学与信息工程学院，山东 聊城 252059）

摘要 在双模SU(1,1)相干态光场和V-型三能级原子玻色-爱因斯坦凝聚体相互作用系统中，应用全量子理论，在旋波近似下，研究了双模光场的压缩特性，分别讨论了光场与原子之间的耦合常数、原子之间的相互作用和光场参数对光场压缩特性的影响。研究表明，光场的两个正交分量均被周期性压缩，光场与原子的耦合系数和原子间的相互作用强度增大时均使得光场正交分量涨落的周期缩短；光场参数的变化不影响光场压缩的周期，对压缩深度有一定的影响。

关键词 量子光学；玻色-爱因斯坦凝聚；V-型三能级原子；双模SU(1,1)相干态；光场压缩

中图分类号 O431 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20092907.2006

Squeezing Properties of Two-Mode SU(1,1) Coherent States Interacting with Bose-Einstein Condensate of V-Type Three-Level Atoms

Zhao Jiangang Sun Changyong Yan Lihua

(*School of Physics Science and Information Technology, Liaocheng University, Liaocheng, Shandong* 252059, *China*)

Abstract The squeezing properties of two-mode SU(1,1) coherent states interacting with Bose-Einstein condensate of V-type three-level atoms are investigated with rotating-wave approximation and Bogoliubov approximation by means of quantum theory . The influences of the coupling constant between light field and atoms, the interaction among atoms in Bose-Einstein condenstate (BEC) and the parameter of light on squeezing properties have been discussed. The results show that two quadrature components can be squeezed periodically, the coupling constant between light field and atoms and the interacting among atoms in BEC also shorten the period of the fluctuations of two quadrature components of light and the light parameter has some influence on the depth of squeezing but has no influence on its period.

Key words quantum optics; Bose-Einstein condensate; V-type three-level atom; two-mode SU(1,1) coherent state; squeezing of light field

1 引 言

由于光场与原子之间的相互作用在原子的激光冷却、玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)[1~19]的制备和探测过程中起着极为重要的作用。因此，对BEC的光学性质的研究即有利于了解BEC自身的特性，而且可能为BEC的制备和探测提供有效的方法。文献[6]提出了一种普遍的原子与光子相互作用的量子场论，不仅可用于超冷原子的量子统计性质，而且可用于描写BEC的形成以及BEC的量子光学性质。文献[7]针对原子激光的耦合输出实验提出了一种类似J-C模型的理论分析模型。文献[8]进一步研究了压缩激光的量子动力学理论，提出利用压缩相干

收稿日期：2008-10-13；**收到修改稿日期**：2008-11-20

基金项目：国家自然科学基金(10847143)和山东省自然科学基金(Q2007A01，Y2008A23)资助课题。

作者简介：赵建刚(1977—)，男，硕士研究生，主要从事量子光学、玻色-爱因斯坦凝聚方面的研究。
E-mail：zhaojiangang2007@163.com

导师简介：孙长勇(1957—)，男，教授，主要从事量子光学、玻色-受因斯坦凝聚方面的研究。
E-mail：sunchangyong@lcu.edu.cn

光与原子 BEC 的相互作用可以产生压缩原子激光。文献[9]又提出了一种利用强入射光控制原子激光相干性的方法，并证明了输出的原子激光束将会随时间演化而呈现一些非经典性质，如亚泊松分布和正交压缩性质等。文献[13]研究了 V-型三能级原子 BEC 与双模压缩光场相互作用系统中光场的压缩特性。本文则近一步考虑原子间相互作用，研究了 V-型三能级原子 BEC 与双模 SU(1, 1)相干态光场相互作用系统中光场的压缩特性。研究表明，光场的两个正交分量均被周期性压缩，光场与原子的耦合系数和原子间的相互作用强度增大时均使得光场正交分量涨落的周期缩短；光场参数的变化不影响光场压缩的周期，对压缩深度有一定的影响。

