

平面波在各向异性晶体中的菲涅耳公式

温 静 左春英

(黑龙江八一农垦大学文理学院, 黑龙江 大庆 163319)

摘要 当各向异性晶体介电主轴坐标系与入射光波所在平面坐标系取向不同时,讨论折射光波场强 E 的问题变得比较复杂,但是这种情形对于许多双轴晶体的非线性光学现象具有重要影响。在上述两坐标系任意取向的前提下,讨论了平面波从各向同性介质入射到各向异性晶体后,其折射光波电场强度 E 的大小和方向的一般表达式,证明了折射光波电场强度的方向和大小可以通过求解一元四次方程和电磁场边界条件而得到。对于一些特殊的入射光波方向和具有特殊对称性的晶体,折射光波电场强度 E 的方向与光波法线方向垂直,也就此特殊情况进行了讨论。利用所得结果,可以讨论两束折射光波能量的分配关系。

关键词 平面波; 各向异性晶体; 菲涅耳公式; 双折射

中图分类号 O734+.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20092907.2000

Fresnel Formula of Plane Wave in Anisotropic Crystals

Wen Jing Zuo Chunying

(Department of Arts and Science, Heilongjiang August First Land Reclamation University,
Daqing, Heilongjiang 163319, China)

Abstract When the principal dielectric axes of the anisotropic crystals and the axes built for describing the direction of incident lightwave are different, discussing about the electric field E of the refracted light wave becomes a complex problem. But it is important for some phenomena of nonlinear optics in biaxial crystals. After a plane wave propagating from an isotropic medium into an anisotropic crystal without any restriction on the orientation of the axes above, general expressions about the direction and amplitude of the refracted light wave's electric field E are given. The result proves that E can be got by solving a quartic equation and using the boundary condition of electromagnetic field. When the incident light wave takes some special direction or propagate into some symmetrical crystals, the E of the refracted light wave is perpendicular to the direction of the unit wave normal. That is a special case and also be discussed. The results can be used to discuss the distribution of energy between the two refracted light waves.

Key words plane wave; anisotropic crystals; Fresnel formula; birefringence

1 引 言

由于各向异性晶体的奇特光学现象,特别是其非线性光学现象的发展,使得对它的研究迅速增多^[1~4]。在通常应用中,都假定入射光波为正入射或在介电主轴坐标平面内入射,忽略了入射光波方向偏离介电主轴坐标平面的斜入射情况,然而这种情况对于许多非线性光学现象如倍频等会产生很大的影响^[5~6]。另外,不同方向的入射光波在各向异性晶体表面折射时对于许多非线性多波耦合的能量转换效率也会产生很大的影响。因此,深入研究光波在各向异性晶体表面的折射问

题在理论和实践上都具有重要意义。光波在单轴晶体表面反射折射时,其场强方向与振幅的变化情况已有很多作者作了讨论^[7~9];对于在双轴晶体中的情形,也已作了大量讨论^[10~12],但或者是限定了入射光波方向和光轴取向或者是认为对任意取向难以给出解析表达式。

本文从晶体内介电主轴坐标系与入射光波所在平面坐标系任意取向的一般情况下,讨论了平面波从各向同性介质入射到各向异性晶体后,其折射光波与反射光波场强 E 的方向及振幅的大小。利用所得结果,可以讨论两束折射光波能

收稿日期: 2008-10-09; 收到修改稿日期: 2008-11-27

作者简介: 温 静(1980—),男,助教,硕士,主要从事量子光学与量子信息的研究。E-mail: wenj3008@126.com

量的分配关系。在各向异性晶体中,折射光波场强方向与波法线方向一般并不垂直。利用上述条件,本文证明了折射光波法线方向和场强振幅可以通过求解一元四次方程和电磁场边界条件得到普遍表达式。对于一些特殊的入射光波方向和具有特殊对称性的晶体(如单轴晶体),折射光波场强方向与光波法线方向垂直,就此特殊情况也进行了讨论。

2 晶体介电主轴坐标系与入射光波所在平面坐标系之间的变换

设晶体内介电主轴坐标系为 $\{xyz\}$,入射光波所在平面坐标系为 $\{XYZ\}$ 。为了与实际问题相联系, $\{xyz\}$ 坐标系的方向按照 $\epsilon_{rx} < \epsilon_{ry} < \epsilon_{rz}$ 的条件来