2　理论模型

考虑 V-型三能级原子 BEC 与双模 SU(1,1)相干态光场的相互作用系统．原子能级 $|1\rangle \to |3\rangle$ 和 $|2\rangle \to |3\rangle$ 之间允许跃迁，$|2\rangle \to |3\rangle$ 之间为禁戒跃迁。在旋波近似下，考虑原子之间相互作用，系统的哈密顿量($\hbar=1$)为

$$
\begin{aligned}
H =& \omega_{01} b_2^\dagger b_2 + \omega_{02} b_3^\dagger b_3 + \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 + \\
& g'(a_1 b_1 b_2^\dagger + a_1^\dagger b_1^\dagger b_2 + a_2 b_1 b_3^\dagger + a_2^\dagger b_1^\dagger b_3) + \\
& \Omega(b_1^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + b_1^\dagger b_2^\dagger b_1 b_2 + b_2^\dagger b_1^\dagger b_2 b_1 + b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_2 + \\
& b_1^\dagger b_3^\dagger b_1 b_3 + b_3^\dagger b_1^\dagger b_3 b_1 + b_3^\dagger b_3^\dagger b_3 b_3),
\end{aligned} \tag{1}
$$

式中 $b_i^\dagger$ 和 $b_i(i=1,2,3)$ 分别为 BEC 原子第 i 个原子态的产生算符与湮灭算符，$a_i^\dagger$ 和 $a_i(i=1,2)$ 分别为第 i 模光场的产生算符和湮灭算符，$\omega_i(i=1,2)$ 为第 i 模光场的圆频率，$\omega_{0i}(i=1,2)$ 为原子基态和第 i 激发态之间的本征跃迁圆频率，g' 为原子和光场之间的耦合系数，Ω 为原子间相互作用强度系数。为简单起见，只考虑双共振情形，即设 $\omega_1=\omega_{01}$，$\omega_2=\omega_{02}$。

设初始时刻所有原子均处于基态并发生 BEC，激发态为真空态，系统的态矢可表示为

$$
|\psi(0)\rangle = |\beta\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \otimes |\xi,q\rangle, \tag{2}
$$

式中 $|\beta\rangle_1$ 表示在基态发生 BEC 的原子处于相干态[7]，有 $b_1|\beta\rangle_1=\sqrt{N_0}e^{-i\theta}|\beta\rangle_1$，$N_0$ 为处于 $|\beta\rangle_1$ 的平均原子数，而 $|0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3$ 表示原子能级 $|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 处于真空态，$|\xi,q\rangle$ 为双模 SU(1,1)相干态光场：

$$
|\xi,q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n+q,n\rangle \tag{3}
$$

其中

$$
f_n = (1-|\xi|^2)^{\frac{1+q}{2}} \left(\frac{(n+q)!}{n!q!}\right)^{\frac{1}{2}} |\xi|^n e^{in\varphi}, \tag{4}
$$

q 为两模光场的粒子数之差，$|\xi|$ 为双模光场平均数，φ 为 ξ 的幅角，ξ,q 可以用实验来控制。

为了使体系的运动方程便于求解，采用 Bogoliubov 近似，即假定初始时刻处于 BEC 的原子数目很大，以至于在光场相互作用过程中基态原子数的缓慢变化可以忽略不计，从而可以将体系哈密顿中的 $b_1^\dagger$ 和 b_1 分别用 $\sqrt{N_0}e^{i\theta}$ 和 $\sqrt{N_0}e^{-i\theta}$ 代替，略去 $b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_2$ 和 $b_3^\dagger b_3^\dagger b_3 b_3$ 项，令 $g=g'\sqrt{N_0}$，则 H 可简化为

$$
\begin{aligned}
H =& (\omega_{01} + 2N_0\Omega) b_2^\dagger b_2 + (\omega_{02} + 2N_0\Omega) b_3^\dagger b_3 + \\
& \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 + g[(a_1 b_2^\dagger + a_2 b_3^\dagger) e^{-i\theta} + \\
& (a_1^\dagger b_2 + a_2^\dagger b_3) e^{i\theta}] + \Omega N_0^2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