选择,其中 $\epsilon_{rx}, \epsilon_{ry}, \epsilon_{rz}$ 表示晶体相对主介电常数,同时定义相应的主传播速度为 $v_x = c/\sqrt{\epsilon_{rx}}, v_y = c/\sqrt{\epsilon_{ry}}, v_z = c/\sqrt{\epsilon_{rz}}$ 。可以证明在此种情况下^[13],晶体光轴位于 xz 组成的平面,其与 z 轴的夹角 φ 满足

$$\tan \varphi = \pm \sqrt{\frac{v_x^2 - v_y^2}{v_y^2 - v_z^2}}。 \{XYZ\} \text{ 坐标系的 } Z \text{ 轴}$$

选择为垂直于晶体表面, XY 组成的平面与晶体表面重合,入射面为 ZX 组成的平面。设两坐标系各坐标轴方向满足如下变换:(1)将 $\{XYZ\}$ 首先沿 Z 轴旋转角度 $\alpha(0 \leq \alpha < 2\pi)$ 得到 $\{X^1Y^1Z^1\}$;(2)沿 Y^1 轴旋转角度 $\beta(0 \leq \beta < \pi)$ 得到 $\{X^2Y^2Z^2\}$;(3)沿 Z^2 轴旋转角度 $\gamma(0 \leq \gamma < 2\pi)$ 得到 $\{xyz\}$ 。用这三个欧拉角表示的两坐标系单位矢量变换满足如下关系^[14]:

$$\{xyz\} = \{XYZ\} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\{xyz\} \mathbf{R} = \{XYZ\},$$

$$\mathbf{R} = \{R_{ij}\} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中 R_{ij} 称为坐标变换矩阵元。

3 折射光波的方向

设入射光波沿如图 1 方向从各向同性(光学)介质入射至各向异性(光学)晶体表面,其与 Z 轴夹角为 θ_0 ,入射光波法线方向为 s_i ,入射光波平行和垂直入射面的场强分量分别为 $E_{\perp}^i [(n_0 s_i \cdot \mathbf{r}/c - t)\omega]$ 和 $E_{\parallel}^i [(n_0 s_i \cdot \mathbf{r}/c - t)\omega]$,反射光波平行和垂直入射面的场强分量分别为 $E_{\perp}^r [(n_0 s_r \cdot \mathbf{r}/c - t)\omega]$ 和 $E_{\parallel}^r [(n_0 s_r \cdot \mathbf{r}/c - t)\omega]$,折射光波一般会有两束,将其场强矢量分别表示为 $\mathbf{E}_1 [(n_1 s_1 \cdot \mathbf{r}/c - t)\omega]$ 和 $\mathbf{E}_2 [(n_2 s_2 \cdot \mathbf{r}/c - t)\omega]$ 。以上各式中 n_0, n_1, n_2 分别表示各向同性(光学)介质和两束折射光波的折射率, s_i, s_r, s_1, s_2 分别表示入射光波,反射光波与两束折射光波的波法线方向, c 与 ω 分别表示真空中光速与入射光波角频率。电磁场在两介质界面的连续性条件要求如下关系成立^[13]:

$$(n_0 s_i/c - n_0 s_r/c) \parallel (n_0 s_i/c - n_k s_k/c) \parallel Z \text{ 轴} \quad (k = 1, 2), \quad (3)$$

本文所讨论的介质中,麦克斯韦方程与物质方

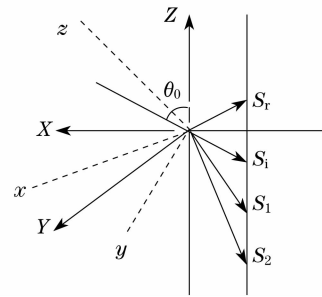


图 1 光传播方向示意图

程可以写为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t, \\ \nabla \times \mathbf{E} = \partial \mathbf{B} / \partial t, \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \\ D_k = \epsilon_0 \epsilon_{rk} E_k (k = x, y, z), \end{cases} \quad (4)$$

其中 D_k, E_k 分别表示在介电主轴坐标系 $\{xyz\}$ 下折射光波电位移矢量和电场强度矢量沿主轴方向的分量,这里忽略了区别两束折射光波的场矢量上角标 1 和 2,不加区别的情况都同时表示两束折射光波。

将各场矢量的平面波条件代入(4)式,可以得到折射光波场矢量满足

$$\begin{cases} \mathbf{D} = n^2[\mathbf{E} - \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})]/c^2\mu_0, \\ (n^2 - \epsilon_{rk})E_k = n^2s_k(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}). \end{cases} \quad (5)$$

令 $v_s = c/n$ 表示折射光波在晶体中的相速度, 当 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{s} \neq 0$ 时, 可以利用第 2 节定义的晶体主传播速

度 v_x, v_y, v_z 和相速度 v_s 通过(5)式将 E_k 表示为

$$E_k = v_k^2 s_k (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) / (v_k^2 - v_s^2) = T_k (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}), \quad (6)$$

其中 $T_k = v_k^2 s_k / (v_k^2 - v_s^2)$ ($k=x, y, z$)。

同时利用(6)式可以得到菲涅耳方程为

$$(v_s^2 - v_y^2)(v_s^2 - v_z^2)s_x^2 + (v_s^2 - v_x^2)(v_s^2 - v_z^2)s_y^2 + (v_s^2 - v_x^2)(v_s^2 - v_y^2)s_z^2 = 0,$$

将其两边都除以 v_s^6 得到变形后的菲涅耳方程为

$$(1 - r^2 v_y^2)(1 - r^2 v_z^2)x^2 + (1 - r^2 v_x^2)(1 - r^2 v_z^2)y^2 + (1 - r^2 v_y^2)(1 - r^2 v_x^2)z^2 = 0, \quad (7)$$

其中 $r=1/v_s$ 表示折射光波相速度的倒数, $x=rs_x, y=rs_y, z=rs_z$ 分别表示在 $\{xyz\}$ 坐标系下沿折射光波法线方向 (s_x, s_y, s_z) , 大小为相速度的倒数 $1/v_s$ 的矢量的三个分量。

为了得到折射光波的方向, 由(3)式和(7)式可以建立如下方程组:

$$\begin{cases} (1 - r^2 v_y^2)(1 - r^2 v_z^2)x^2 + (1 - r^2 v_x^2)(1 - r^2 v_z^2)y^2 + (1 - r^2 v_y^2)(1 - r^2 v_x^2)z^2 = 0, \\ X = -\sin \theta_0 n_0 / c, \quad R_{11}x + R_{21}y + R_{31}z = -\sin \theta_0 n_0 / c, \\ Y = 0, \quad R_{12}x + R_{22}y + R_{32}z = 0, \\ r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2, \end{cases} \quad (8)$$

上式第二、三分式是同一方程分别在两坐标系下的表示式。化简该方程组得到如下形式:

$$\begin{cases} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \\ y = m_y x + n_y, \\ z = m_z x + n_z, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad m_y &= (R_{12}R_{31} - R_{11}R_{32}) / (R_{21}R_{32} - R_{22}R_{31}), \quad n_y = -\sin \theta_0 n_0 R_{32} / c (R_{21}R_{32} - R_{22}R_{31}), \\ m_z &= (R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}) / (R_{21}R_{32} - R_{22}R_{31}), \quad n_z = \sin \theta_0 n_0 R_{22} / c (R_{21}R_{32} - R_{22}R_{31}), \end{aligned} \quad (10)$$

上式在 $R_{21}R_{32} - R_{22}R_{31} \neq 0$ 时成立,

$$\begin{aligned} a &= (m_z^2 + m_y^2 m_y^2 + m_z^4)v_x^2 v_y^2 + (m_y^2 + m_z^4 + m_y^2 m_z^2)v_x^2 v_z^2 + (1 + m_y^2 + m_z^2)v_y^2 v_z^2, \\ b &= (2m_y m_z^2 n_y + 2m_z n_z + 2m_y^2 m_z n_z + 4m_z^3 n_z)v_x^2 v_y^2 + (2m_y n_y + 4m_z^3 n_y + 2m_y m_z^2 n_y + \\ &\quad 2m_y^2 m_z n_z)v_x^2 v_z^2 + (2m_y n_y + 2m_z n_z)v_y^2 v_z^2, \\ c &= (-m_y^2 - m_z^2)v_x^2 + (-1 - m_z^2)v_y^2 + (-1 - m_y^2)v_z^2 + (m_z^2 n_y^2 + 4m_y n_y m_z n_z + n_z^2 + \\ &\quad n_z^2 m_y^2 + 6m_z^2 n_z^2)v_x^2 v_y^2 + (n_y^2 + 6n_y^2 m_y^2 + m_z^2 n_y^2 + 4m_y n_y m_z n_z + n_z^2 m_y^2)v_x^2 v_z^2 + (n_z^2 + n_y^2)v_y^2 v_z^2, \\ d &= (-2m_y n_y - 2m_z n_z)v_x^2 - 2m_z n_z v_y^2 - 2m_y n_y v_z^2 + (2m_z n_z n_y^2 + 2m_y n_y n_z^2 + 4m_z n_z^3)v_x^2 v_y^2 + \\ &\quad (4m_y n_y^3 + 2m_z n_z n_y^2 + 2m_y n_y n_z^2)v_x^2 v_z^2, \\ e &= 1 + (-n_y^2 - n_z^2)v_x^2 - n_z^2 v_y^2 - n_y^2 v_z^2 + (n_z^2 n_y^2 + n_z^4)v_x^2 v_y^2 + (n_z^2 n_y^2 + n_y^4)v_x^2 v_z^2. \end{aligned} \quad (11)$$