考虑原子之间的相互作用，求解系统的 Heisenberg 运动方程($\hbar=1$)：

$$
i\frac{\partial}{\partial t} a_1(t) = [a_1(t), H] = \omega_1 a_1(t) + g b_2(t) e^{i\theta}, \tag{6}
$$

$$
i\frac{\partial}{\partial t} a_2(t) = [a_2(t), H] = \omega_2 a_2(t) + g b_3(t) e^{i\theta}, \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t} b_2(t) =& [b_2(t), H] = \\
& (\omega_1 + 2N_0\Omega) b_2(t) + g a_1(t) e^{-i\theta},
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t} b_3(t) =& [b_3(t), H] = \\
& (\omega_2 + 2N_0\Omega) b_3(t) + g a_2(t) e^{-i\theta},
\end{aligned} \tag{9}
$$

得到：

$$
a_1(t) = \frac{\exp[-i(\omega_1 + N_0\Omega)t]}{\gamma} \times \{[\gamma\cos(\gamma t) + iN_0\Omega\sin(\gamma t)] a_1(0) - ig\sin(\gamma t) e^{i\theta} b_2(0)\}, \tag{10}
$$

$$
a_2(t) = \frac{\exp[-i(\omega_2 + N_0\Omega)t]}{\gamma} \times \{[\gamma\cos(\gamma t) + iN_0\Omega\sin(\gamma t)] a_2(0) - ig\sin(\gamma t) e^{i\theta} b_3(0)\}, \tag{11}
$$

$$
b_2(t) = \frac{\exp[-i(\omega_1 + N_0\Omega)t]}{\gamma} \times \{-ig\sin(\gamma t) e^{-i\theta} a_1(0) + [\gamma\cos(\gamma t) - iN_0\Omega\sin(\gamma t)] b_2(0)\}, \tag{12}
$$

$$
b_3(t) = \frac{\exp[-i(\omega_2 + N_0\Omega)t]}{\gamma} \times \{-ig\sin(\gamma t) e^{-i\theta} a_2(0) + [\gamma\cos(\gamma t) - iN_0\Omega\sin(\gamma t)] b_3(0)\}, \tag{13}
$$

式中 $\gamma=\sqrt{(g^2+N_0^2\Omega^2)}$。

3 光场的压缩效应

为了研究光场的压缩效应，定义光场的两个缓变的正交分量算符[20]为

$$U_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(a_1 + a_1^\dagger + a_2 + a_2^\dagger), \tag{14}$$

$$U_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}\mathrm{i}}(a_1 - a_1^\dagger + a_2 - a_2^\dagger). \tag{15}$$

U_1, U_2 满足下列对易关系：

$$[U_1, U_2] = \mathrm{i}/2, \tag{16}$$

相应的不确定关系为

$$(\Delta U_1)^2(\Delta U_2)^2 \geqslant 1/16. \tag{17}$$

引入

$$Q_i = (\Delta U_i)^2 - 1/4. \quad (i = 1,2) \tag{18}$$

若在某一状态下，$Q_i<0(i=1,2)$，则表示光场的第 i 个正交分量的量子噪声被压缩。当系统处于(2)式所描述的状态时，利用(10)式和(11)式可得

$$\langle a_1(t)\rangle = \langle a_2(t)\rangle = \langle a_1^2(t)\rangle = \langle a_2^2(t)\rangle = \langle a_1^\dagger(t)a_2(t)\rangle = 0, \tag{19}$$

$$\langle a_1(t)a_2(t)\rangle = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2+2N_0\Omega)t}}{\gamma^2}[\gamma\cos(\gamma t) + \mathrm{i}N_0\Omega\sin(\gamma t)]^2 \times \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{(n+q+1)(n+1)}f_n^* f_{n+1}, \tag{20}$$

$$\langle a_1^\dagger(t)a_1(t)\rangle = \frac{1}{\gamma^2}\{\gamma^2\cos^2(\gamma t) + [N_0\Omega\sin(\gamma t)]^2\} \times \sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2(n+q), \tag{21}$$

$$\langle a_2^\dagger(t)a_2(t)\rangle = \frac{1}{\gamma^2}\{\gamma^2\cos^2(\gamma t) + [N_0\Omega\sin(\gamma t)]^2\} \times \sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2 n, \tag{22}$$