一元四次方程的通解形式比较复杂, 但给定各参数后求解并不困难。求解上述方程可以得到由各系数表示的四个通解, 都为实数解。从方程中的各系数可以看出, 当晶体介电主轴和入射光波所在平面坐标系取定后, 坐标变换矩阵元 R_{ij} 变为常数, 同时对于给定晶体, 主传播速度 v_x, v_y, v_z 也作为已知量出现在方程各系数中, 此时系数 a, b, c, d, e 将只是光波入射角 θ_0 的函数, 一元四次方程的解也将只是 θ_0 的函数。对于具体物理情况, 可以给定 $v_x, v_y, v_z, m_y, n_y, m_z, n_z$ 的具体数值代入(9)~(11)式求解得到这四个实数解。四个解中只有两个是符合物理条件的解, 可以利用 $Z=R_{13}x+R_{23}y+R_{33}z < 0$ 的条

件来选择两个符合物理要求的解。设其为 x_1, x_2 , 将其代入(9)式得到 r 的两个值 $r_1(x_1), r_2(x_2)$, 也即得到了两束折射光波相速度 v_{s_1} 和 v_{s_2} 的大小和相应的折射率 n_1, n_2 以及对应的两条折射光波法线方向 $\mathbf{s}_1 = \{x_1/r_1, y_1/r_1, z_1/r_1\}$ 和 $\mathbf{s}_2 = \{x_2/r_2, y_2/r_2, z_2/r_2\}$ 。将上述结果代入(6)式可以得到对应每条波法线方向的场强振动方向。

4 折射光波与反射光波场强振幅的大小与方向

上面的计算只得到了折射光波场强的振动方向。由(6)式可知 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}$ 仍然未知, 下面来计算该式的大小。

利用电磁场的边界条件以及麦克斯韦方程和物质方程,可以建立入射光波,反射光波及折射光波场强振幅所满足的方程组:

$$\begin{cases} E_{\perp}^i + E_{\perp}^r = E_{\perp}^t + E_{\perp}^s, \\ E_{//}^i \cos \theta_0 - E_{//}^r \cos \theta_0 = E_{//}^t + E_{//}^s, \\ n_0 E_{\perp}^i \cos \theta_0 - n_0 E_{\perp}^r \cos \theta_0 = n_1 (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{E}^t)_X + n_2 (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{E}^t)_X, \\ -n_0 E_{//}^i - n_0 E_{//}^r = n_1 (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{E}^t)_Y + n_2 (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{E}^t)_Y. \end{cases} \quad (12)$$

上式各场分量的方向如图 2 所示,其中场矢量的定义与第 3 节相同。由于前面求解得到的折射光波场强方向与波法线方向都是在 $\{xyz\}$ 坐标系下的分量,为求解上式需将其转换到 $\{XYZ\}$ 坐标系下。在 $\mathbf{E}^i \cdot \mathbf{s}_i \neq 0 (i=1,2)$ 的条件下,利用变换矩阵(2)式和(6)式,(12)式变为

$$\begin{cases} E_{\perp}^i + E_{\perp}^r = a_1 (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{E}^t) + a_2 (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{E}^t), \\ E_{//}^i - E_{//}^r = b_1 (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{E}^t) + b_2 (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{E}^t), \\ E_{\perp}^i - E_{\perp}^r = c_1 (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{E}^t) + c_2 (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{E}^t), \\ E_{//}^i + E_{//}^r = d_1 (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{E}^t) + d_2 (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{E}^t), \end{cases} \quad (13)$$

其中 $a_1 = \sum_{k=1}^3 T_k^1 R_{k2}$, $a_2 = \sum_{k=1}^3 T_k^2 R_{k2}$ 分别表示在 $\{xyz\}$ 系下两折射光波电场强度变换至 $\{XYZ\}$ 系下沿 Y 轴分量的系数变换, $T_k^i (i=1,2)$ 的定义与(6)式相同,上角标表示 1,2 两束折射光波, $R_{k2} (k=1,2,3)$ 为

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{E}^t = E_{//}^i (-2a_2 - 2c_2)/M + E_{\perp}^i (2b_2 + 2d_2)/M, \\ \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{E}^t = E_{//}^i (2a_1 + 2c_1)/M + E_{\perp}^i (-2b_1 - 2d_1)/M, \\ E_{\perp}^r = E_{//}^i (2a_2 c_1 - 2a_1 c_2)/M + E_{\perp}^i (-a_2 b_1 + a_1 b_2 - b_2 c_1 + c_2 b_1 - a_2 d_1 + c_2 d_1 + a_1 d_2 - d_2 c_1)/M, \\ E_{//}^r = E_{//}^i (a_2 b_1 - a_1 b_2 - b_2 c_1 + c_2 b_1 - a_2 d_1 - c_2 d_1 + a_1 d_2 + d_2 c_1)/M + E_{\perp}^i (2d_1 b_2 - 2d_2 b_1)/M, \end{cases} \quad (14)$$

其中 $M = -a_2 b_1 + a_1 b_2 + b_2 c_1 - c_2 b_1 - a_2 d_1 - c_2 d_1 + a_1 d_2 + d_2 c_1$ 。将上式的前两式代入(6)式即得到折射光波的场强大小与方向。此即为在各向异性(光学)晶体中折射光波与反射光波场强振幅所服从的菲涅耳公式。在许多非线性光学现象的实际应用中,经常要考虑双折射光波的能量分配问题,利用上述结果可以对其进行定量讨论。

5 折射光波的能量分配

通过前面的讨论,在给定介电主轴坐标系和入射光波所在平面坐标系的欧拉角 α, β, γ 以及晶体的主传播速度 v_x, v_y, v_z 后,可以得到两折射光波场强的方向和大小都表为光波入射角 θ_0 的函数。平面波在各向异性(光学)晶体中传播时,其折射光波的

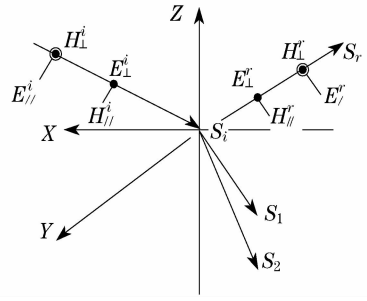


图 2 光振动方向示意图

Fig. 2 Sketch map of the vibration direction
为变换矩阵的第二列矩阵元,以下各系数意义与上类同; $b_1 = \sum_{k=1}^3 T_k^1 R_{k1} / \cos \theta_0$, $b_2 = \sum_{k=1}^3 T_k^2 R_{k1} / \cos \theta_0$ 分别表示在 $\{xyz\}$ 系下两折射光波电场强度变换至 $\{XYZ\}$ 系下沿 X 轴分量的系数变换; $c_1 = \sum_{k=1}^3 n_1 (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{T}^1)_k R_{k1} / n_0 \cos \theta_0$, $c_2 = \sum_{k=1}^3 n_2 \cdot (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{T}^2)_k R_{k1} / n_0 \cos \theta_0$ 分别表示在 $\{xyz\}$ 系下两折射光波磁场强度变换至 $\{XYZ\}$ 系下沿 X 轴分量的系数变换; $d_1 = -\sum_{k=1}^3 n_1 (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{T}^1)_k R_{k2} / n_0$, $d_2 = -\sum_{k=1}^3 n_2 \cdot (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{T}^2)_k R_{k2} / n_0$ 分别表示在 $\{xyz\}$ 系下两折射光波磁场强度变换至 $\{XYZ\}$ 系下沿 Y 轴分量的系数变换。求解上述方程组得到

坡印廷矢量 \mathbf{S} 的时间平均大小可以表达为^[13]

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n |E|^2 \cos \phi, \quad (15)$$