将(19)式～(22)式代入(18)式得

$$\begin{aligned} Q_1 = \frac{1}{4} \times \Big(& \frac{1}{\gamma^2}\{\gamma^2\cos^2(\gamma t) + [N_0\Omega\sin(\gamma t)]^2\} \times \sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2(2n+q) + \\ & \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2+2N_0\Omega)t}}{\gamma^2}[\gamma\cos(\gamma t) + \mathrm{i}N_0\Omega\sin(\gamma t)]^2 \times \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{(n+q+1)(n+1)}f_n^* f_{n+1} + \\ & \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2+2N_0\Omega)t}}{\gamma^2}[\gamma\cos(\gamma t) - \mathrm{i}N_0\Omega\sin(\gamma t)]^2 \times \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{(n+q+1)(n+1)}f_n f_{n+1}^* \Big), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = \frac{1}{4} \times \Big(& \frac{1}{\gamma^2}[\gamma^2\cos^2(\gamma t) + (N_0\Omega\sin(\gamma t))^2] \times \sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2(2n+q) - \\ & \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2+2N_0\Omega)t}}{\gamma^2}[\gamma\cos(\gamma t) + \mathrm{i}N_0\Omega\sin(\gamma t)]^2 \times \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{(n+q+1)(n+1)}f_n^* f_{n+1} - \\ & \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2+2N_0\Omega)t}}{\gamma^2}[\gamma\cos(\gamma t) - \mathrm{i}N_0\Omega\sin(\gamma t)]^2 \times \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{(n+q+1)(n+1)}f_n f_{n+1}^* \Big). \end{aligned} \tag{24}$$

由于(23)式和(24)式比较复杂，很难直接看出 Q_1, Q_2 随时间演化的内在规律，但可借助于数值计算的方法形象地展示 Q_1, Q_2 随时间的演化曲线，进一步分析得出有意义的结果。由于 Q_1, Q_2 的函数

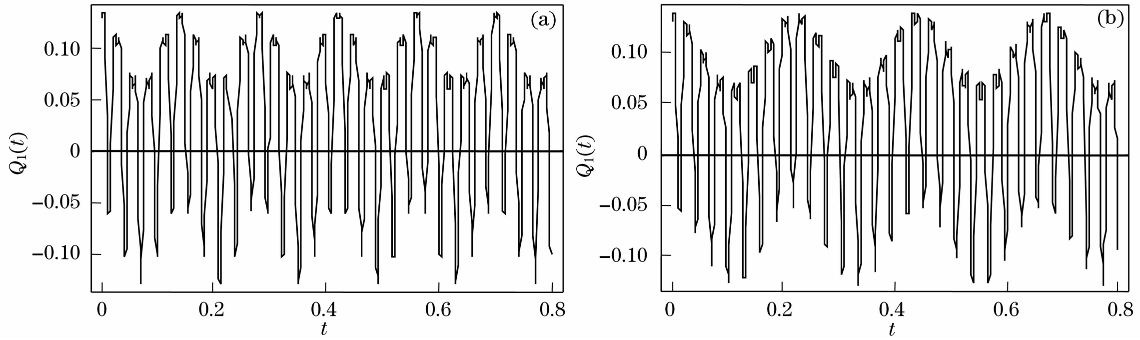

图 1 当 $g'=1$ (a)，$g'=0.8$ (b)，$\Omega=0.02$，$\xi=0.2$，$q=10$，$\varphi=0$ 时，Q_1 随时间的演化曲线

Fig. 1 Time evolution of Q_1 with $g'=1$ (a), $g'=0.8$ (b), $\Omega=0.02$, $\xi=0.2$, $q=10$, $\varphi=0$

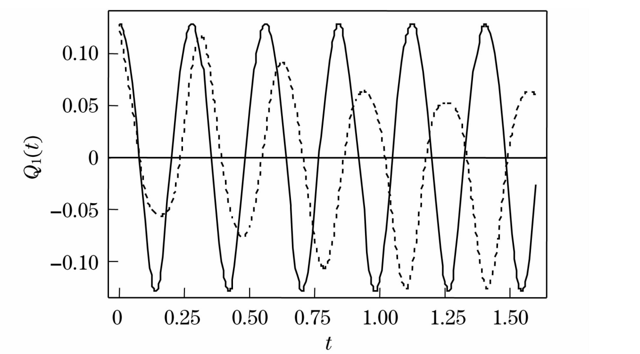

图 2　当 $g'=0.2$，$\Omega=0.01$(实线)，$\Omega=0$(虚线)，$\xi=0.2$，$q=10$，$\varphi=0$ 时，Q_1 随时间的演化曲线