其中 ϕ 表示折射光波法线方向与坡印廷矢量 \mathbf{S} 间的夹角。若求得折射光波的场强 \mathbf{E} 即可得到 \mathbf{S} 的大小。从(14)式的前两式可以看出折射光波场强的大小将按不同的比例分配到入射光波场强的垂直与水平分量,其比例系数从前述结果可以看出是坐标变换矩阵元 R_{ij} , 晶体主传播速度 $v_k (k=x, y, z)$ 和光波入射角 θ_0 的函数,当 R_{ij} 和 $v_k (k=x, y, z)$ 取定后,可以利用上述结果代入(15)式得到 $S(\theta_0)$ 的表达式。实际应用中两束折射光波能流密度相同的情况比较重要,此时利用 $S_1(\theta_0) = S_2(\theta_0)$ 的条件可以解得

所需要提供的入射角 θ_0 的大小,这在非线性光学中的倍频与多波耦合作用中具有重要应用。当取定一些特殊入射面时,折射光波场强有时会只分配到入射光波的某一分量值。此时一般 $\phi=0$,即折射光波法线方向与 \mathbf{S} 同向。下面就此特殊情况进行讨论。

6 特殊的人射面坐标系

前面从一般的情况讨论了平面波从各向同性介质入射到各向异性晶体后折射光波的场强。在实际应用中,经常会遇到一些特殊的入射光波方向或者具有特殊对称性的晶体。下面分别讨论两种情况。

1) $\mathbf{E}^1 \cdot \mathbf{s}_1 = 0, \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{s}_2 \neq 0$

可以证明,此种情况对应于折射光波恰好处于晶体某一介电主平面内(即两介电主轴组成的平面),但该面不一定与入射面重合,对于单轴晶体它总是成立的。这里假设 \mathbf{s}_1 处于 $\{xz\}$ 平面内,可以证明此时场强必满足 $\mathbf{E}^1 // y$ 轴,利用此条件(12)式简化为

$$\begin{cases} E_{\perp}^i + E_{\perp}^r = R_{22}E^1 + a_2(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{E}^2), \\ E_{//}^i - E_{//}^r = R_{21}E^1 + b_2(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{E}^2), \\ E_{\perp}^i - E_{\perp}^r = c_1E^1 + c_2(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{E}^2), \\ E_{//}^i + E_{//}^r = d_1E^1 + d_2(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{E}^2), \end{cases} \quad (16)$$

其中 a_2, b_2, c_2, d_2 的表示和意义与(13)式相同, $c_1 = n_1(-s_{13}R_{11} + s_{11}R_{31})/n_0 \cos \theta_0$, $d_1 = -n_1(-s_{13}R_{12} + s_{11}R_{32})/n_0$ 。为了方便讨论结果,考虑入射面 XZ 与 xz 共面且 $Y // y$ 的情况。设 $\{xyz\}$ 是由 $\{XYZ\}$ 沿 Y 轴旋转 $\theta \neq 0$ 角度得到,此时式(2)式中的三个欧拉角为 $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \theta, 0)$ 。可以证明此时两折射光波对应的场强方向必一个与 y 轴平行,一个位于 xz 平面内,此时(8)式简化为

$$\begin{cases} (1 - r^2 v_y^2)[(1 - r^2 v_z^2)x^2 + (1 - r^2 v_x^2)z^2] = 0, \\ Y = y = 0, \\ z = m_z x + n_z, \\ r^2 = x^2 + z^2, \end{cases} \quad (17)$$

其中 $m_z = -\cos \theta / \sin \theta$, $n_z = -n_0 \sin \theta_0 / c \sin \theta$ 。解方程组(17)式可以得到 x 的四个实数解如下:

$$\begin{cases} x_{1\pm} = (-v_y^2 m_z n_z \pm \sqrt{v_y^2 + v_y^2 m_z^2 - n_z^2 v_y^4}) / (v_y^2 m_z^2 + v_y^2), \\ x_{2\pm} = [-v_x^2 m_z n_z \pm \sqrt{v_x^2 + v_x^2 m_z^2 - v_z^2 v_x^2 n_z^2}] / (v_x^2 + v_x^2 m_z^2). \end{cases} \quad (18)$$

利用 $Z = -x \sin \theta + z \cos \theta < 0$ 来判断两个符合物理要求的解,将 m_z, n_z 的值代入上式得到

$$\begin{cases} x_1 = k \cos \theta + \sin \theta \sqrt{1 - (k v_y)^2}, \\ z_1 = k \sin \theta - \cos \theta \sqrt{1 - (k v_y)^2}, \\ x_2 = \frac{k v_x^2 \cos \theta + \sqrt{v_x^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + v_z^2 \sin^4 \theta - k^2 v_x^2 v_z^2 \sin^2 \theta}}{v_x^2 \cos^2 \theta + v_z^2 \sin^2 \theta}, \\ z_2 = \frac{k v_z^2 \sin^2 \theta - \cos \theta \sqrt{v_x^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + v_z^2 \sin^4 \theta - k^2 v_x^2 v_z^2 \sin^2 \theta}}{(v_x^2 \cos^2 \theta + v_z^2 \sin^2 \theta) \sin \theta}, \end{cases} \quad (19)$$

其中 $k = -n_0 \sin \theta_0 / c$ 。将其代入(17)式得到 r 的两个值 $r_1(x_1), r_2(x_2)$ 以及对应的两条折射光波法线方向 $\mathbf{s}_1 = \{x_1/r_1, 0, z_1/r_1\}$ 和 $\mathbf{s}_2 = \{x_2/r_2, 0, z_2/r_2\}$ 。

利用前述条件(16)式简化为

$$\begin{cases} E_{\perp}^i + E_{\perp}^r = E^1, \\ E_{//}^i - E_{//}^r = b_2 E^2 \cos \theta_2 / \cos \theta_0, \\ E_{\perp}^i - E_{\perp}^r = n_1 E^1 \cos \theta_1 / n_0 \cos \theta_0, \\ E_{//}^i + E_{//}^r = n_2 E^2 \sin \theta_2 / n_0, \end{cases} \quad (20)$$

其中 $\cos \theta_1 = |-s_{11} \sin \theta + s_{13} \cos \theta|$ 表示 \mathbf{s}_1 与 Z 轴夹角的余弦, $\cos \theta_2 = 1 / \sqrt{[T_1^2]^2 + [T_3^2]^2}$, 表示 \mathbf{E}^2 与 \mathbf{s}_2 夹角的余弦,其中的定义与(6)式同,上角标 2 表示第 2 束折射光波, $b_2 = T_1^2 \cos \theta + T_3^2 \sin \theta$ 。求解上式得到

$$\begin{cases} E_{\perp}^i = E_{\perp}^i (n_0 \cos \theta_0 - n_1 \cos \theta_1) / (n_0 \cos \theta_0 + n_1 \cos \theta_1), \\ E_{//}^i = E_{//}^i (n_2 \sin \theta_2 \cos \theta_0 - b_2 n_0 \cos \theta_2) / (n_2 \sin \theta_2 \cos \theta_0 + b_2 n_0 \cos \theta_2), \\ E^1 = E_{\perp}^i (2n_0 \cos \theta_0) / (n_0 \cos \theta_0 + n_1 \cos \theta_1), \\ E^2 = E_{//}^i (2n_0 \cos \theta_0) / (n_2 \sin \theta_2 \cos \theta_0 + b_2 n_0 \cos \theta_2). \end{cases} \quad (21)$$

从上式可以看出,两束折射光波场强所分配到的恰巧是入射光波场强的某分量,这与前述两坐标系取向任意的情况不同。

$$2) \mathbf{E}^1 \cdot \mathbf{s}_1 = 0, \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{s}_2 = 0$$

此种情况对应于晶体光轴沿 y 轴的单轴晶体,此时两坐标系重合。(20)式中的 $b_2 = 1, \sin \theta_2 = 1, \cos \theta_2$ 表示 s_2 与 Z 轴的夹角。求解(20)式即可得到各振幅的表达式,它与菲涅耳公式类似,只是折射光波为两束偏振光波,并且其对应的折射角度也不同。当上式取 $\theta_1 = \theta_2$ 时,即对应于各向同性介质中的情况,得到与菲涅耳公式相同的表达式。

7 结 论

了解光在各向同性介质与各向异性(光学)晶体界面发生折射和反射后各光波场强振幅的大小和方向的变化对于光学的实际应用具有重要的指导意义。许多光电器件都需要考虑其折射光波与反射光波的场强性质^[15]。本文对在各向异性晶体中传播的折射光波的振幅与方向做了一般性讨论,所得到的结论适用于各种入射面与晶体介电主轴任意取向的情况。结果表明反射光波与折射光波的场强振幅与方向是入射角 θ_0 , 坐标变换矩阵元 R_j 和晶体主传播速度的解析函数。利用所得结果,可以讨论两折射光波能量的分配问题。