Fig. 2　Time evolution of Q_1 with $g'=0.2$, $\Omega=0.01$ (real line), $\Omega=0$ (broken line), $\xi=0.2$, $q=10$, $\varphi=0$

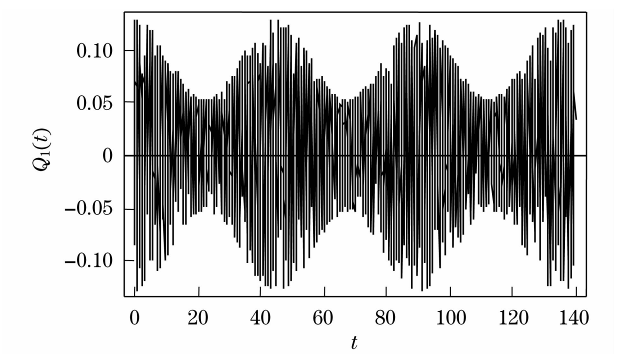

图 3　当 $g'=0.2$，$\Omega=0.01$，$\xi=0.2$，$q=10$，$\varphi=0$ 时，Q_1 长时间的演化曲线

Fig. 3　Long time evolution of Q_1 with $g'=0.2$, $\Omega=0.01$, $\xi=0.2$, $q=10$, $\varphi=0$

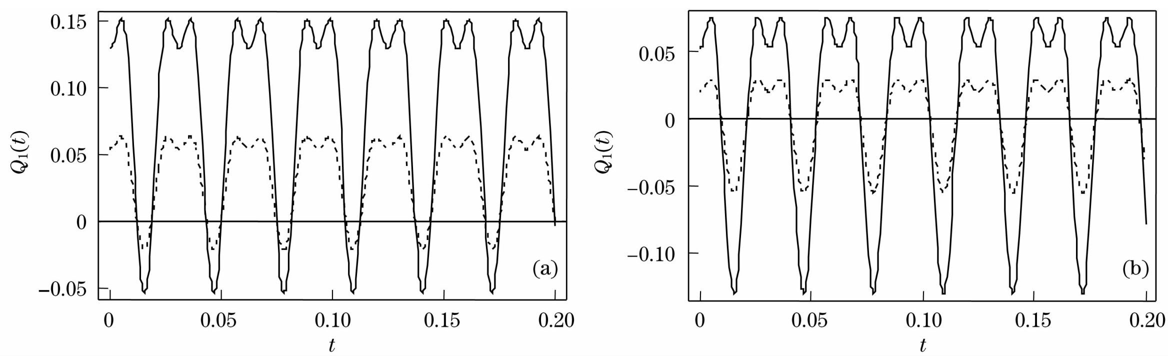

图 4　当 $g'=0.2$，$\Omega=0.02$，$\xi=0.2$，$q=10$(实线) $q=5$(虚线)，(a) $\varphi=0$，(b) $\varphi=\pi$ 时，Q_1 随时间的演化曲线

Fig. 4　Time evolution of Q_1 with $g'=0.2$, $\Omega=0.02$, $\xi=0.2$, $q=10$ (real line) $q=5$ (broken line), (a) $\varphi=0$, (b) $\varphi=\pi$