参 考 文 献

- Zhang Juan, Liu Liren, Zhang Yu *et al.*. Flattening optimization of special transmittance for birefringent filter [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(4):426~430
张娟,刘立人,张煜等. 双折射滤波器光谱透射率函数的平坦优化计算[J]. 光学学报, 2003, **23**(4):426~430
- Cheng Guanghua, Wang Yishan, Yu Lianjun *et al.*. The function of a Brewster angle positioned birefringent filter in improvement of intracavity frequency doubling [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(2):284~288
程光华,王屹山,于连君等. 布氏角放置的双折射滤光片在腔内倍频中的作用[J]. 光学学报, 2004, **24**(2):284~288
- Liang Zhixia, Li Guohua, Shao weidong *et al.*. Study of the optimal thickness ratio of the birefringent filter [J]. *Chin. J. Lasers*, 2000, **27**(7):601~605
梁志霞,李国华,邵卫东等. 双折射滤光片最佳厚度比的研究[J]. 中国激光, 2000, **27**(7):601~605
- Yan Guojun, Chen Guangde, Wu Yeleng *et al.*. Second-harmonic power generated in the absorbing and birefringent nonlinear medium [J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, **57**(1):265~270

- 颜国君,陈光德,伍叶龙等. 双折射吸收非线性介质薄膜中倍频的产生[J]. 物理学报, 2008, **57**(1):265~270
- Ma Yanghua, Zhao Jianlin, Wang Wenli *et al.*. Optimum phase matching for SHG in biaxial crystals [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(5):2084~2089
马仰华,赵建林,王文礼等. 双轴晶体中二次谐波产生的最佳相位匹配条件[J]. 物理学报, 2005, **54**(5):2084~2089
- Yang Shengli. Phase matching paramiters for doublings in principal planes of biaxial crystals [J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(10):1159~1164
杨胜利. 双轴晶体主平面上倍频的相位匹配参量[J]. 光学学报, 2002, **22**(10):1159~1164
- Song Zhe, Liu Liren, Zhou Yu *et al.*. Reflection and transmission of extraordinary beam at uniaxial crystal surfaces [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(12):1701~1704
宋哲,刘立人,周煜等. 非常偏振光在单轴晶体表面的反射透射研究[J]. 光学学报, 2004, **24**(12):1701~1704
- Shen Weimin, Shao Zhongxing. Dispersion between ordinary ray and extraordinary ray in uniaxial crystals for any orientation of optical axis [J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(6):765~768
沈为民,邵中兴. 单轴晶体中光轴任意取向时寻常光与非常光间的离散[J]. 光学学报, 2002, **22**(6):765~768
- Ren Haixia, Liu Liren, Song Zhe *et al.*. Double refraction and reflection of sequential interfaces in a crystal; the optic axis orientation arbitrary [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(11):1397~1400
任海霞,刘立人,宋哲等. 光轴方向任意的晶体连续双折射双反射[J]. 光子学报, 2004, **33**(11):1397~1400
- Yang Ting, Jing Hongmei, Liu Dahe. Jones vectors for incident and refracted electric fields of a birefringent crystal and modification of Fresnel equations on interface [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(1):171~176
杨婷,景红梅,刘大禾. 双折射晶体入射、折射光电场矢量的琼斯描述及界面处菲涅耳方程的修正[J]. 光学学报, 2007, **27**(1):171~176
- Shen Weimin, Jin Yongxing, Shao Zhongxing. Reflection and refraction on the surface of a biaxial crystal [J]. *Acta Physica Sinica*, 2003, **52**(12):3049~3054
沈为民,金永兴,邵中兴. 光在双轴晶体表面的反射与折射[J]. 物理学报, 2003, **52**(12):3049~3054
- Yuan Lin. Emergent points' locuses of polarized light in biaxial crystal with normal incidence as crystal making direction changes [J]. *Acta Physica Sinica*, 1996, **45**(6):1051~1058
袁林. 正入射时双轴晶体中偏振光出射点随晶体取向而变化的轨迹[J]. 物理学报, 1996, **45**(6):1051~1058
- Born M., Wolf E. Principles of optics [M]. New York: Pergamon Press, 1975:665~690
- Han Qizhi, Sun Hongzhou. *Group Theory* [M]. Beijing: Peking University Press, 1987:101~102
韩其智,孙洪洲. 群论[M]. 北京:北京大学出版社, 1987:101~102
- Ren Haixia, Liu Liren, Song Zhe. Double refraction and reflection of sequential interfaces in a crystal and application to integration of $1 \times N$ optical switch [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(2):152~157
任海霞,刘立人,宋哲等. 晶体的连续双折射双反射及其集成应用: $1 \times N$ 电光开关[J]. 光学学报, 2004, **24**(2):152~157