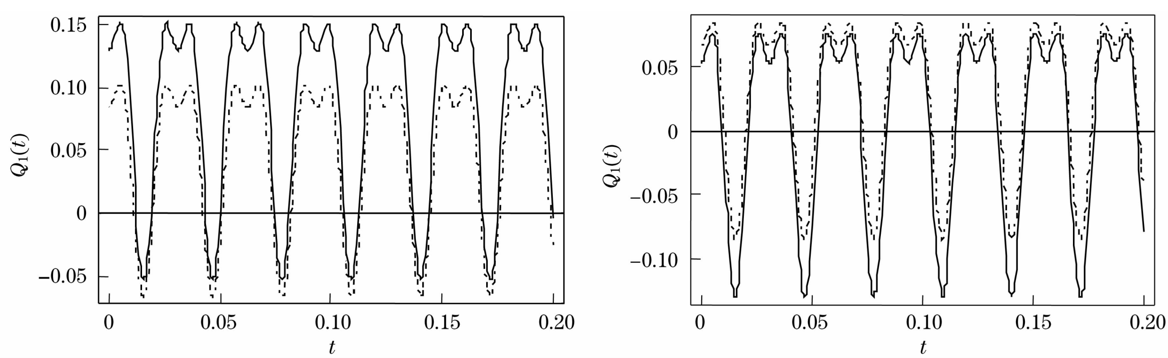

图 5　当 $g'=0.8$，$\Omega=0.01$，$\xi=0.2$(实线)，$\xi=0.05$(虚线)，$q=10$，(a) $\varphi=0$，(b) $\varphi=\pi$ 时，Q_1 随时间的演化曲线

Fig. 5　Time evolution of Q_1 with $g'=0.8$, $\Omega=0.01$, $\xi=0.2$ (real line), $\xi=0.05$ (broken line), $q=10$, (a) $\varphi=0$, (b) $\varphi=\pi$

关系具有对称性，所以只计算了场与原子参数不同时 Q_1 随时间的演化曲线如图 1～图 5 所示。由图 1～图 5 可见 Q_1 在光场和原子的各个参数取不同的值时，均表现出周期性被压缩的性质；由图 1(a)和图 1(b)比较可得，当原子与光场的耦合系数变小时，光场压缩深度基本没有变化，Q_1 随时间的演化周期明显增大。由图 2 看出原子间相互作用对光场压缩深度和周期均有影响，在不考虑相互作用时，如虚线表示，开始短时间内压缩深度较浅，但随时间逐渐加深；在考虑原子间相互作用时，压缩周期变短，短时间内，光场压缩周期性变化，长时间的变化如图 3所示，呈现典型的量子崩塌与复苏现象。图 4 反映了光场模间的光子数之差 q 和光场参数 ξ 的幅角 φ 不同时，Q_1 随时间的演化情况，当光场的模间光子数发生变化时，光场的压缩周期不变，模间光子数之差变大时，光场的压缩深度变深。由图 5 看出

光场参数 ξ 对光场压缩周期没有影响，对压缩深度的影响取决于它的幅角，当 $\varphi=0$ 时，ξ 变大压缩深度变深，当 $\varphi=\pi$ 时，ξ 变大压缩深度变浅。由图 4、图 5均可以看出当 $\varphi=0$，变到 $\varphi=\pi$ 时，光场的压缩深度均有不同程度的加深。由此看出，可以通过调节光场参数 ξ 的相位来调节光场的压缩深度。

4 结 论

运用全量子理论，在旋波近似和 Bogoliubov 近似下，考虑原子间的相互作用，给出了 V-型三能级原子 BEC 与双模 SU(1,1) 相干态光场相互作用系统的哈密顿量，求解了系统的海森堡方程，进一步分析了光场与原子的耦合系数、原子间的相互作用以及光场参数对双膜光场与原子 BEC 相互作用系统中光场正交压缩特性的影响。结果表明，在与原子 BEC 相互作用过程中，光场的两个正交分量均被周期性压缩，光场与原子的耦合系数增大时对压缩深度几乎没有影响，但使其周期缩短；原子间的相互作用，使光场正交分量周期变短，压缩深度加深；光场参数的变化不影响光场压缩的周期，对压缩深度有一定的影响。

参 考 文 献

1 Anderson M. H., Enscher J. R., Methews M. R. *et al.*. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor[J]. *Science*, 1995, **269**: 198～201

2 Davis K. B., Mewes M. O., Anderson M. R. *et al.*. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**: 3969～3973

3 Bradley C. C., Sacket C. A., Tollent J. J. *et al.*. Evidence of Bose-Einstein condensation in an gas with attractive interfactions [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**: 1687～1691

4 Ji A. C., Xie X. C., Liu W. M. Quantum magnetic dynamics of polarized light in arrays of microcavities[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **99**, 183602

5 Zhang J. M., Liu W. M., Zhou D. L. Cavity QED with cold atoms trapped in a double-well potential[J]. *Phys. Rev. A*, 2008, **77**, 033620

6 You L., Lewenstein M., Cooper J. Quantum field theory of atoms interacting with photons. II. Scattering of short laser pulses from trapped bosonic atoms[J]. *Phys. Rev. A*, 1995, **51**: 4712～4727

7 Sun C. P., Zhan H., Miao Y. X. *et al.*. On the quantum dynamic theory of the MIT output coupler for the bose-einstein condensation[J]. *Commun. Theor. Phys.*, 1998, **29**: 161～166

8 Jing H., Chen J. L., Ge M. L. Quantum-dynamical theory for squeezing the output of a Bose-Einstein condensate[J]. *Phys. Rev. A*, 2001, **63**: 015601

9 Jing Hui, Ge Melin. Emergency light adjust and control on quantum coherence of atomic lasers[J]. *Sci. Chin. Ser. A*, 2001, **31**: 725～729
景 辉，葛墨林. 原子激光量子相干性的强光调控[J]. 中国科学(A 辑)，2001，**31**：725～729

10 Ji A. C., Liu W. M., Song J. L. *et al.*. Dynamical creation of fractionalized vortices and vortex lattices[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 101, 010402～1

11 Kuang L. M., Ouyang Z. W.. Macroscopic quantum self-trapping and atomic tunneling in two-species Bose-Einstein condensates[J]. *Phys. Rev. A*, 2000, **61**: 023604～1

12 Xia Qingfeng, Zhou Yuxin, Gao Yunfeng. Cavity-field spectra of two coupled atoms interacting with two-mode radiation field in binomial state[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(12): 2250～2255
夏庆峰，周玉欣，高云峰. 两耦合原子与双模二项式光场相互作用系统的腔场谱[J]. 光学学报，2007，**27**(12)：2250～2255

13 Zhou Ming, Huang Chunji. Squeezing properties of two-mode squeezed field interacting with Bose-Einstein condensate of V-type three-level atoms[J]. *Acta Physica Sinica*,. 2002, **51**(11): 2514～2516
周 明，黄春佳. V 型三能级原子玻色-爱因斯坦凝聚体与双模压缩光场相互作用系统中光场的压缩特性[J]. 物理学报，2002，**51**(11)：2514～2516

14 Wang Guiping, Ji Weibang, Ma Jie *et al.*. Measurement on collisional loss rate coefficient of cesium cold atoms in a magneto-optical trap[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(2): 221～224
王贵平，冀炜邦，马 杰 等. 磁光阱中铯冷原子碰撞损失率系数的测量[J]. 中国激光，2008，**35**(2)：221～224

15 Hong Li, D. N. Wang. Effects of external magnetic trap on two dark solitons of a two-component Bose-Einstein condensate[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2008, **6**(8): 611～614

16 Zhou Yuxin, Xia Qingfeng, Sun Changyong. Influence of the interactiong between atoms on the squeezing properties of V-type three-level atomic lasers[J]. *J. At. Mol. Phys.*, 2008, **25**(3): 633～637
周玉新，夏庆峰，孙长勇. 原子间相互作用对 V-型三能级原子激光压缩性质的影响[J]. 原子与分子物理学报，2008，**25**(3)：633～637

17 J. M. Zhang, W. M. Liu, Zhou D. L. Mean-field dynamics of a Bose Josephson junction in an optical cavity[J]. *Phys. Rev. A*, 2008, **78**: 043618～1

18 Wen Linghua, Wang Jisuo, Feng Jian *et al.*. Dynamics of Bose-Einstein-condensed vortex-antivortex superposed states in a two-dimensional infinite-depth square well[J]. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 2008, **41**: 135301

19 Lu Junfa, Ji Xianming, Zhou Qi *et al.*. A novel controllable four-well optical trap for cold atoms or molecules and its two-dimensional optical lattices[J]. *Acta Optica Sinica.*, 2008, **28**(2): 211～218
陆俊发，纪宪明，周 琦 等. 一种新颖的实现冷原子或冷分子囚禁的可控制光学四阱及其二维光学晶格[J]. 光学学报，2008，**28**(2)：211～218

20 Bogoliubov N. N. On the theory of superfluidity[J]. *J. Phys. (USSR)*, 1947, **11**: 23～32